TEMA 10. La integral indefinida
Problemas Resueltos

Integrales inmediatas

1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int\left(3x^2+x-2\sqrt{x}\right)dx$ b) $\int x\left(4-4x^2\right)dx$ c) $\int \frac{e^{-2x}}{5}dx$

d) $\int \frac{5x}{3+3x^2}dx$ e) $\int \cos(4x+3)dx$ f) $\int\left(\sin 2x-\frac{1}{3}\cos 5x\right)dx$

g) $\int\left(3\cos\frac{x}{2}-\frac{\text{sen }2x}{5}\right)dx$ h) $\int x\cos\left(3x^2\right)dx$ i) $\int\left(\cos(2x)-3e^{2x-3}\right)dx$

j) $\int \cos x\cdot(\sin x)^2dx$ k) $\int 5x\left(1-2x^2\right)^2dx$ l) $\int (2-3x)^2dx$

m) $\int \frac{x^2}{x^3+2}dx$ n) $\int \frac{3}{1+x^2}dx$ o) $\int \frac{4x^2}{\sqrt{3-x^3}}dx$

p) $\int \frac{5x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ q) $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}dx$ r) $\int 2xe^{3x^2}dx$

s) $\int (1-x)^3dx$ t) $\int x(1-x)^3dx$ u) $\int \frac{(x-1)^3}{x}dx$

Solución:
En la mayoría de los casos hay que ajustar constantes y operar cuando sea necesario.

a) $\int\left(3x^2+x-2\sqrt{x}\right)dx = x^3+\frac{1}{2}x^2-2\int x^{1/2}dx = x^3+\frac{1}{2}x^2-2\frac{x^{3/2}}{3/2}+c$

b) $\int x\left(4-4x^2\right)dx = \int\left(4x-4x^3\right)dx = 2x^2-x^4+c$

c) $\int \frac{e^{-2x}}{5}dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(-2)}\int(-2)e^{-2x}dx = -\frac{1}{10}e^{-2x}+c$

d) $\int \frac{5x}{3+3x^2}dx = \frac{5}{6}\int\frac{6x}{3+3x^2}dx = \frac{5}{6}\ln\left(3+3x^2\right)+c$

e) $\int \cos(4x+3)dx = \frac{1}{4}\int 4\cos(4x+3)dx = \frac{1}{4}\sin(4x+3)+c$

f) $\int\left(\sin 2x-\frac{1}{3}\cos 5x\right)dx = \frac{1}{2}\int 2\sin 2x dx-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\int 5\cos 5x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{15}\sin 5x+c$

g) $\int\left(3\cos\frac{x}{2}-\frac{\text{sen }2x}{5}\right)dx = 6\int\left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx-\frac{1}{10}\int 2\sin 2x dx = 6\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{10}\cos 2x+c$

h) $\int x\cos\left(3x^2\right)dx = \frac{1}{6}\int 6x\cos\left(3x^2\right)dx = \frac{1}{6}\sin\left(3x^2\right)+c$

i) Ajustando constantes en cada una de las funciones:

$$\int\left(\cos(2x)-3e^{2x-3}\right)dx = \int\cos(2x)dx-\int\left(3e^{2x-3}\right)dx = \frac{1}{2}\int 2\cos(2x)dx-\frac{3}{2}\int\left(2e^{2x-3}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\sin(2x)-\frac{3}{2}e^{2x-3}+c$$

j) Ajustando constantes:

$$\int \cos x \cdot (\sin x)^2\, dx = \frac{1}{3}\int 3(\sin x)^2 \cdot \cos x dx = \frac{1}{3}(\sin x)^3 + c$$

k) $\int 5x\left(1-2x^2\right)^2 dx = -\frac{5}{4}\int\left(-4x\left(1-2x^2\right)^2\right)dx = -\frac{5}{4}\cdot\frac{\left(1-2x^2\right)^3}{3} + c = -\frac{5}{12}\left(1-2x^2\right)^3 + c$

l) Se opera en el integrando:

$$\int (2-3x)^2\, dx = \int \left(4-12x+9x^2\right)dx = 4x - 6x^2 + 3x^3 + c$$

m) Ajustando constantes:

$$\int \frac{x^2}{x^3+2}dx = \frac{1}{3}\int\frac{3x^2}{x^3+2}dx = \frac{1}{3}\ln\left(x^3+2\right)+c$$

n) $\int \frac{3}{1+x^2}dx$. Es inmediata: $\int \frac{3}{1+x^2}dx = 3\cdot\int\frac{1}{1+x^2}dx = 3\arctan x + c$.

o) Ajustando constantes:

$$\int \frac{4x^2}{\sqrt{3-x^3}}dx = -\frac{4\cdot 2}{3}\int\frac{-3x^2}{2\sqrt{3-x^3}}dx = -\frac{8}{3}\int\frac{-3x^2}{2\sqrt{3-x^3}}dx = -\frac{8}{3}\sqrt{3-x^3}+c.$$

p) Ajustando constantes:

$$\int \frac{5x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -5\int\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx = -5\sqrt{1-x^2}+c$$

q) $\int \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Es inmediata: $\int\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}dx = 5\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 5\arcsin x + c$

r) Ajustando constantes:

$$\int 2xe^{3x^2}dx = \frac{2}{6}\int 6xe^{3x^2}dx = \frac{1}{3}e^{3x^2}+c$$

s) Desarrollando el integrando:

$$\int (1-x)^3 dx = \int\left(1-3x+3x^2-x^3\right)dx = x - \frac{3}{2}x^2 + x^3 - \frac{1}{4}x^4 + c$$

También podría hacerse directamente ajustando constantes:

$$\int (1-x)^3 dx = -\int (-1)(1-x)^3 dx = -\frac{(1-x)^4}{4}+c$$

t) Hay que desarrollar el cubo, multiplicar e integrar: $\int x(1-x)^3 dx =$

$$= \int x\left(1-3x+3x^2-x^3\right)dx = \int\left(x-3x^2+3x^3-x^4\right)dx = \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 + c$$

u) Hay que desarrollar el cubo, dividir e integrar:

$$\int\frac{(x-1)^3}{x}dx = \int\frac{1-3x+3x^2-x^3}{x}dx = \int\left(\frac{1}{x}-3+3x-x^2\right)dx = \ln x - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + c$$

2. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 5x(1-2x)^2\, dx$ b) $\int\left(3x^2-2x\right)^2 dx$ c) $\int\frac{x}{1+3x^2}dx$

<u>Solución</u>:

a) $\int 5x(1-2x)^2\, dx = \int 5x\left(1-4x+4x^2\right)dx = \int\left(5x-20x^2+20x^3\right)dx = \frac{5}{2}x^2 - \frac{20}{3}x^3 + 5x^4 + c$

b) $\int\left(3x^2-2x\right)^2 dx = \int\left(9x^4-12x^3+4x^2\right)dx = \frac{9}{5}x^5 - 3x^4 + \frac{4}{3}x^3 + c$

c) $\int \frac{x}{1+3x^2}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{1+3x^2}dx = \frac{1}{6}\ln\left(1+3x^2\right)+c$

3. Calcula:

a) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}dx$ b) $\int \sqrt{x}\left(7x^2+3\right)dx$ c) $\int \frac{5x+\sqrt{3x}}{x^2}dx$

Solución:

a) $\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}}dx = \frac{2}{3}\int \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{3x^2+1}+c$

b) $\int \sqrt{x}\left(7x^2+3\right)dx = \int\left(7x^{5/2}+3x^{1/2})\right)dx = \frac{7x^{7/2}}{7/2} + \frac{3x^{3/2}}{3/2} + c = 2x^{7/2} + 2x^{3/2} + c$

c) $\int \frac{5x+\sqrt{3x}}{x^2}dx = \int\left(\frac{5}{x}+\sqrt{3}x^{-3/2}\right)dx = 5\ln x + \frac{\sqrt{3}}{-1/2}x^{-1/2} + c = 5\ln x - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x}} + c$.

4. Resuelve las integrales:

a) $\int(\sin 2x - 3\cos 5x)dx$ b) $\int(\sin x+\cos x)^2 dx$ c) $\int(\sin x-\cos x)^2 dx$

Solución:

a) $\int(\sin 2x-3\cos 5x)dx = \int \sin 2xdx - \int 3\cos 5xdx = \frac{1}{2}\int 2\sin 2xdx - \frac{3}{5}\int 5\cos 5xdx =$

$= -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{3}{5}\sin 5x + c$

b) $\int(\sin x+\cos x)^2 dx =$

$= \int\left(\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x\right)dx = \int(1+2\sin x\cos x)dx = x+\sin^2 x+c$

c) $\int(\sin x-\cos x)^2 dx =$

$= \int\left(\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x\right)dx = \int(1-2\sin x\cos x)dx = x+\cos^2 x+c$

También se puede escribir:

$\int(\sin x-\cos x)^2 dx = x-\sin^2 x+c$, pues $x+\cos^2 x = x+\left(1-\sin^2 x\right)+c = x-\sin^2 x+(1+c)$

5. Halla:

a) $\int e^{4x}dx$ b) $\int e^{x/3}dx$ c) $\int xe^{1-x^2}dx$

d) $\int 4^x dx$ e) $\int 4{\cdot}3^x dx$ f) $\int 20x{\cdot}3^{x^2} dx$

Solución:

a) $\int e^{4x}dx = \frac{1}{4}\int 4e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x}+c$

b) $\int e^{x/3}dx = 3\int \frac{1}{3}e^{x/3}dx = 3e^{x/3}+c$

c) $\int xe^{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int\left(-2xe^{1-x^2}\right)dx = -\frac{1}{2}e^{1-x^2}+c$

d) $\int 4^x dx = 4^x\cdot\frac{1}{\ln 4}+c$

e) $\int 4\cdot 3^x dx = 4\int 3^x dx = 4\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+c = \frac{4}{\ln 3}\cdot 3^x+c$

f) $\int 20x\cdot 3^{x^2}dx = 10\int 2x\cdot 3^{x^2}dx = 10\cdot 3^{x^2}\cdot\frac{1}{\ln 3}+c = \frac{10}{\ln 3}\cdot 3^{x^2}+c$

6. Calcula:

a) $\int\left(e^x+e^{-x}\right)dx$ b) $\int\left(e^x+e^{-x}\right)^2 dx$ c) $\int\left(e^{2x}-\sin 2x\right)dx$

Solución:

a) $\int\left(e^x+e^{-x}\right)dx = e^x-e^{-x}+c$

b) $\int\left(e^x+e^{-x}\right)^2 dx = \int\left(e^{2x}+e^{-2x}+2e^x\cdot e^{-x}\right)dx = \int e^{2x}dx+\int e^{-2x}dx+\int 2dx =$

$= \frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2x+c$

c) $\int\left(e^{2x}-\sin 2x\right)dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx-\frac{1}{2}\int 2\sin xdx = \frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}\cos 2x+c$

7. Resuelve, ajustando constantes, las siguientes integrales:

a) $\int\frac{1}{2+x^2}dx$ b) $\int\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$ c) $\int\frac{x-3}{x^2+9}dx$

Solución:

a) $\int\frac{1}{2+x^2}dx$ es parecida a $\int\frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x+c$. Para resolverla hay que ajustar constantes buscando que aparezca $\int\frac{f}{1+f^2}dx = \arctan f+c$. Puede hacerse lo que sigue:

$$\frac{1}{2+x^2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{x^2}{2}\right)} = \frac{1}{2\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{2}/\sqrt{2}}{2\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1/\sqrt{2}}{\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1/\sqrt{2}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

Por tanto:

$$\int\frac{1}{2+x^2}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\int\frac{1/\sqrt{2}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+c$$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$ es parecida a $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c$. Para resolverla hay que ajustar constantes buscando que aparezca $\int \frac{f}{\sqrt{1-f^2}}dx = \arcsin f + c$. Se consigue así:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{16\left(1-\frac{x^2}{16}\right)}}dx = \int \frac{1}{4\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}}dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{4}\right)+c$$

c) $\int \frac{x-3}{x^2+9}\,dx = \int\left(\frac{x}{x^2+9}-\frac{3}{x^2+9}\right)dx = \int \frac{x}{x^2+9}\,dx - \int \frac{3}{x^2+9}\,dx$.

La primera integral es casi inmediata: es un neperiano; en ella hay que ajustar constantes.
La segunda integral también es casi inmediata, aunque algo más difícil: es un arcotangente.
También hay que ajustar constantes.

$$\int \frac{x}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right)+c_1.$$

$$\int \frac{3}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{3}{\left((x/3)^2+1\right)}\,dx = \frac{3}{9}\int \frac{3\cdot(1/3)}{\left((x/3)^2+1\right)}\,dx = \int \frac{1/3}{(x/3)^2+1}\,dx = \arctan\left(\frac{x}{3}\right)+c_2.$$

Por tanto:

$$\int \frac{x-3}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right)-\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+c.$$

<u>Integración por descomposición en fracciones racionales</u>

8. Calcula, descomponiendo el integrando, las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x-x^2+3x^3}{x^4}dx$ b) $\int \frac{x^3-3x^2+5}{4x^3}dx$ c) $\int \frac{x^3+5x^2-3x+2}{\sqrt{x}}dx$

d) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$ e) $\int\left(\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}\right)dx$ f) $\int \frac{x^3-1}{x+3}dx$

<u>Solución</u>:

a) Se escribe el integrando como se indica:

$$\int \frac{2x-x^2+3x^3}{x^4}dx = \int\left(\frac{2x}{x^4}-\frac{x^2}{x^4}+\frac{3x^3}{x^4}\right)dx = \int\left(2x^{-3}-x^{-2}+\frac{3}{x}\right)dx = -\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+3\ln x+c$$

b) Dividiendo: $\int \frac{x^3-3x^2+5}{4x^3}dx = \int\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4x}+\frac{5}{4x^3}\right)dx = \frac{1}{4}x-\frac{3}{4}\ln x-\frac{5}{8x^2}+c$

c) Operando se tiene:

$$\int \frac{x^3+5x^2-3x+2}{\sqrt{x}}\,dx = \int\left(x^{5/2}+5x^{3/2}-3x^{1/2}+2x^{-1/2}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{7}x^{7/2}+5\frac{2}{5}x^{5/2}-3\frac{2}{3}x^{3/2}+2\cdot 2x^{1/2}+c = \left(\frac{2}{7}x^3+2x^2-2x+4\right)x^{1/2}+c$$

d) $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx = \int\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}-\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx = \int\left(x^{-1/4}-x^{-5/12}\right)dx = \frac{4}{3}x^{3/4}-\frac{12}{7}x^{7/12}+c$

e) $\int\left(\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}\right)dx = \int\left(\frac{4x^2+1}{4x^2+1}-\frac{4x}{4x^2+1}\right)dx = \int\left(1-\frac{4x}{4x^2+1}\right)dx = x-\frac{1}{2}\ln(4x^2+1)+c$

f) Dividiendo el integrando (puede hacerse por Ruffini), se tiene:

$$\int \frac{x^3-1}{x+3}dx = \int\left(x^2-3x+9-\frac{28}{x+3}\right)dx = \frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+9x-28\ln(x+3)+c$$

9. a) Comprueba que $\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{x^3+x}$. b) Calcula la integral indefinida: $\int \frac{1}{x^3+x}dx$.

Solución:

a) Efectivamente: $\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x(x^2+1)}-\frac{x^2}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x^3+x}$.

b) Por lo visto:

$$\int \frac{1}{x^3+x}dx = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx = \ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$$

10. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2-3x+5x^2}{2x}dx$ b) $\int \frac{(x-3)^2}{4x}dx$ c) $\int \frac{2x^3-3x^2+5}{x^2}dx$

d) $\int \frac{3x^3-x^2+4x-5}{x}dx$ e) $\int \frac{3x^3-x^2+4x-5}{x+1}dx$ f) $\int \frac{3x^3-x^2+4x-5}{x^2+1}dx$

Solución:

a) $\int \frac{2-3x+5x^2}{2x}dx = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}x\right)dx = \ln x-\frac{3}{2}x+\frac{5}{4}x^2+c$

b) $\int \frac{(x-3)^2}{4x}dx = \int \frac{x^2-6x+9}{4x}dx = \int \frac{1}{4}xdx-\int\frac{3}{2}dx+\int\frac{9}{4x}dx = \frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\ln x+c$

c) $\int \frac{2x^3-3x^2+5}{x^2}dx = \int\left(2x-3+\frac{5}{x^2}\right)dx = x^2-3x-\frac{5}{x}+c$

d) $\int \frac{3x^3-x^2+4x-5}{x}dx = \int\left(3x^2-x+4-\frac{5}{x}\right)dx = x^3-\frac{1}{2}x^2+4x-5\ln x+c$

e) $\int \frac{3x^3-x^2+4x-5}{x+1}dx = \int\left(3x^2-4x+8-\frac{13}{x+1}\right)dx = x^3-2x^2+8x-13\ln(x+1)+c$

Se ha dividido: $\frac{3x^3-x^2+4x-5}{x+1}=3x^2-4x+8-\frac{13}{x+1}$

f) $\int \frac{3x^3-x^2+4x-5}{x^2+1}dx = \int\left(3x-1+\frac{x-4}{x^2+1}\right)dx = \frac{3}{2}x^2-x+\int\frac{x-4}{x^2+1}dx =$

$= \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - 4\arctan x + c$

Se ha dividido: $\frac{3x^3 - x^2 + 4x - 5}{x^2+1} = 3x - 1 + \frac{x-4}{x^2+1}$

La integral: $\int \frac{x-4}{x^2+1}dx = \int \frac{x}{x^2+1}dx - \int \frac{4}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - 4\arctan x$

11. Calcula las integrales:

a) $\int \frac{x+8}{x^2+x-2}dx$ b) $\int \frac{2dx}{x^2-4}$ c) $\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx$ d) $\int \frac{1}{2x^2+2x-12}dx$

Solución:

Todas pueden hacerse por el método de descomposición en fracciones simples.

a) $\int \frac{x+8}{x^2+x-2}dx$.

Como las raíces del denominador son $x = 1$ y $x = –2$: $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, se tiene la igualdad:

$$\frac{x+8}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

Luego:

$x + 8 = A(x+2) + B(x-1)$

si $x = 1$: $9 = 3A \Rightarrow A = 3$

si $x = –2$: $6 = –3B \Rightarrow B = –2$

Con esto:

$$\int \frac{x+8}{x^2+x-2}dx = \int \frac{3}{x-1}dx + \int \frac{-2}{x+2}dx = 3\ln(x-1) - 2\ln(x+2) + c$$

b) $\int \frac{2dx}{x^2-4}$.

Como:

$$\frac{2}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{x^2-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 = A(x+2) + B(x-2) \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - 2B = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \text{ y } B = -\frac{1}{2}$$

Luego,

$$\int \frac{2dx}{x^2-4} = \int \left(\frac{1/2}{x-2} - \frac{1/2}{x+2}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\left(x-2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(x+2\right) + c$$

c) $\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx$

La ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$ tiene soluciones reales: $x = –1$ y $x = 3$.

Por tanto:

$$\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} \Rightarrow \frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = A(x-3)+B(x+1) \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -3A+B=1 \end{cases} \Rightarrow A=-\frac{1}{4};\ B=\frac{1}{4}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx = \int\left(\frac{-1/4}{x+1}+\frac{1/4}{x-3}\right)dx = -\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-3}dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln(x+1)+\frac{1}{4}\ln(x-3)+c$$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+2x-12}dx$

El denominador: $2x^2+2x-12=2(x-2)(x+3)$.

La descomposición que se hace es:

$$\frac{1}{2x^2+2x-12}=\frac{A}{2(x-2)}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+2B(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

Luego:

$$1=A(x+3)+2B(x-2)$$

si $x = 2$: $1 = 5A \Rightarrow A = 1/5$

si $x = -3$: $1 = -10B \Rightarrow B = -1/10$

Por tanto:

$$\int\frac{1}{2x^2+2x-12}dx = \int\left(\frac{1/5}{2(x-2)}-\frac{1/10}{x+3}\right)dx=\frac{1}{10}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{10}\int\frac{1}{x+3}dx =$$

$$=\frac{1}{10}\ln(x-2)-\frac{1}{10}\ln(x+3)+c$$

12. Calcula las integrales:

a) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-1}dx$ b) $\displaystyle\int\frac{x}{x^2-1}dx$ c) $\displaystyle\int\frac{x^2}{x^2-1}dx$ d) $\displaystyle\int\frac{x^3}{x^2-1}dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2-1}dx$ $\to$ Hay que descomponer la función dada en fracciones simples.

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}$$

Luego:

$$1=A(x+1)+B(x-1) \Rightarrow 1=(A+B)x+A-B$$

Identificando coeficientes:

$$\begin{cases} 0=A+B \\ 1=A-B \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{2};\ B=-\frac{1}{2}$$

Con esto:

$$\int\frac{1}{x^2-1}dx=\int\frac{1/2}{x-1}dx-\int\frac{1/2}{x+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x+1)+c$$

b) Es inmediata: $\displaystyle\int\frac{x}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)+c$

c) Se transforma el integrando como sigue:

$$\int \frac{x^2}{x^2-1}dx = \int \frac{x^2-1+1}{x^2-1}dx = \int \left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)dx = x + \int \frac{1}{x^2-1}dx =$$

= (la última integral se ha hecho más arriba) = $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x+1)+c$

d) Es inmediata si se transforma el integrando como sigue:

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}dx = \int \left(x+\frac{x}{x^2-1}\right)dx = \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)+c$$

13. Halla:

a) $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+1}dx$ b) $\int \frac{x+2}{x^2-2x+1}dx$ c) $\int \frac{3}{x^2-4x+5}dx$ d) $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}dx$

Solución:

a) El denominador tiene una raíz real doble: $x^2+2x+1=\left(x+1\right)^2$.

Por tanto, se hace la descomposición:

$$\frac{3x+1}{x^2+2x+1} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2} \Rightarrow A = 3;\ B = -2$$

Luego,

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+1}dx = \int\left(\frac{3}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}\right)dx = 3\ln(x+1)+\frac{2}{x+1}+c$$

b) $\int \frac{x+2}{x^2-2x+1}dx$

Como el denominador $x^2-2x+1=\left(x-1\right)^2$, se hace la descomposición:

$$\frac{x+2}{x^2-2x+1} = \frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1} = \frac{A+B(x-1)}{(x-1)^2}$$

Luego:

$$x+2 = A+B(x-1)$$

Si $x = 1$: $3 = A \Rightarrow A = 3$; si $x = 0$: $2 = A - B \Rightarrow B = 1$

Con esto:

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x+1}dx = \int \frac{3}{(x-1)^2}dx + \int \frac{1}{x-1}dx = \frac{-3}{x-1}+\ln(x-1)+c$$

En los casos que siguen el denominador no tiene raíces reales.

c) $x^2-4x+5=\left(x-2\right)^2+1$.

Se puede escribir: $\frac{3}{x^2-4x+5} = \frac{3}{\left(x-2\right)^2+1} \Rightarrow$

$$\int \frac{3}{x^2-4x+5}dx = \int \frac{3}{\left(x-2\right)^2+1}dx = 3\arctan\left(x-2\right)+c$$

d) $x^2+2x+2=\left(x+1\right)^2+1$.

Por tanto:

$$\frac{2x+1}{x^2+2x+2}=\frac{2x+2-1}{x^2+2x+2}=\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{x^2+2x+2}=\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{(x+1)^2+1}\Rightarrow$$

$$\int\frac{2x+1}{x^2+2x+2}dx=\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx-\int\frac{1}{(x+1)^2+1}dx=\ln\left(x^2+2x+2\right)-\arctan\left(x+1\right)+c$$

14. Propuestas en UNED. Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int\frac{x^2+2x-1}{x^3-x}dx$ b) $\int\frac{2x^2+1}{x^3+x}dx$ c) $\int\frac{-x^2+2x+1}{x^3-x^2+x-1}dx$.

Solución:

a) $\int\frac{x^2+2x-1}{x^3-x}dx$.

Como $x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)$ se hace la descomposición:

$$\frac{x^2+2x-1}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}=$$

$$=\frac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x^2-1)}=\frac{(A+B+C)x^2+(B-C)x-A}{x(x^2-1)}$$

Igualando los numeradores primero y último se obtiene el sistema: $\begin{cases}A+B+C=1\\ B-C=2\\ -A=-1\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow A$ = 1; B = 1, C = –1.

Por tanto,

$$\int\frac{x^2+2x-1}{x^3-x}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\ln x+\ln(x-1)-\ln(x+1)+c$$

b) $\int\frac{2x^2+1}{x^3+x}dx$.

El denominador $x^3+x=x\left(x^2+1\right)\rightarrow$ El segundo factor no tiene raíces reales.

Con esto: $\frac{2x^2+1}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+x(Bx+C)}{x(x^2+1)}\Rightarrow A$ = 1; B = 1; C = 0.

Luego:

$$\int\frac{2x^2+1}{x^3+x}dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{x}{x^2+1}dx=\ln x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$$

c) $\int\frac{-x^2+2x+1}{x^3-x^2+x-1}dx$.

Como $x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$ se hace la descomposición:

$$\frac{-x^2+2x+1}{x^3-x^2+x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=$$

$$=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{(A+B)x^2+(-B+C)x+A-C}{(x-1)(x+1)^2}\Rightarrow A=1;\ B=-2;\ C=0.$$

Luego: $\int\frac{-x^2+2x+1}{x^3-x^2+x-1}dx=\int\frac{1}{x-1}dx-\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\ln\left(x-1\right)-\ln\left(x^2+1\right)+c$

Método de integración por partes

15. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int x\cos x dx$ b) $\int xe^{2x}dx$ c) $\int x^2 \cdot e^{3x}dx$ d) $\int 2x^3 e^{x^2} dx$

e) $\int (x\ln x)dx$ f) $\int \arcsin x dx$ g) $\int x^2 \sin(2x)dx$ h) $\int x^3 \cos x dx$

Solución:

Todas pueden resolverse aplicando el método de integración por partes.

a) $\int x\cos x dx$

Se toma: $x = u$ y $dv = \cos x dx \Rightarrow du = dx$ y $v = \sin x$

Luego,

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x + c$$

b) $\int xe^{2x}dx$

Tomando: $u = x \Rightarrow du = dx$; $e^{2x}dx = dv \Rightarrow \int e^{2x}dx = \int dv \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$

Luego:

$$\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$$

c) $\int x^2 \cdot e^{3x}dx$.

Tomando: $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$; $dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x}$

Se tiene: $\int x^2e^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx$

La segunda integral, $\int xe^{3x}dx$, también se hace por partes.

Tomando ahora: $u = x \Rightarrow du = dx$; $dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x}$

Se tiene: $\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}$

Por tanto:

$$\int x^2e^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right) + c =$$

$$= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c$$

d) $\int 2x^3e^{x^2}dx$.

Haciendo $u = x^2$ y $dv = 2xe^{x^2}dx$ se tiene:

$$\int 2x^3e^{x^2}dx = x^2e^{x^2} - \int 2xe^{x^2}dx = x^2e^{x^2} - e^{x^2} + c$$

e) $\int (x\ln x)dx$.

Tomando: $u = x\ln x \Rightarrow du = (\ln x + 1)dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

Luego, $\int (x\ln x)dx = x^2\ln x - \int (x\ln x + x)dx = x^2\ln x - \int (x\ln x)dx + \int xdx$

En el segundo miembro aparece la misma integral, que se traspone al primer miembro, obteniéndose,

$$2\int (x\ln x)dx = x^2\ln x - \frac{x^2}{2} + c$$

De donde, $\int (x\ln x)dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4} + c$

f) $\int \arcsin xdx$

Se toma: $u = \arcsin x \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

Luego, $\int \arcsin xdx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$

g) $\int x^2\sin(2x)dx$

Haciendo: $x^2 = u$, $\sin 2xdx = dv \Rightarrow 2xdx = du$; $v = -\frac{1}{2}\cos 2x$

Luego, $\int x^2\sin(2x)dx = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \int x\cos 2xdx$

Para hacer la segunda integral se aplica nuevamente el método de partes.

$$\int x\cos 2xdx$$

Tomando: $x = u$; $dv = \cos 2xdx \Rightarrow dx = du$; $v = \frac{1}{2}\sin 2x$

Luego, $\int x\cos 2xdx = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x$

Por tanto: $\int x^2\sin(2x)dx = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$

h) $\int x^3\cos xdx$.

Se hace: $u = x^3$; $dv = \cos xdx \Rightarrow du = 3x^2dx$; $v = \sin x$

Luego:

$$\int x^3 \cos x dx = x^3 \sin x - \int 3x^2 \sin x\, dx$$

Segunda integral: $\int 3x^2 \sin x\, dx = -3x^2 \cos x + \int 6x \cos x dx$

(Se ha hecho: $3x^3 = u$; $\sin x dx = dv$)

Tercera integral: $\int 6x \cos x dx = 6x \sin x + 6 \cos x$

(Se hace: $6x = u$; $\cos x\, dx = dv$)

Luego:

$$\int x^3 \cos x dx = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + c.$$

16. Utilizando el método de integración por partes, calcula $\int \frac{x}{e^x} dx$

<u>Solución</u>:

$$\int \frac{x}{e^x} dx = \int xe^{-x} dx$$

Se hace:

$u = x$ y $dv = e^{-x} dx \Rightarrow du = dx$; $v = -e^{-x}$

Luego:

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

17. A partir del resultado de $\int \ln x dx$, calcula las siguientes integrales.

a) $2\int \ln x dx$ b) $\int \ln(2x) dx$ c) $\int \ln x^2 dx$ d) $\int (\ln x)^2 dx$

<u>Solución</u>:

$\int \ln x dx$ se calcula por el método de partes.

Tomando: $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

Luego:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

Con esto:

a) $2\int \ln x dx = 2\left(x \ln x - \int dx \right) = 2(x \ln x - x) + c$

b) $\int \ln(2x) dx = \int (\ln 2 + \ln x) dx = \int \ln 2 dx + \int \ln x dx = (\ln 2) \cdot x + x \ln x - x + c$

c) $\int \ln x^2 dx = \int 2 \ln x dx = 2\int \ln x dx = 2\left(x \ln x - \int dx \right) = 2(x \ln x - x) + c$

d) $\int (\ln x)^2 dx$

Tomando: $u = (\ln x)^2 \Rightarrow du = 2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

Luego:

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - \int 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x dx = x(\ln x)^2 - \int 2\ln x dx =$$
$$= x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x) + c$$

Integración por cambio de variable

18. Calcula las siguientes integrales haciendo el cambio que se indica:

a) $\int x\sqrt{1-x^2}dx \to (1-x^2 = t)$ b) $\int (\sin x)^3 dx \to (\cos x = t)$

c) $\int \frac{dx}{x(4-\ln x)} \to (t = \ln x)$ d) $\int x\cdot\sqrt[3]{4+x^2}dx \to (4+x^2 = t)$

Solución:

a) Si $1-x^2 = t \Rightarrow -2xdx = dt \Rightarrow xdx = -\frac{1}{2}dt$.

Por tanto:

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-x^2}\,(xdx) = -\frac{1}{2}\int t^{1/2}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2} + c = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + c$$

Observación: $\int x\sqrt{1-x^2}dx$ puede hacerse directamente (es inmediata), pues:

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int \left(-2x(1-x^2)^{1/2}\right)dx = -\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2} + c = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + c$$

b) Si $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$.

Como

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin x\cdot\sin^2 x dx = \int \sin x\cdot(1-\cos^2 x)dx = -\int (1-\cos^2 x)(-\sin x dx) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \sin^3 x dx = -\int (1-t^2)dt = -t + \frac{t^3}{3} + c = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$$

c) Si $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$.

Luego:

$$\int \frac{dx}{x(4-\ln x)} = \int \frac{1}{(4-\ln x)}\cdot\left(\frac{1}{x}dx\right) = \int \frac{1}{4-t}dt = -\ln(4-t) + c = -\ln(4-\ln x) + c$$

d) Si $4+x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dt$

Por tanto:

$$\int x\cdot\sqrt[3]{4+x^2}dx = \int (4+x^2)^{1/3}\cdot(xdx) = \int t^{1/3}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{4/3}}{4/3} + c = \frac{3}{8}(4+x^2)^{4/3} + c$$

Observación: También se puede hacer ajustando constantes, pues:

$$\int x\cdot\sqrt[3]{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\left(4+x^2\right)^{1/3}dx = \left(\int f'(x)\cdot\left(f(x)\right)^n\right) = \frac{1}{2}\frac{\left(4+x^2\right)^{1/3+1}}{1/3+1}+c =$$

$$= \frac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{\left(4+x^2\right)^4}+c$$

19. Halla la integral indefinida $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$ mediante el cambio de variable $\sqrt{x}=t$.

Solución:

Si $\sqrt{x}=t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}dt = 2tdt$.

Por tanto,

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{1+t}2tdt = \int \frac{2t}{1+t}dt = \int \frac{2(1+t)-2}{1+t}dt = \int\left(2-\frac{2}{1+t}\right)dt = 2t-2\ln(1+t)+c =$$

$= \text{(deshaciendo el cambio)} = 2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+c$

20. Propuestos en UNED. Calcula:

a) $\int \frac{2^x}{2^{2x}+2}dx$ b) $\int x^2\tan^2 x^3 dx$

Solución:

a) $\int \frac{2^x}{2^{2x}+2}dx \to$ puede hacerse el cambio $2^x = t \Rightarrow 2^x \ln 2dx = dt \Rightarrow 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}dt$.

Por tanto,

$$\int \frac{2^x}{2^{2x}+2}dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{1}{t^2+2}dt = \text{(Ver problema 2. a))} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+c = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{2^x}{\sqrt{2}}+c.$$

b) $\int x^2\tan^2 x^3dx \to$ puede hacerse el cambio $x^3 = t \Rightarrow 3x^2dx = dt$.

Por tanto,

$$\int x^2\tan^2 x^3dx = \frac{1}{3}\int \tan^2 tdt = \frac{1}{3}\int\left(1+\tan^2 t-1\right)dt = \frac{1}{3}\left(\tan t - t\right)+c = \frac{1}{3}\left(\tan x^3 - x^3\right)+c$$

21. Calcula $\int x^7e^{x^4}dx$ $\to$ Sugerencia: cambio $t=x^4$)

Solución:

Si $t=x^4 \Rightarrow dt = 4x^3dx$.

Sustituyendo:

$$\int x^7e^{x^4}dx = \int x^4e^{x^4}\cdot\left(x^3dx\right) = \int te^t\cdot\frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}\int te^tdt$$

Esta integral se hace por partes:

$u=t \Rightarrow du=dt$; $dv=e^tdt \Rightarrow v=e^t$

Luego:

$$\frac{1}{4}\int te^t dt=\frac{1}{4}\left(te^t-\int e^t dt\right)=\frac{1}{4}\left(te^t-e^t+c\right)$$

Deshaciendo el cambio: $\int x^7 e^{x^4}dx=\frac{1}{4}\int te^t dt=\frac{1}{4}\left(x^4e^{x^4}-e^{x^4}\right)+c$

Observación: se termina antes si se hace directamente por partes, tomando:

$$u=x^4 \quad \Rightarrow \quad du=4x^3dx$$

$$dv=x^3e^{x^4}dx \ \Rightarrow \ v=\frac{1}{4}e^{x^4}$$

Por tanto:

$$\int x^7e^{x^4}dx \ = \ x^4\frac{1}{4}e^{x^4}-\int x^3e^{x^4}dx \ = \ x^4\frac{1}{4}e^{x^4}-\frac{1}{4}e^{x^4}+c$$

22. Haciendo el cambio de variable $e^x=t$, halla:

a) $\int \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx$ b) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx$

Solución:

a) Si $e^x=t \Rightarrow e^x dx=dt$.

Por tanto:

$$\int \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx=\int \frac{1}{(1+t)^2}dt=\int (1+t)^{-2}dt=-(1+t)^{-1}+c=\frac{-1}{1+t}+c\,.$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx=\frac{-1}{1+e^x}+c$$

b) Si $e^x=t$ se tiene: $\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx=\int \frac{1}{t^2+3t+2}dt$

Por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2+3t+2}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}=\frac{A(t+2)+B(t+1)}{(t+1)(t+2)} \ \Rightarrow 1=A(t+2)+B(t+1)\Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

Por tanto,

$$\int \frac{1}{t^2+3t+2}dx=\int \left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\ln(t+1)-\ln(t+2)=\ln\frac{t+1}{t+2} \ \Rightarrow$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx=\ln\frac{e^x+1}{e^x+2}+c$$

23. (Propuesto en Selectividad, Aragón, junio 14). Usando el cambio de variable $t=\ln(x)$, determina el valor de la integral: $\int \frac{1+3\ln(x)+(\ln(x))^3}{x\left(1-(\ln(x))^2\right)}dx$

Solución:

a) Si $t=\ln(x) \Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$; luego:

$$\int \frac{1+3\ln(x)+(\ln(x))^3}{x\left(1-(\ln(x))^2\right)}dx=\int \frac{1+3\ln(x)+(\ln(x))^3}{\left(1-(\ln(x))^2\right)}\cdot\frac{1}{x}dx=\int \frac{1+3t+t^3}{1-t^2}dt$$

La última integral se hace por descomposición en fracciones simples. Dividiendo:

$$\frac{1+3t+t^3}{1-t^2}=-t+\frac{4t+1}{1-t^2} \rightarrow \frac{4t+1}{1-t^2}=\frac{A}{1-t}+\frac{b}{1+t}=\frac{A(1+t)+B(1-t)}{1-t^2} \Rightarrow A=\frac{5}{2};\ B=-\frac{3}{2}.$$

Por tanto:

$$\int \frac{1+3t+t^3}{1-t^2}dt=\int\left(-t+\frac{5/2}{1-t}-\frac{3/2}{1+t}\right)dt=-\frac{t^2}{2}-\frac{5}{2}\ln(1-t)-\frac{3}{2}\ln(1+t)+c$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{1+3\ln(x)+(\ln(x))^3}{x\left(1-(\ln(x))^2\right)}dx = -\frac{(\ln x)^2}{2}-\frac{5}{2}\ln(1-\ln x)-\frac{3}{2}\ln(1+\ln x)+c.$$

Otras integrales

24. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \frac{2}{1+x^2}dx$ b) $\int \frac{2x}{1+x^2}dx$ c) $\int \frac{2}{1-x^2}dx$ d) $\int \frac{2}{(1+x)^2}dx$ e) $\int \frac{2x}{(1+x)^2}dx$

Solución:

Obsérvese que las cinco integrales tienen cierto parecido. No obstante, sus resultados son muy diferentes.

a) Es inmediata: $\int \frac{2}{1+x^2}dx = 2\cdot\int \frac{1}{1+x^2}dx = 2\arctan x+c$.

b) También es inmediata: $\int \frac{2x}{1+x^2}dx=\ln(1+x^2)+c$.

c) Hay que hacerla por descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{2}{1-x^2}dx = \int\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx= \ln(1+x)+\ln(1-x)+c$$

d) Es inmediata: $\int \frac{2}{(1+x)^2}dx=2\int(1+x)^{-2}dx=2\cdot\frac{(1+x)^{-1}}{-1}+c=-\frac{2}{1+x}+c$.

e) Hay que hacerla por descomposición en fracciones.

$$\int \frac{2x}{(1+x)^2}dx=\int \frac{2x+2-2}{(1+x)^2}dx=\int \frac{2(1+x)}{(1+x)^2}dx+\int \frac{-2}{(1+x)^2}dx = \int \frac{2}{(1+x)}dx-2\int(1+x)^{-2}dx =$$

$$= 2\ln(1+x)+\frac{2}{1+x}+c$$

25. Propuestos en UNED. Resuelve:

a) $\int \frac{x^2-1}{4x^2+1}dx$ b) $\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx$ c) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$ d) $\int 2\ln x dx$

Solución:

a) Para resolver $\int \frac{x^2-1}{4x^2+1}dx$ hay que transformar el integrando.

Dividiendo:

$\frac{x^2-1}{4x^2+1} = \frac{1}{4} - \frac{5/4}{4x^2+1}$ $\to$ (La división debe hacerse aplicando el algoritmo tradicional).

Luego: $\int \left(\frac{1}{4} - \frac{5/4}{4x^2+1}\right)dx = \int \frac{1}{4}dx - \frac{5}{8}\int \frac{2}{(2x)^2+1}dx = \frac{1}{4} - \frac{5}{8}\arctan(2x) + c$

b) $\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx \Rightarrow \frac{5x-2}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow A = 2;\ B = 3$

$\int \frac{5x-2}{x^2-4}dx = \int \frac{2}{x-2}dx + \int \frac{3}{x+2}dx = 2\ln(x-2) + 3\ln(x+2) + c$

c) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx \to$ Partes: $\left(\ln x = u; \quad \frac{1}{x^2}dx = dv\right) \Rightarrow \left(du = \frac{1}{x}dx; \quad v = -\frac{1}{x}\right)$

Luego: $\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$

d) $\int 2\ln x dx \to$ Partes: $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$

Luego: $2\int \ln x dx = 2\left(x\ln x - \int dx\right) = 2(x\ln x - x) + c$

26. Resuelve:

a) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\left(\sqrt{x}\right)dx$ b) $\int \cos^2 x\, dx$ c) $\int \frac{7x+2}{x^2-6x+10}dx$

Solución:

a) La $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\left(\sqrt{x}\right)dx$ puede considerarse inmediata, de la forma $\int f\,'\cdot\cos f dx = \sin f$, con $f = \sqrt{x}$. En este caso: $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\left(\sqrt{x}\right)dx = \sin\sqrt{x} + c$

No obstante, puede ser más asequible hacer el cambio $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$.

Obteniéndose:

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\left(\sqrt{x}\right)dx = \int \cos\left(\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right) = \int \cos t dt = \sin t + c = \sin\sqrt{x} + c$$

b) La integral $\int \cos^2 x\, dx$ puede hacerse por partes.

Haciendo: $u = \cos x$ y $\cos x dx = dv \Rightarrow du = -\sin x dx$; $v = \sin x$

Luego:

$$\int \cos^2 x\, dx = \cos x\cdot\sin x + \int \sin^2 x\, dx = \cos x\cdot\sin x + \int \left(1-\cos^2 x\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \cos^2 x dx = \cos x\cdot\sin x + \int dx - \int \cos^2 x dx \Rightarrow 2\int \cos^2 x dx = \cos x\cdot\sin x + x$$

Despejando: $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\cos x\cdot\sin x + \frac{x}{2} + k$

De otra forma: Haciendo el cambio trigonométrico $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, se tiene:

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+k$$

c) $\int \frac{7x+2}{x^2-6x+10}dx \to$ Puede escribirse en el numerador la derivada del denominador.

Así:

$$\frac{7x+2}{x^2-6x+10} = \frac{\frac{7}{2}(2x-6)+23}{x^2-6x+10} = \frac{7}{2}\cdot\frac{(2x-6)}{x^2-6x+10} + \frac{23}{x^2-6x+10} = \frac{7}{2}\cdot\frac{(2x-6)}{x^2-6x+10} + \frac{23}{1+(x-3)^2}$$

Por tanto:

$$\int \frac{7x+2}{x^2-6x+10}dx = \int \frac{7}{2}\cdot\frac{(2x-6)}{x^2-6x+10}dx + \int \frac{23}{1+(x-3)^2}dx =$$

$$= \frac{7}{2}\ln(x^2-6x+10) + 23\arctan(x-3)+c$$

27. Integra:

a) $\int \frac{e^x+e^{2x}}{1+e^x}dx$ b) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$ c) $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx$ d) $\int \tan^2 x dx$ e) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx$

Solución:

a) Sacando factor común en el numerador:

$$\int \frac{e^x+e^{2x}}{1+e^x}dx = \int \frac{e^x\left(1+e^x\right)}{1+e^x}dx = \int e^x dx = e^x + c$$

b) Haciendo el cambio $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow$

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = \int \frac{e^x\cdot e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{t}{1+t}dt = \int \left(1-\frac{t}{1+t}\right)dx = t - \ln(1+t) + c = e^x - \ln\left(1+e^x\right)+c$$

c) Es inmediata, aunque puede hacerse el cambio $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$.

Por tanto: $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{-1}{t^4}dx = -\int t^{-4}dt = -\frac{t^{-3}}{-3}+c = \frac{1}{3t^3}+c = \frac{1}{3\cos^3 x}+c$

d) Sumando y retando 1 al integrando se tiene:

$$\int \tan^2 x dx = \int \left(1+\tan^2 x - 1\right)dx = \int \left(1+\tan^2 x\right)dx - \int dx = \tan x - x + c$$

e) Haciendo $x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$; de donde:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \arcsin t + c = \arcsin x^2 + c$$

28. (Propuesto en Selectividad, Aragón, junio 13 y septiembre 14)

a) Determina la función $f(x)$ cuya derivada es $f´(x) = 2xe^{5x}$ y que verifica que $f(0) = 2$.

b) La derivada de una función $f(x)$ es: $(x-1)^3(x-3)$. Determina la función $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 1$.

Solución:

a) La función $f(x)$ es una primitiva de $f´(x) = 2xe^{5x}$: $f(x) = \int 2xe^{5x}dx$.

Esta integral se hace por partes, tomando:

$u = 2x \Rightarrow du = 2dx$; $dv = e^{5x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{5}e^{5x}$

Luego:

$$f(x) = \int 2xe^{5x}dx = 2x\cdot\frac{1}{5}e^{5x} - \int 2\cdot\frac{1}{5}e^{5x}dx = \frac{2}{5}\left(xe^{5x} - \int e^{5x}dx\right) = \frac{2}{5}\left(xe^{5x} - \frac{1}{5}e^{5x}\right) + c$$

Como $f(0) = 2$, entonces: $f(0) = \frac{2}{5}\left(0 - \frac{1}{5}e^0\right) + c = 2 \Rightarrow c = 2 + \frac{2}{25} = \frac{52}{25}$.

Por tanto, $f(x) = \frac{2}{5}\left(xe^{5x} - \frac{1}{5}e^{5x}\right) + \frac{52}{25}$.

b) La función pedida debe ser una primitiva de $(x-1)^3(x-3)$; esto es:

$$f(x) = \int (x-1)^3(x-3)dx$$

Operando:

$$(x-1)^3(x-3) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\cdot(x-3) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$$

Luego:

$$f(x) = \int (x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3)dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{6}{4}x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x + c$$

Como $f(0) = 1 \Rightarrow c = 1$; y, por tanto: $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.