Tema 13. Distribuciones de Probabilidad
Problemas Resueltos

Distribución de Probabilidad

1. Una variable aleatoria discreta, *X*, se distribuye como se indica en la siguiente tabla:

X	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)=p_i$	0,20	0,30	0,25	m	0,15

a) Halla el valor de *m*. b) Calcula la media y la desviación típica de la variable.

Solución:

a) Debe cumplirse que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \Rightarrow 0,20 + 0,30 + 0,25 + m + 0,15 = 1 \Rightarrow m = 0,10$.

b) La media y la varianza valen: $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$; $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \mu^2$.

$\mu = 1\cdot 0,20 + 2\cdot 0,30 + 3\cdot 0,25 + 4\cdot 0,10 + 5\cdot 0,15 = 2,7$.

$\sigma^2 = 1\cdot 0,20 + 4\cdot 0,30 + 9\cdot 0,25 + 16\cdot 0,10 + 25\cdot 0,15 - 2,7^2 = 1,71 \Rightarrow \sigma = \sqrt{1,71} \approx 1,31$.

2. La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta *X* es:

X	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	0,01	0,20	m	n	0,10	0,09

Calcula *m* y *n* si la media de *X* es 2,45.

Solución:

La suma de las probabilidades debe ser 1, luego:

$0,01 + 0,20 + m + n + 0,10 + 0,09 = 1 \Rightarrow m + n = 0,60$.

La media:

$\mu = 0\cdot 0,01 + 1\cdot 0,20 + 2m + 3n + 4\cdot 0,1 + 5\cdot 0,09 = 2,45 \Rightarrow 2m + 3n = 1,40$.

Por tanto:

$$\begin{cases} m + n = 0,60 \\ 2n + 3m = 1,40 \end{cases} \Rightarrow m = 0,40;\ n = 0,20 .$$

3. a) En una lotería se pueden ganar 10000 € con probabilidad de 0,001; en los demás casos se pierde lo jugado. Si cada apuesta cuesta 12 €, ¿es un juego equitativo?

b) En otra lotería se pueden ganar 5000 € con probabilidad 0,002 o 15000 € con probabilidad 0,0001; en los demás casos se pierde lo jugado. Si cada apuesta cuesta 12 €, ¿es un juego equitativo?

Solución:

Un juego es equitativo cuando su esperanza matemática es 0: $E(X) = \mu = 0$.

a) La probabilidad de ganar 10000 € es 0,001, y la de perder 12 € es 0,999. Por tanto, la esperanza matemática es la ganancia por la probabilidad de ganar menos lo que se apuesta por la probabilidad de perder:

$\mu = 10000\cdot 0,001 - 12\cdot 0,999 = 10 - 11,988 = -1,988$.

Como la esperanza es negativa, el juego no es equitativo. Tiene ventaja la empresa de loterías.

b) $\mu = 5000 \cdot 0,002 + 15000 \cdot 0,0001 - 12 \cdot 0,9979 = 11,5 - 11,9748 = -0,4748$.
Tampoco es un juego equitativo.

4. Para cada una de las loterías anteriores, ¿cuánto debe valer cada apuesta si se quiere que el juego sea equitativo?
Solución:
Un juego es equitativo cuando su esperanza matemática es 0: $E(X) = \mu = 0$.
Si el precio de cada apuesta es k euros:
a) La probabilidad de ganar 10000 € es 0,001 y la perder k euros es 0,999, la esperanza matemática es 0 si:

$$\mu = 10000 \cdot 0,001 - k \cdot 0,999 = 0 \Rightarrow k = \frac{10}{0,999} \approx 10,01.$$

b) $\mu = 5000 \cdot 0,002 + 15000 \cdot 0,0001 - k \cdot 0,9979 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{11,5}{0,9979} \approx 11,52$.

5. Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 + kx, & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$, ¿puede ser $f(x)$ función de densidad de una variable aleatoria continua para algún valor de k?
Solución:
Para que $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X, debe cumplir:
1) $f(x) \ge 0$, para todo x de su dominio.
2) El área limitada por la curva de $f(x)$ y el eje de abscisas, vale 1: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; en este caso: $\int_0^2 f(x)dx = 1$.
Empezando por lo segundo:

$$\int_0^2 \left(x^2 + kx\right)dx = 1 \Rightarrow \left[\frac{x^3}{3} + k\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 1 \Rightarrow \frac{8}{3} + 2k = 1 \Rightarrow k = -\frac{5}{6}.$$

Luego: $f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{5}{6}x, & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$.

$\rightarrow$ Ahora hay que ver que la función no es negativa en ningún caso. Para ello basta con determinar el mínimo (que es el vértice de una parábola):

$$f'(x) = 2x - \frac{5}{6} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{12}.$$

Como $f\left(\dfrac{5}{12}\right) = \dfrac{25}{144} - \dfrac{25}{72} < 0$, la función dada no puede ser una función de densidad.

6. Dada $f(x)=\begin{cases} kx^2+x, & \text{si } 0\le x\le 2 \\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$, ¿puede ser $f(x)$ función de densidad de una variable aleatoria continua para algún valor de *k*?
Si fuese una función de densidad calcula $P(0<X<1)$.

<u>Solución</u>:
Como se ha dicho en el problema anterior deben cumplirse:

$$\int_0^2 f(x)dx=1 \Rightarrow \int_0^2\left(kx^2+x\right)dx=1\Rightarrow\left[\frac{kx^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^2=1\Rightarrow k\frac{8}{3}+2=1\Rightarrow k=-\frac{3}{8}.$$

Luego: $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{3}{8}x^2+x, & \text{si } 0\le x\le 2 \\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$.

$\to$ Ahora hay que ver que la función no es negativa en ningún caso.
Derivando:

$$f'(x)=-\frac{6}{8}x+1=0\Rightarrow x=\frac{4}{3}.$$

La función crece a la izquierda *x* = 4/3; decrece a su derecha. En *x* = 4/3 se da el máximo.
Como $f(0)=0$ y $f(2)=0,5$, la función siempre toma valores positivos. Por tanto, para $k=-\dfrac{3}{8}$ es una función de densidad.

La probabilidad pedida es:

$$P(0<X<1)=\int_0^1\left(-\frac{3}{8}x^2+x\right)dx=\left[-\frac{3x^3}{16}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=-\frac{3}{16}+\frac{1}{2}=\frac{5}{16}.$$

7. La variable aleatoria que mide el tiempo de espera, en minutos, para ser atendido en una empresa de telefonía móvil tiene función de densidad $f(x)=\dfrac{3}{512}x^2$, con $0\le x\le 8$. (Si *x* > 8 la llamada se corta automáticamente). Halla:
a) La probabilidad de ser atendido en menos de 2 minutos.
b) La probabilidad de ser atendido después de 5 minutos de espera.

<u>Solución</u>:
Su función de distribución de probabilidad será $F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{3}{512}t^2dt = \frac{x^3}{512}$.

a) La probabilidad de tener que esperar menos de 2 minutos es:

$$P(0\le X\le 2)=F(2)=\frac{8}{512}\approx 0,0156.$$

b) La probabilidad de esperar más de 5 minutos es:

$$P(X>5)=1-P(X<5)=1-F(5)=1-\frac{125}{512}=\frac{387}{512}\approx 0,7559.$$

Distribución Binomial

8. Un dado, cuyas caras están numeradas del 1 al 6, se lanza cinco veces. Halla la probabilidad de que el número 3 salga:
a) Exactamente dos veces. b) Una vez a lo sumo. c) Más de una vez.
Solución:
El número de treses puede medirse a partir de la binomial $B\left(5,\ \dfrac{1}{6}\right)$.

a) $P(X=2)=\binom{5}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^3=10\cdot\dfrac{125}{7776}\approx 0{,}16075$.

b) $P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=\binom{5}{0}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^5+\binom{5}{1}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^4=$

$=1\cdot\dfrac{3125}{7776}+5\cdot\dfrac{625}{7776}=\dfrac{6250}{7776}\approx 0{,}80375$.

c) $P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-\dfrac{6250}{7776}=1-0{,}80375=0{,}19625$.

9. En un Centro Escolar el 25% de los alumnos son de origen extranjero. Si se eligen 6 estudiantes al azar, ¿cuál es la probabilidad de 4 o más sean de origen extranjero?
Solución:
El número de alumnos de origen extranjero puede estudiarse como una binomial $B(6,\ 0{,}25)$.

$P(X\ge 4)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=\binom{6}{4}0{,}25^4\cdot 0{,}75^2+\binom{6}{5}0{,}25^5\cdot 0{,}75+\binom{6}{6}0{,}25^6$

$=15\cdot 0{,}25^4\cdot 0{,}75^2+6\cdot 0{,}25^5\cdot 0{,}75+0{,}24^6=0{,}03296+0{,}00439+0{,}00024=0{,}03759$.

10. Se lanza una moneda correcta 10 veces y se mide el número de caras y cruces obtenidas.
a) ¿Cuántos resultados forman el espacio muestral? ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de los resultados posibles?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que salgan 4 caras?
Solución:
a) Si para cada moneda se designa por 0 el suceso cara y por 1 el suceso cruz, el espacio muestral será:
E = {0000000000, 0000000001, 0000000010…, 1111111110, 1111111111}.
Son las variaciones con repetición de 2 elementos (el 0 y el 1) tomados 10 a 10. Su número es $VR_{2,10}=2^0=1024$.

P(cada suceso elemental) = $\dfrac{1}{1024}$.

b) Es un experimento binomial: $B\left(10,\ \dfrac{1}{2}\right)\to p=q=\dfrac{1}{2}$.

Si X cuenta el número de caras,

P(4 caras) = $P(X=4)=\binom{10}{4}\dfrac{1}{2^{10}}=\dfrac{210}{2^{10}}=\dfrac{105}{512}$.

11. En una moneda trucada la probabilidad de obtener cara es 0,4. Si se lanza 5 veces, calcula la probabilidad de obtener al menos 3 caras.

Solución:

Se trata de una distribución de probabilidad binomial: $B(5,\ 0{,}4) \to p = 0{,}4;\ q = 0{,}6$.

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \binom{5}{3}0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 + \binom{5}{4}0{,}4^4 \cdot 0{,}6 + \binom{5}{5}0{,}4^5 =$$

$$= 10 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 + 5 \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6 + 0{,}4^5 = 0{,}2304 + 0{,}0768 + 0{,}01024 = 0{,}31744.$$

12. Un examen consta de 8 preguntas con 3 posibles respuestas cada una, de las que sólo una de ellas es correcta. Si un estudiante responde al azar marcando las respuestas aleatoriamente, calcula la probabilidad de que:

a) No acierte ninguna respuesta correcta. b) Acierte 6 o más preguntas.

Solución:

Si se contesta al azar, la probabilidad de acertar $p = \frac{1}{3}$; la de fallar, $q = \frac{2}{3}$.

Se trata de una distribución de probabilidad binomial, $B\left(8,\ \frac{1}{3}\right)$.

a) $P(X = 0) = \binom{8}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 = \frac{256}{6561} = 0{,}039$.

b) $P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) =$

$$= \binom{8}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{8}{7} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + \binom{8}{8} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 28 \cdot \frac{4}{6561} + 8 \cdot \frac{2}{6561} + \frac{1}{6561} = \frac{129}{6561} = 0{,}0197$$

13. Una compañía de seguros estima que la probabilidad de que un asegurado de motocicleta tenga algún tipo de accidente es 0,15. De 10 asegurados, ¿cuál es la probabilidad de que haya al menos 2 accidentados?

Solución:

El número de accidentados sigue una variable binomial $B(10,\ 0{,}15)$.

Se pide calcular $P(X \geq 2)$; pero es más sencillo calcular la probabilidad del suceso contrario:

$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$.

Luego:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}15^0 \cdot 0{,}85^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0{,}15^1 \cdot 0{,}85^9 =$$

$$= 1 – 0{,}1968744\,043 – 0{,}3474254194 = 0{,}4557.$$

14. En un Centro Comercial el 35% de los consumidores utiliza el coche para hacer la compra. Si se eligen al azar 7 consumidores que hayan realizado la compra en dicho Centro Comercial:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellos hayan ido en coche a comprar?

b) ¿Cuál es la probabilidad de todos hayan ido en coche?

Solución:

El número de de los usuarios que utilizan el coche para hacer la compra se puede estudiar como una variable binomial $B(7,\ 0{,}35)$.

a) $P(X=3)=\binom{7}{3}0,35^3\cdot 0,65^4=35\cdot 0,00765...\approx 0,2679$.

b) $P(X=7)=\binom{7}{7}0,35^3\approx 0,00064$.

Distribución Normal

15. Utilizando la tabla normal *N*(0, 1) calcula:

a) $P(Z<1,2)$ b) $P(Z<1,27)$ c) $P(Z<-1,2)$ d) $P(Z<-1,27)$

Solución:

En la tabla puede leerse directamente:

a) $P(Z<1,2)$ = 0,8849.

b) $P(Z<1,27)$ = 0,8980.

c) $P(Z<-1,2)=1-P(Z<1,2)$ = 1 – 0,8849 = 0,1151.

d) $P(Z<-1,27)=1-P(Z<1,27)$ = 1 – 0,8980 = 0,1020.

16. Utilizando la tabla normal *N*(0, 1) calcula interpolando:

a) $P(Z<1,325)$ b) $P(Z<1,645)$ c) $P(Z<0,666)$

d) $P(Z<1,863)$ e) $P(Z>1,45)$ f) $P(Z>-1,42)$

Solución:

a) $P(Z<1,325)$ está entre $P(Z<1,32)$ y $P(Z<1,33)$. Como es el punto medio, puede asignársele la media de ambos resultados:

$$P(Z<1,325)=\frac{P(Z<1,32)+P(Z<1,33)}{2}=\frac{0,9066+0,9082}{2}=0,9074.$$

b) Análogamente:

$$P(Z<1,645)=\frac{P(Z<1,64)+P(Z<1,65)}{2}=\frac{0,9495+0,9505}{2}=0,95.$$

c) Para calcular $P(Z<0,666)$ debe dividirse la diferencia de los valores $P(Z<0,66)$ y $P(Z<0,67)$ y sumar 6/10 de ella (lo que corresponde a las 6 milésimas de diferencia entre 0,66 y 0,666) al valor $P(Z<0,66)$.

Como $P(Z<0,67)-P(Z<0,66)=0,7486-0,7454=0,0032\ \rightarrow\ \frac{6}{10}\cdot 0,0032=0,00192$, se asignará a $P(Z<0,666)$ el valor:

$$P(Z<0,666)=P(Z<0,66)+0,00192=0,7454+0,00192=0,74732.$$

d) Análogamente, para calcular $P(Z<1,863)$, se hallan los 3/10 de la diferencia $P(Z<1,87)-P(Z<1,86)=0,9693-0,9686=0,0007$ y se le suma a $P(Z<1,86)$.

Se obtiene:

$$P(Z<1,863)=P(Z<1,86)+\frac{3}{10}\cdot 0,0007=0,9686+0,00021=0,96881.$$

e) $P(Z>1,45)=1-P(Z<1,45)=1-0,9265=0,0735$.

f) $P(Z>-1,42)=P(Z<1,42)=0,9222$.

Observación: En la práctica, salvo en casos sencillos, y dada la escasa diferencia de los valores de probabilidad, no hay inconveniente en aproximar cada valor de Z a las centésimas. Así:
$P(Z<0,666)\approx P(Z<0,67)=0,7486$; $P(Z<1,863)\approx P(Z<1,86)=0,9686$

17. Utilizando la tabla normal $N(0, 1)$, determina el valor de k que cumple:

a) $P(Z<k)=0,9115$ b) $P(Z<k)=0,9452$

c) $P(Z<k)=0,1587$ d) $P(Z<k)=0,95$

Solución:

a) El valor 0,9115 de la tabla se corresponde con Z = 1,35. Por tanto, k = 1,35.

b) El valor 0,9452 de la tabla se corresponde con Z = 1,6. Por tanto, k = 1,6.

c) Como 0,1587 es menor que 0,5 hay que buscar el valor de Z que deja por debajo 1 – 0,1587 = 0,8413. Ese valor es Z = 1. Por tanto, k = –1.

d) El valor 0,95 no aparece en la tabla. Como está entre 0,9495, correspondiente a Z = 1,64, y 0,9505, correspondiente a Z = 1,65, el valor de k buscado es k = 1,645.

18. Para una distribución normal $N(50, 5)$, halla:

a) $P(X<56)$ b) $P(X>58)$ c) $P(X<48)$ d) $P(48<X<56)$

Solución:

En todos los casos hay que tipificar la variable: $Z=\frac{X-50}{5}$. Con esto:

a) $P(X<56)=P\left(Z<\frac{56-50}{5}\right)=P(Z<1,2)=0,8849$.

b) $P(X>56)=P\left(Z>\frac{58-50}{5}\right)=P(Z>1,6)=1-P(Z<1,6)=1-0,9452=0,0548$.

c) $P(X<48)=P\left(Z>\frac{48-50}{5}\right)=P(Z<-0,4)=1-P(Z<0,4)=1-0,6554=0,3446$.

d) $P(48<X<56)=P\left(\frac{48-50}{5}<Z<\frac{56-50}{5}\right)=P(-0,4<Z<1,2)=$

$= P(Z<1,2)-P(Z<-0,4)=0,8849-0,3446=0,5403$.

19. Supongamos que la estatura media de las alumnas de bachillerato se distribuye normalmente con media μ = 166 cm y desviación típica 9 cm. Si se elige una alumna al azar halla la probabilidad de que su estatura sea:

a) Superior a 175 cm. b) Inferior a 155 cm. c) Esté entre 155 cm y 175 cm.

Solución:

La normal de media μ y desviación típica σ, $N(\mu, \sigma)$, se tipifica mediante el cambio $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$, (en este caso, para μ = 166 y σ = 9 → $Z=\dfrac{X-166}{9}$), se tendrá:

a) $P(X > 175) = P\left(Z>\dfrac{175-166}{9}\right)=P(Z>1)=1-P(Z<1)=1-0,8413=0,1587$.

b) $P(X < 155) = P\left(Z<\dfrac{155-166}{9}\right)=P(Z<-1,22)=1-P(Z<1,22)=1-0,8888=0,1112$.

c) $P(155 < X < 175) = P(X < 175) – P(X < 155) = 0,8413 – 0,1112 = 0,7301$.

20. Para una distribución normal $N(60, 5)$, determina el valor de k que cumple:

a) $P(X<k)=0,90$ b) $P(X>k)=0,95$ c) $P(60-k<X<60+k)=0,9544$

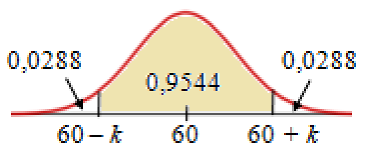
Solución:

En todos los casos hay que tipificar la variable: $Z=\dfrac{X-60}{5}$. Con esto:

a) $P(X<k)=0,90\Leftrightarrow P\left(Z<\dfrac{k-60}{5}\right)=0,90\Rightarrow\dfrac{k-60}{5}=1,28\Rightarrow k=66,4$.

b) $P(X>k)=0,95\Leftrightarrow P\left(Z>\dfrac{k-60}{5}\right)=0,95\Rightarrow\dfrac{k-60}{5}=-1,645\Rightarrow k=51,775$.

c) $P(60-k<X<60+k)=0,9544$ ⇒ la probabilidad que cae fuera de ese intervalo es 1 – 0,9544 = 0,0456; la mitad (0,0228) en la cola de la izquierda de la campana, la otra mitad en la cola derecha.



Por tanto, $P(X<60+k)=0,9544+0,0288=0,9772$.

Luego:

$$P(X<60+k)=0,9772\Leftrightarrow P\left(Z<\dfrac{60+k-60}{5}\right)=0,9772\Rightarrow\dfrac{k}{5}=2\Rightarrow k=10.$$

Esto es, en el intervalo (50, 70) = (60 –2σ, 60 + 2σ) caen el 95,44% de los valores de X, $N(60, 5)$.

21. Supongamos que los chicos de 15 años de un determinado país tienen una estatura que se distribuye según una normal de media 168 cm y desviación típica 12 cm. Si se quieren seleccionar al 5 % de los chicos más altos, ¿a partir de qué altura debe hacerse?

Solución:

Si X es la variable que describe la altura de los chicos, seleccionar uno entre el 5 % de los más altos tiene una probabilidad de 0,05, es decir, $P(X>k)=0,05$; o, lo que es lo mismo, $P(X<k)=0,95$.

Como $P\left(X<k\right)=0,95\Leftrightarrow P\left(Z<\dfrac{k-168}{12}\right)=0,95\Rightarrow \dfrac{k-168}{12}=1,645\Rightarrow k=187,74$.

Luego, el 5% de los chicos más altos miden más de 187,74 cm.

22. El diámetro de las ciruelas de una determina variedad se distribuye normalmente con media 4,5 cm y desviación típica 0,3 cm. Si se desea seleccionar, para su exportación, el 10% de las más grandes, ¿a partir de qué tamaño hay que cogerlas?

Solución:

La medida *X* de su diámetro se distribuye según la normal: *N*(4,5, 0,3). Esta normal se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-4,5}{0,3}$.

Se desea encontrar el valor *d* (de diámetro) tal que $P\left(X>d\right)=0,10\ \Rightarrow$

$$P\left(Z>\frac{d-4,5}{0,3}\right)=0,10\ \Rightarrow\ \frac{d-4,5}{0,3}=1,28\Rightarrow d=0,3\cdot 1,28+4,5=4,884\ \text{cm.}$$

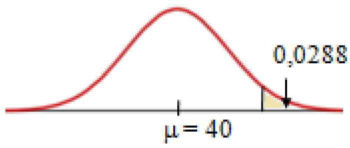
23. La edad de los habitantes de cierta ciudad se distribuye normalmente, con una media de 40 años. Se sabe además que el 2,28 % de los habitantes tiene más de 60 años.

a) ¿Cuál es la desviación típica?

b) ¿Cuál es el porcentaje de habitantes con menos de 35 años?

Solución:

La distribución de edad de la población es como se indica en la figura adjunta.



a) Se sabe que $P\left(X>60\right)=0,0228$.

Como la normal de media μ y desviación típica σ, *N*(μ, σ), se tipifica mediante el cambio $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$, (en nuestro caso, para μ = 40 y σ desconocida), se tendrá:

$$P\left(X>60\right)=P\left(Z>\frac{60-40}{\sigma}\right)=0,0228\ \Leftrightarrow\ P\left(Z>\frac{20}{\sigma}\right)=0,0228\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ P\left(Z<\frac{20}{\sigma}\right)=1-0,0228=0,9772\ \Rightarrow\ \frac{20}{\sigma}=2\Rightarrow\sigma=10.$$

Esto es, la desviación típica vale 10.

b) $P\left(X<35\right)=P\left(Z<\dfrac{35-40}{10}\right)=P\left(Z<-0,5\right)=1-P(Z<0,5)=1-0,6915=0,3085$.

Esta probabilidad equivale al 30,85 %.

24. La duración de una determinada marca de lavadoras se ajusta a una normal de media 8,4 años y desviación típica 6 meses. El fabricante asegura que sus lavadoras duran más de 7 años, comprometiéndose a: "si una lavadora se estropea antes de 7 años le damos otra nueva". ¿Cuántas lavadoras nuevas tendrá que reponer por cada 10000 vendidas?

Solución:

Para la normal *N*(8,4, 0,5), la probabilidad de que *X* sea menor que 7 es:

$$P\left(X<7\right)=P\left(Z<\frac{7-8,4}{0,5}\right)=P\left(Z<-2,8\right)=1-P(Z<2,8)=1-0,9974=0,0026.$$

Tendrá que reponer 10000 · 0,0026 = 26 lavadoras.

25. Los envases de cartón de una determinada marca de leche contienen 1 litro de media, siendo la desviación típica de 5 ml.
a) ¿Qué porcentaje de envases sobrepasan los 1005 ml.
b) Si el control de calidad rechaza los envases que contengan menos de 990 ml y más de 1010 ml, ¿qué porcentaje de envases habrá que rechazar?
Solución:
El contenido de los envases se ajusta la normal *N*(1000, 5). Se tipifica haciendo $Z = \dfrac{X-1000}{5}$.

a) $P(X > 1005) = P\left(Z > \dfrac{1005-1000}{5}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$.

El 15,87% de los envases contiene más de 1005 ml.

b) Los envases que se aceptan son los que contienen entre 990 y 1010 ml.

$$P(990 < X < 1010) = P\left(\dfrac{990-1000}{5} Z < \dfrac{1010-1000}{5}\right) = P(-2 < Z < 2) =$$

$$= P(Z < 2) - P(Z < -2) = 0,9772 - (1 - 0,9772) = 0,9544 \to 95,44\%$$

Hay que rechazar el 4,56% de los envases.

Aproximación de la binomial mediante una normal

26. Mediante la aproximación normal de la binomial *B*(50, 0,12) calcula:
a) $P(X = 6)$ b) $P(X = 12)$ c) $P(6 < X \le 12)$

Solución:
La binomial *B*(50, 0,12) se puede aproximar por la normal de media y desviación típica:
$\mu = 50 \cdot 0,12 = 6$ y $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0,12 \cdot 0,88} \approx 2,3 \to X' = N(6,\ 2,3)$.

Con esto:

a) $P(X = 6) = P(5,5 < X' < 6,5) = P\left(\dfrac{5,5-6}{2,3} < Z < \dfrac{6,5-6}{2,3}\right) \approx P(-0,22 < Z < 0,22) =$

$= P(Z < 0,22) - P(Z < -0,22) = 0,5871 - (1 - 0,5871) = 0,1742$.

b) $P(X = 12) = P(11,5 < X' < 12,5) = P\left(\dfrac{11,5-6}{2,3} < Z < \dfrac{12,5-6}{2,3}\right) = P(2,39 < Z < 2,83) =$

$= P(Z < 2,83) - P(Z < 2,39) = 0,9977 - 0,9916 = 0,0061$.

c) $P(6 < X \le 12) = P(5,5 < X' < 12,5) = P\left(\dfrac{5,5-6}{2,3} < Z < \dfrac{12,5-6}{2,3}\right) = P(-0,28 < Z < 2,83) =$

= 0,9916 – (1 – 0,5871) = 0,5787.

27. El 42 % de los habitantes de un pueblo pasa cada día por la calle mayor. Elegidos 60 habitantes al azar, ¿qué probabilidad hay de que más de 30 de ellos pasen ese día por la calle mayor?
Solución:
La variable *X* que computa el número de habitantes que pasa por la calle mayor es una variable *B*(60, 0,42), que se aproxima por la normal *X´*: $N(60 \cdot 0,42, \sqrt{60 \cdot 0,42 \cdot 0,58}) = N(25,2,\ 3,82)$.

Haciendo la corrección de continuidad y tipificando, se tiene:

$$P(X>30)=P(X'>30,5)=P\left(Z>\frac{30,5-25,2}{3,82}\right)=P(Z>1,39)=1-P(Z<1,39)=$$

= 1– 0,9177 = 0,0823.

28. Un examen de respuesta múltiple consta de 80 preguntas, cada una con 4 opciones, una de ellas correcta y erróneas las otras tres. Si un estudiante contesta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que acierte 25 o más preguntas? ¿Y menos de 10?

Solución:

El experimento es de tipo binomial, con P(éxito) = p = 0,25 y q = 0,75. Para n = 80, será B(80, 0,25).

La binomial B(80, 0,25) puede aproximare mediante la normal de media μ = 80 · 0,25 = 20 y $\sigma=\sqrt{80\cdot 0,25\cdot 0,75}=\sqrt{15}=3,87\to$ N(20, 3,87).

Con esto, haciendo la corrección de continuidad y tipificando:

$$P(X\geq 25)=P(X'>24,5)=P\left(Z>\frac{24,5-20}{3,87}\right)=P(Z>1,16)=1-P(Z<1,16)=$$

= 1 – 0,8770 = 0,1230.

$$P(X<10)=P(X'<9,5)=P\left(Z<\frac{9,5-20}{3,87}\right)=P(Z<-2,71)=1-P(Z<2,71)=$$

= 1 – 0,9966 = 0,0034.

29. (Propuesto en ABAU 2018, Galicia)

En un bombo tenemos 10 bolas idénticas numeradas del 0 al 9 y cada vez que hacemos una extracción devolvemos la bola al bombo.

a) Si hacemos 5 extracciones, calcula la probabilidad de que el 7 salga menos de dos veces.

b) Si hacemos 100 extracciones, calcula la probabilidad de que el 7 salga menos de 9 veces.

Solución:

a) El experimento puede estudiarse como una binomial: B(5, 0,1).

0,1 es la probabilidad de que salga la bola numerada con el 7: p = 0,1 $\to$ q = 0,9.

Si X mide el número de veces que sale la bola 7 en 5 extracciones, se tendrá:

$$P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=\binom{5}{0}\cdot 0,1^0\cdot 0,9^5+\binom{5}{1}\cdot 0,1^1\cdot 0,9^4=$$

= $0,9^5$ – 5 · 0,1 · $0,9^4$ = 1 – 0,59049 – 0,32805 = 1 – 0,91854 = 0,08146.

b) Si se hacen 100 extracciones, la B(100, 0,1) puede estudiarse como una normal de media μ = 100 · 0,1 = 10 y desviación típica $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{100\cdot 0,1\cdot 0,9}=\sqrt{9}=3$: N(10, 3).

Esta normal se tipifica haciendo el cambio: $Z=\dfrac{X-10}{3}$.

Con esto:

$$P(X<9)=P(X'\leq 8,5)=P\left(Z<\frac{8,5-10}{3}\right)=P(Z<-0,5)=1-P(Z<0,5)=$$

= 1 – 0,6915 = 0,3085.

(Se ha realizado la corrección de continuidad).

30. (Propuesto en EvAU 2019, Madrid)
La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10%. Se pide:
a) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.
b) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.
Solución:
a) El experimento puede estudiarse como una binomial con $n = 10$ y $p = 0,1$: $B(10, 0,1)$.
Sea X la variable aleatoria que mide el número de peces que siguen vivos después de 5 años.
Con esto:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^9 =$$

$$= 1 - 0,3486\ldots - 0,3874\ldots \approx 0,264.$$

b) Hay que estudiar la binomial $B(200, 0,1)$.
Puede aproximarse por la normal $N\left(200 \cdot 0,1,\ \sqrt{200 \cdot 0,1 \cdot 0,9}\right) \to N(20,\ 4,24)$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X - 20}{4,24}$.

También debe hacerse la corrección de continuidad.
Por tanto:

$$P(X \geq 10) = P(X' > 9,5) = P\left(Z > \frac{9,5 - 20}{4,24}\right) \approx P(Z > -2,48) = P(Z < 2,48) = 0,9934.$$

Otros problemas

31. El peso de los estudiantes varones de una universidad se distribuye normalmente con media 68,5 kilos y desviación típica, 10 kilos. Halla:
a) El porcentaje de estudiantes que pesan entre 48 y 71 kilos.
b) El porcentaje de estudiantes que pesan más de 91 kilos
c) Si se eligen 5 alumnos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 2 de ellos pesen más de 75 kilos?
Solución:
La variable X que indica el peso de esos estudiantes se ajusta a una distribución normal: $N(68,5, 10)$. Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X - 68,5}{10}$.

a) Para un estudiante:

$$P(48 < X < 71) = P\left(\frac{48 - 68,5}{10} < Z < \frac{71 - 68,5}{10}\right) = P(-2,05 < Z < 0,25) =$$

$$= P(Z > 0,25) - P(Z < -2,05) = P(Z > 0,25) - (1 - P(Z < 2,05)) =$$

$$= 0,5987 - (1 - 0,9798) = 0,5785 \to 57,85\ \%$$

b) Para un estudiante:

$$P(X > 91) = P\left(Z > \frac{91 - 68,5}{10}\right) = P(Z > 2,25) = 1 - P(Z < 2,25) = 1 - 0,9878 = 0,0122$$

El 1,22 % pesa más de 91 kg.

c) Para cada uno de los estudiantes se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(X<75)=P\left(Z<\frac{75-68,5}{10}\right)=P(Z<0,65)=0,7422 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(X>75)=1-0,7422=0,2578$$

La variable, *Y*, que cuenta el número de estudiantes con peso mayor de 75 kg, entre 5 elegidos al azar, puede estudiarse como una binomial *B*(5, 0,2578) → *p* = 0,2575; *q* = 0,7422.
En este caso hay que hallar $P(Y=2)$.

$$P(Y=2)=\binom{5}{2}\cdot 0,2578^2\cdot 0,7422^3=0,2717 .$$

32. Supongamos que la estatura de los jóvenes de 20 años de una determinada región sigue una distribución normal de media 175 cm. Si se sabe además que los jóvenes que miden más de 190 cm representan el 6,68 % del total, calcula:
a) La desviación típica de la población considerada.
b) El porcentaje de jóvenes con estatura superior a 165 cm
<u>Solución</u>:
a) Se trata de una población *N*(175, σ). Se tipifica haciendo el cambio $Z=\frac{X-175}{\sigma}$.
Se sabe que

$$P(X>190)=0,0668 \Rightarrow P\left(Z>\frac{190-175}{\sigma}\right)=0,0668 \Leftrightarrow P\left(Z>\frac{15}{\sigma}\right)=0,0668 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z<\frac{15}{\sigma}\right)=1-0,0668=0,9322 \to \text{(por la tabla normal)} \Rightarrow \frac{15}{\sigma}=1,5 \Rightarrow \sigma=10$$

Por tanto, la distribución es *N*(175, 10). Luego:
b) $P(X>165)=P\left(Z>\frac{165-175}{10}\right)=P(Z>-1)=P(Z<1)=0,8413$.
Esta probabilidad equivale al 84,13 %.

33. El 1 % de los individuos de una población supera los 185 cm de estatura, mientras que el 3 % no llega a los 160 cm. Si se supone que la estatura sigue una distribución normal, calcula la media y la desviación típica de esa distribución.
<u>Solución</u>:
Se trata de una población *N*(μ, σ); de momento con ambas desconocidas.
Se tipifica haciendo el cambio $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$.
Se sabe que

$$P(X>181)=0,01 \text{ y } P(X<160)=0,03.$$

Esto significa que

$$P(X>181)=P\left(Z>\frac{181-\mu}{\sigma}\right)=0,01 \Rightarrow \frac{181-\mu}{\sigma}=2,33 \Rightarrow \mu+2,33\sigma=181.$$

$$P(X<160)=P\left(Z<\frac{160-\mu}{\sigma}\right)=0,03 \Rightarrow \frac{160-\mu}{\sigma}=-1,88 \Rightarrow \mu-1,88\sigma=160.$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} \mu + 2,33\sigma = 181 \\ \mu - 1,88\sigma = 160 \end{cases} \Rightarrow \mu = 169,37; \sigma = 4,99$.

34. En un test de inteligencia, las puntuaciones se distribuyen normalmente, con media 100 y desviación típica 25. Si el 10 % de las puntuaciones más altas corresponde al grupo de los superdotados, ¿qué puntuación mínima hay que alcanzar para entrar en el grupo de los superdotados?

Solución:

Hay que encontrar el valor *k* tal que $P(X < k) = 0,90$.

La *N*(100, 25) se tipifica mediante el cambio $Z = \dfrac{X - 100}{25}$.

$$P(X < k) = 0,90 \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{k-100}{25}\right) = 0,90, \text{ (por la tabla normal) } \Rightarrow \frac{k-100}{25} = 1,28$$

(Se ha tomado el valor más cercano: $P(Z < 1,28) = 0,8997$).

$$\Rightarrow k = 100 + 1,28 \cdot 25 = 132.$$

Por tanto, se consideran superdotados los individuos que alcancen 132 o más puntos.

35. Determina el valor de *k* para que la función $f(x) = \begin{cases} k \sin x, & \text{si } x \in [0, \pi] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$ sea una función de densidad. Para ese valor de *k*:

a) Halla la expresión de la función de distribución y calcula la probabilidad de de *X* tome valores menores que π/3.

b) Calcula la media de la variable aleatoria que tiene por función de densidad a $f(x)$.

Solución:

Para que $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua *X*, debe cumplir:

1) $f(x) \geq 0$, para todo *x* de su dominio.

Como sen *x* es positivo en el intervalo [0, π], para que $f(x) \geq 0$ es necesario que k > 0.

2) El área limitada por la curva de $f(x)$ y el eje de abscisas, vale 1: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

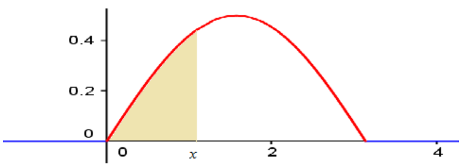
En este caso:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\pi} k \sin x dx = \left(-k \cos x\right)\Big|_0^{\pi} = -k\cos\pi - (-k\cos 0) = 2k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

a) La función de distribución, $F(x)$, mide la probabilidad de que la variable *X* tome todos los valores menores o iguales que *x*:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{2}\sin t dt = \left(-\frac{1}{2}\cos t\right)\Big|_0^x = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$F(x) = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2},\ 0 < x \leq \pi.$$



Con esto,

$$P\left(X < \frac{\pi}{3}\right) = F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Geométricamente, $F(x)$ da el área bajo la curva $f(x)$, desde $-\infty$ hasta x.

b) Si $f(x)$ es la función de densidad de una variable aleatoria continua, su media viene dada por $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\pi} \frac{x}{2}(\sin x)\, dx$

La integral $\int x(\sin x)\, dx$ se hace por el método de partes.

Tomando $x = u$ y $\sin x\, dx = dv$

se tiene $dx = du$ y $-\cos x = v$

luego:

$$\int x(\sin x)\, dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x$$

Por tanto:

$$\mu = \int_0^{\pi} \frac{x}{2}(\sin x)\, dx = \left(-\frac{x}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$