TEMA 7. Límites y continuidad de funciones
Problemas Resueltos

Definición de límites

1. Demuestra, aplicando la definición, que $\lim\limits_{x\to 3}(2x-4)=2$.

Solución:

Hay que ver que para cualquier ε > 0, existe δ > 0 tal que si $|x-3|<\delta$, entonces $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

Como $|(2x-4)-2|<\varepsilon \Rightarrow |2x-6|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<2x-6<\varepsilon \Rightarrow$ (transformando la desigualdad)

$\Rightarrow 6-\varepsilon<2x<6+\varepsilon \Rightarrow 3-\frac{\varepsilon}{2}<x<3+\frac{\varepsilon}{2}$.

Por tanto, tomando $\delta<\frac{\varepsilon}{2}$ se cumple que $|(2x-4)-2|<\varepsilon$. Luego, efectivamente, el límite vale 2.

Por ejemplo, si se toma ε = 0,01, el valor de δ puede ser 0,005.

Por tanto, para todo *x* tal que $|x-3|<0{,}005$ ⇔ 2,995 < *x* < 3,005, se cumple que $|2x-6|<0{,}01$.

2. Demuestra, aplicando la definición, que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+8}=2$.

Solución:

Hay que ver que para cualquier ε >0, existe *k* (grande) tal que si *x* > *k*, entonces $\left|\frac{2x-1}{x+8}-2\right|<\varepsilon$.

Como $\left|\frac{2x-1}{x+8}-2\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-17}{x+8}\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{17}{x+8}<\varepsilon \Rightarrow 17<x\varepsilon+8\varepsilon \Rightarrow x>\frac{17-8\varepsilon}{\varepsilon}$.

El mínimo valor de *k* será $k=\frac{17-8\varepsilon}{\varepsilon}$.

Por ejemplo, para un valor de ε = 0,01 existe un número $k=\frac{17-8\cdot 0{,}01}{0{,}01}=1692$, tal que para todo *x* > 1692 se verifica que $\left|\frac{2x-1}{x+8}-2\right|<0{,}01$.

Así, si *x* = 1693, $\left|\frac{2\cdot 1693-1}{1693+8}-2\right|=|-0{,}009994...|<0{,}01$.

Cálculo de límites por métodos algebraicos

3. Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+x^2-8x-12}{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^4-x^3-x^2}{x^3-4x^2+5x}$

Solución:

a) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+x^2-8x-12}{x^4+4x^3+5x^2+4x+4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x^2-x-6)}{\cancel{(x+2)}(x^3+2x^2+x+2)} = \left[\frac{0}{0}\right] =$ (Se repite el proceso) $= \lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x-3)}{\cancel{(x+2)}(x^2+1)} = \lim_{x\to -2} \frac{x-3}{x^2+1} = \frac{-5}{5} = -1$.

Las descomposiciones factoriales se hacen dividiendo sucesivamente por $x + 2$.

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{x-2}} = 12$.

c) $\lim_{x\to 0} \frac{3x^4-x^3-x^2}{x^3-4x^2+5x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x(3x^3-x^2-x)}{x(x^2-4x+5)} = \frac{0}{5} = 0$.

4. Halla, en función de los valores de p, los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-px}{x^2-3x+2}$ b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-p}$

Solución:

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-px}{x^2-3x+2} = \left[\frac{4-2p}{0}\right]$. En consecuencia, si $p \neq 2$ el límite será infinito: no existe el límite.

Pero, si $p = 2$, se tiene: $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-3x+2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x}{x-1} = \frac{2}{1} = 2$.

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-p} = \left[\frac{0}{4-p}\right]$. En consecuencia, si $p \neq 4$ el límite valdrá 0.

Pero, si $p = 4$, se tiene: $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+4}{x+2} = 3$.

5. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{4x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$ c) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2}$

Solución:

a) Es una indeterminación: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$. Puede resolverse transformando la función inicial, multiplicando los términos de la expresión por el conjugado del numerador. Así:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

b) Es similar al anterior. Para resolverlo hay que multiplicar por la expresión conjugada del denominador.

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{4x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}{\left(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}\right)\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}{(4+x)-(4-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{4x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}{2x} = \lim_{x\to 0} 2\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right) = 2\cdot(2+2) = 8.$$

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2}$ = (dividiendo numerador y denominador por x) =

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2-2x}{x^2}}-\left(\frac{x-2}{x}\right)}{\frac{x-2}{x}} = \frac{\sqrt{1}-1}{1} = 0.$$

6. Calcula:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+10x}{x^3-3x+4}$ b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-4}{2x-5x^2}$ c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2}{x^2+12x}$

Solución:

Mediante la comparación de grados los tres límites pueden hacerse directamente, resultando:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+10x}{x^3-3x+4} = 0$. b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-4}{2x-5x^2} = -\frac{3}{5}$. c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2}{x^2+12x} = \infty$.

7. Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-5x+1}}{\sqrt{4x^2+3x}}$ b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{2x-1}$ c) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x}{\sqrt{x^3+5x-3}}$

Solución:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-5x+1}}{\sqrt{4x^2+3x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2-5x+1}{4x^2+3x}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+1}{4x^2+3x}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{2x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+2x}{(2x-1)^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+2x}{4x^2-4x+1}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x}{\sqrt{x^3+5x-3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2+5x}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^3+5x-3}}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{5}{x}}{\sqrt{\frac{x^3+5x-3}{x^4}}} = \left[\frac{3}{0}\right] = \infty$.

8. A partir de la definición del número *e*, $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, utilizando las propiedades de los límites, demuestra que.

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{px} = e^p$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{px}\right)^{px} = e$, $p\neq 0$ c) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{p}{x}\right)^{x} = e^p$

Solución:

a) Para demostrarlo se transforma la expresión inicial como sigue:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{px} = \left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^p = e^p.$$

b) Para demostrarlo puede hacerse $px = t$ y observar que si $x \to +\infty \Rightarrow t \to \infty$. Por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{px}\right)^{px} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e\,.$$

c) Para demostrarlo se transforma la expresión inicial como sigue:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{p}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{p}}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{p}}\right)^{\frac{x}{p}\cdot p} = \left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{p}}\right)^{\frac{x}{p}}\right]^{p} = e^{p}\,.$$

9. Aplicando los resultados anteriores calcula:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^{x}$

<u>Solución</u>:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}} = \left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{1/2}\,.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{1}{2}} = \left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{1/2} = e^{1/2}\,.$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{(-4)}{x}\right)^{x} = \left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{(-4)}}\right)^{\frac{x}{(-4)}}\right]^{(-4)} = e^{-4}\,.$

10. Teniendo en cuenta que, $\lim\limits_{A(x)\to+\infty}\left(1+\frac{1}{A(x)}\right)^{A(x)} = e$ y la propiedad: "Si $f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)}$", demuestra que si se cumple que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)=1$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\left(g(x)\right)=\infty$, entonces, la indeterminación $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\left[1^{\infty}\right]$, puede resolverse aplicando la transformación: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\left[1^{\infty}\right]=e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-1)\cdot g(x)\right)}$.

<u>Solución</u>:

Si $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\left[1^{\infty}\right]$, haciendo las transformaciones que se indican se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+f(x)-1\right)^{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)-1}}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}\cdot\left(f(x)-1\right)}\right]^{g(x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)-1}}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\left(f(x)-1\right)g(x)} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)-1}}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\left(f(x)-1\right)g(x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)-1}}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-1\right)g(x)} = e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-1\right)\cdot g(x)\right)}$$

, pues cuando $f(x)\to 1$ se deduce que $\dfrac{1}{f(x)-1}\to\infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{f(x)-1}}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}=e$.

11. Aplicando la transformación anterior, halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{2x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{2x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3x}{x^2+5x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}$

<u>Solución</u>:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{2x-1} = \left[1^{\infty}\right] = e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x-3}\right)\cdot(2x-1)\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x-3}\right)} = e^2$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{2x-1} = \left[1^{\infty}\right] = e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}-1\right)\cdot(2x-1)\right)} = e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)\cdot(2x-1)\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)} = e^2$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3x}{x^2+5x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}} = \left[1^{\infty}\right] = e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x}{x^2+5x-1}-1\right)\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)} = e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-8x+1}{x^2+5x-1}\right)\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)} =$

$= e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-8x^2+9x-1}{2x^2+10x-2}\right)\right)} = e^{-4}$.

12. Halla el valor de a para que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+x}{3x^2}\right)^{ax+2}=2$

Solución:

Como $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+x}{3x^2}\right)^{ax+2}=\left[1^{\infty}\right]$, aplicando el procedimiento anterior se tiene:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x}{3x^2}\right)^{ax+2}=\left[1^{\infty}\right]=e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+x}{3x^2}-1\right)\cdot(ax+2)\right)}=e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{3x^2}\right)\cdot(ax+2)\right)}=e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2+2x}{3x^2}\right)\right)}=e^{\frac{a}{3}}.$$

Como debe cumplirse que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+x}{3x^2}\right)^{ax+2}=2\Rightarrow e^{\frac{a}{3}}=2\Rightarrow\dfrac{a}{3}=\ln 2\Rightarrow a=3\ln 2$.

13. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\log\left(\dfrac{x^2+3x}{x+2}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\log\left(\dfrac{x^2+3x}{x+2}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log\left(\dfrac{x+2}{x^2+2}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e^{\frac{3x}{x+2}}\right)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\log\left(\dfrac{x^2+3x}{x+2}\right)=\log\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x}{x+2}\right)\right]=\log[\infty]=\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to 2}\log\left(\dfrac{x^2+3x}{x+2}\right)=\log\left[\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2+3x}{x+2}\right)\right]=\log\dfrac{10}{4}=\log\dfrac{5}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log\left(\dfrac{x+2}{x^2+2}\right)=\log\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x^2+2}\right)\right]=\log 0=-\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e^{\frac{3x}{x+2}}\right)=\ln\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{3x}{x+2}}\right)\right]=\ln e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{x+2}\right)}=\ln e^3=3$.

14. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\left(\dfrac{2}{x+1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\cos\left(\dfrac{\pi}{x+1}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\tan\left(\dfrac{\pi}{x+1}\right)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\left(\dfrac{2}{x+1}\right)=\sin\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x+1}\right)\right]=\sin 0=0$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\cos\left(\dfrac{\pi}{x+1}\right)=\cos\left[\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\pi}{x+1}\right)\right]=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$.

c) $\lim\limits_{x\to 1}\tan\left(\dfrac{\pi}{x+1}\right)=\tan\left[\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\pi}{x+1}\right)\right]=\tan\dfrac{\pi}{2}=[\infty]\to$ No existe.

15. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin x+3}{x-2}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\left(\dfrac{x}{\tan x}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{\tan x}\right)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)=\left[\dfrac{\infty}{\sin(\infty)}\right]=\pm\infty$ (El límite no existe) $\to$ Debe observarse que $-1\le \sin x\le 1$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin x+3}{x-2}\right)=0$ $\to$ Debe observarse que $2\le \sin x+3\le 4$.

c) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\left(\dfrac{x}{\tan x}\right)=\dfrac{\pi/4}{\tan(\pi/4)}=\dfrac{\pi}{4}$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{\tan x}\right)=\left[\dfrac{\infty}{\tan(\infty)}\right]=[?]$ $\to$ Debe observarse que $\lim\limits_{x\to\infty}\tan x$ no existe.

16. Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}3^{1/(x-2)}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}3^{x/(x+2)}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3^x-9}{3^{x+1}}\right)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 2}3^{1/(x-2)}=\left[3^{1/0}\right]$, que no existe. Puede ser de interés hacer los límites laterales.

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 2^-}3^{1/(x-2)}=\left[3^{1/0^-}\right]=\left[3^{-\infty}\right]=0$.

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 2^+}3^{1/(x-2)}=\left[3^{1/0^+}\right]=\left[3^{+\infty}\right]=+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}3^{x/(x+2)}=3^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)}=3^1=3$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3^x-9}{3^{x+1}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3^x}{3^{x+1}}-\dfrac{9}{3^{x+1}}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{9}{3^{x+1}}\right)=\dfrac{1}{3}$.

17. Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-1}{x^2+1}\right)^{\frac{-3x+2}{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right)^{\frac{-3x+2}{x-1}}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-1}{x^2+1}\right)^{\frac{-3x+2}{x}}=\left(\dfrac{2}{2}\right)^{-1}=1$. Obviamente no es indeterminado.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right)^{\frac{-3x+2}{x-1}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{-3x+2}{x-1}\right)}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{(\pm\infty)}=[?]$.

Habría que considerar los límites laterales, cumpliéndose que:

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right)^{\frac{-3x+2}{x-1}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{-3x+2}{x-1}\right)}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{(+\infty)}=0;$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right)^{\frac{-3x+2}{x-1}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{-3x+2}{x-1}\right)}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{(-\infty)}=+\infty.$$

18. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x-1}{(x-2)^2}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2x-3}{x-3}-\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-9}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x-3}-\dfrac{x^3+3}{x^2}\right)$

<u>Solución</u>:

Surgen indeterminaciones del tipo [∞ – ∞]. Para transformarlas se hace la resta inicial.

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x-1}{(x-2)^2}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x(x-2)-(x-1)}{(x-2)^2}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{(x-2)^2}\right)=\left[\dfrac{-1}{0}\right]=\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{2x-3}{x-3}-\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-9}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{(2x-3)(x+3)}{x^2-9}-\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-9}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}\right)=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x-3}-\dfrac{x^3+3}{x^2}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(x^2-1)x^2-(x^3+3)(x-3)}{x^3-3x^2}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-x^2-3x+9}{x^3-3x^2}=3$.

19. Calcula los límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+4}-x\right)$

<u>Solución</u>:

Ambos límites dan lugar a la indeterminación de la forma [∞ – ∞]. Para resolverla se multiplica y divide por la expresión conjugada.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x+2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+2\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+2\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=$ (dividiendo por $\sqrt{x}$) =

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}=\dfrac{2}{1+1}=1$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-3x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-3x}\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-3x}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-x^2+3x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$ (dividiendo por x) = $\dfrac{5}{2}$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+4}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-5x+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2-5x+4}+x\right)}{\sqrt{x^2-5x+4}+x}=$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+4-x^2}{\sqrt{x^2-5x+4}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x+4}{\sqrt{x^2-5x+4}+x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$ = (Ahora puede dividirse por x)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{(-5x+4)}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2-5x+4}+x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5+\dfrac{4}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{5x+4}{x^2}}+1} = -\frac{5}{2}.$$

Asíntotas de una función

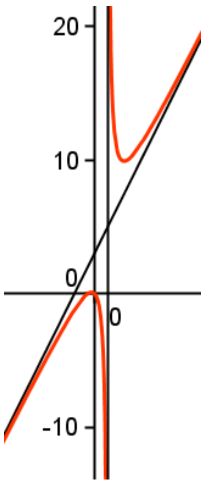
20. Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{2x^2+x}{x-1}$. Indica la posición de la curva respecto de sus asíntotas.

Solución:

La función no está definida en x = 1. En ese punto hay una asíntota vertical, pues:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2+x}{x-1} = \left[\frac{3}{0}\right] = \infty$$

Cuando $x \to 1^-$, $f(x) \to \dfrac{3}{0^-} \to -\infty$. Y cuando $x \to 1^+$, $f(x) \to \dfrac{3}{0^+} \to +\infty$.



Como el grado del numerador es igual al grado del denominado más 1, también tiene una asíntota oblicua.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x}{x^2-x} = 2;$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x)-2x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+x}{x-1}-2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x-1} = 3.$$

La asíntota es la recta $y=2x+3$.

Si se hace la resta "curva menos la asíntota" se tiene:

$$f(x)-y = \frac{2x^2+x}{x-1}-(2x+3) = \frac{3}{x-1}.$$

Cuando $x \to +\infty$, esa diferencia tiende a $0^+ \Rightarrow$ la curva va por encima de la recta.

Cuando $x \to -\infty$, esa diferencia tiende a $0^- \Rightarrow$ la curva va por debajo de la recta.

21. Dada la función $f(x)=\dfrac{2}{x^2-5x+6}$, halla con detalle sus asíntotas; e indica la posición de la curva respecto a ellas.

Solución:

La función no está definida cuando $x^2-5x+6=0$; esto es, si x = 2 o x = 3.

Por tanto, Dom(f) = **R** – {2, 3}.

La función tiene dos asíntotas verticales. Las rectas x = 2 y x = 3, pues:

$$\lim_{x\to 2} \frac{2}{x^2-5x+6} = \left[\frac{2}{0}\right] = \infty \text{ y } \lim_{x\to 3} \frac{2}{x^2-5x+6} = \left[\frac{2}{0}\right] = \infty.$$

También tiene una asíntota horizontal, la recta y = 0, pues $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2-5x+6} = \left[\frac{2}{\infty}\right] = 0$.

Tiene tres asíntotas, las rectas: x = 2; x = 3; y = 0.

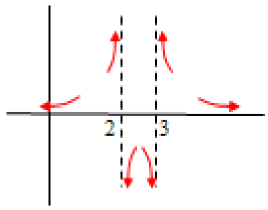
Posición de la curva respecto de las asíntotas.

Si $x \to 2^-$, $f(x) = \dfrac{2}{(x-2)(x-3)} \to \dfrac{2}{0^+} \to +\infty$.

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to \dfrac{2}{0^-} \to -\infty$.

Si $x \to 3^-$, $f(x) = \dfrac{2}{(x-2)(x-3)} \to \dfrac{2}{0^-} \to -\infty$.

Si $x \to 3^+$, $f(x) \to \dfrac{2}{0^+} \to +\infty$.



Tanto hacia –∞ como hacia +∞ la función se acerca al eje *OX* por arriba, pues la función toma valores positivos cuando *x* es grande.

23. Halla las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x}$.

Solución:

La función no está definida en *x* = 0. En ese punto tiene una asíntota vertical, pues:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^2}{x} = 0 \ \Rightarrow \text{la recta } x = 0 \text{ es AV.}$$

También tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador es igual al del denominador más 1. La asíntota oblicua es la recta *y* = *mx* + *n*, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2} = 1;$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)^2}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x}\right) = 2.$$

La recta $y = x + 2$ es asíntota oblicua.

De otra manera. Descomponiendo (dividiendo) la expresión dada:

$f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x} = \dfrac{x^2+2x+1}{x} = x + 2 + \dfrac{1}{x}$ → La asíntota es la recta $y = x + 2$, pues para valores de *x* muy grandes (cuando *x* → +∞) ⇒ $f(x) \to x + 2 + 0^+$, pues el término $\dfrac{1}{x}$ se hace cada vez más pequeño, aunque positivo, lo que indica que la curva va por encima de la asíntota.

De manera análoga, cuando *x* → –∞) ⇒ $f(x) \to x + 2 + 0^-$, lo que indica que la curva va por debajo de la asíntota.

24. Sea $f(x) = \dfrac{4-2x^2}{x}$. Halla su dominio y sus asíntotas.

Solución:

La función dada está definida para todo valor de *x* distinto de 0.

La curva tiene por asíntota vertical la recta *x* = 0, pues $\lim_{x\to 0} \dfrac{4-2x^2}{x} = \infty$.

También tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador es igual al del denominador más 1.

Como $f(x)=\dfrac{4-2x^2}{x}=-2x+\dfrac{4}{x}$, la asíntota oblicua es $y=-2x$.
Nota: También podría obtenerse mediante límites.
La asíntota oblicua es $y = mx + n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-2x^2}{x^2}=-2 \text{ y } n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4-2x^2}{x}+2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}=0.$$

25. ¿Existe algún valor de p para el que la función $f(x)=\dfrac{x^2-p^2}{x^2+3x+2}$ tenga solamente una asíntota vertical?
Solución:
La función puede tener asíntotas verticales en los puntos que anulan el denominador: en las soluciones de $x^2+3x+2=0$, que son $x = -1$ y $x = -2$.
Luego $f(x)=\dfrac{x^2-p^2}{x^2+3x+2}=\dfrac{(x-p)(x+p)}{(x+1)(x+2)}$.

- Si $p = -1$, $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-p^2}{x^2+3x+2}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-1}{x+2}=-2 \Rightarrow$ en $x = -1$ no habría asíntota.

Seguiría habiéndola en $x = -2$, pues $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-p^2}{x^2+3x+2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x-1}{x+2}=\infty$

- Si $p = -2$, habría una asíntota vertical en $x = -1$; pero no en $x = -2$. (El razonamiento es análogo).

También tiene una asíntota horizontal, la recta $y = 1$, pues $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-p^2}{x^2+3x+2}=1$, cualquiera que sea el valor de p.

26. Comprueba que la función $f(x)=2x+\sin x$ no tiene asíntotas.
Solución:
La función está definida para todo **R**. Por tanto, no tiene asíntotas verticales.
Tampoco tiene asíntotas horizontales, pues $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(2x+\sin x)=\pm\infty$.
Veamos si tiene oblicuas: $y = mx + n$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin x}{x}=2;\quad n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}(\sin x)$$, que no existe.

Por tanto, tampoco hay asíntota oblicua.

27. Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^{-x^2}$ b) $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$ c) $f(x)=e^{x^2}$ d) $f(x)=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$

Solución:
a) $f(x)=e^{-x^2}$ tiene una asíntota horizontal hacia $\pm\infty$, pues $\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^{-x^2}=\left[e^{-\infty}\right]=0$. La asíntota es el eje de abscisas.

b) $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$ no está definida en $x = 1$. En este caso conviene considerar los límites laterales, cumpliéndose:

Por la izquierda: $\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = \left[e^{1/0^-}\right] = \left[e^{-\infty}\right] = 0$. Por la izquierda no hay asíntota vertical.

Por la derecha: $\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = \left[e^{1/0^+}\right] = \left[e^{+\infty}\right] = +\infty$. La recta $x = 1$ es asíntota vertical por la derecha.

Además, tiene una asíntota horizontal hacía $\pm\infty$, pues $\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = \left[e^{0}\right] = 1$. La asíntota es la recta $y = 1$. Hacia $-\infty$ la asíntota va por encima de la curva; hacia $+\infty$, la asíntota va por debajo.

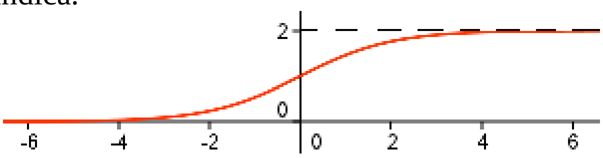
c) $f(x) = e^{x^2}$ no tiene asíntotas verticales, pues está definida en todo **R**. Tampoco tiene asíntotas horizontales ni oblicuas, pues $\lim_{x\to\pm\infty} e^{x^2} = \left[e^{\infty}\right] = \infty$ y $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{x^2}}{x} = \infty$. (Para hacer este segundo límite se necesita aplicar L´Hôpital. Se verá en el Tema 8: problema 54d).

d) La función $f(x) = \frac{2}{1+e^{-x}}$ se conoce con el nombre de función logística. Tiene dos asíntotas horizontales, una hacia $-\infty$ y otra hacia $+\infty$. En efecto:

$\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{1+e^{-x}} = \left[\frac{2}{1+e^{+\infty}}\right] = 0 \Rightarrow$ La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la curva.

$\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{1+e^{-x}} = \left[\frac{2}{1+e^{-\infty}}\right] = \left[\frac{2}{1}\right] = 2 \Rightarrow$ La recta $y = 2$ es también asíntota horizontal.

Su gráfica es la que se indica.



28. Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log(x-3)$ b) $f(x) = \log\frac{1}{x}$ c) $f(x) = \log(x^2-4)$ d) $f(x) = \frac{1}{\log x}$

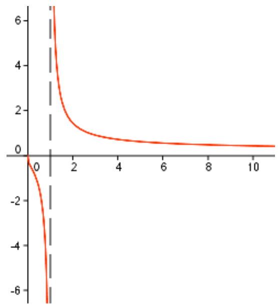
<u>Solución</u>:

a) La función $f(x) = \log(x-3)$ está definida para $x > 3$. Tiene una asíntota vertical en $x = 3$, por la derecha, pues $\lim_{x\to 3^+} \log(x-3) = -\infty$.

b) La función $f(x) = \log\frac{1}{x}$ está definida para $x > 0$. Tiene una asíntota vertical en $x = 0$, por la derecha, pues $\lim_{x\to 0^+} \log\frac{1}{x} = +\infty$. Puede verse que $f(x) = \log\frac{1}{x} = \log 1 - \log x = -\log x$.

c) La función $f(x)=\log\left(x^2-4\right)$ está definida si $x < -2$ o $x > 2$. Tiene dos asíntotas verticales; una a la izquierda de $x = -2$, otra a la derecha de $x = 2$, pues:

$$\lim_{x\to -2^-} \log\left(x^2-4\right)=-\infty \text{ y } \lim_{x\to 2^+} \log\left(x^2-4\right)=-\infty .$$



d) La función $f(x)=\dfrac{1}{\log x}$ está definida para $x > 0$, menos en $x = 1$.

En $x = 1$ tiene una asíntota vertical, pues $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{\log x}=\infty$.

También tiene otra asíntota horizontal hacia $+\infty$, pues $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\log x}=0$.

Continuidad

29. Indica los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones. Justifica la respuesta en cada caso.

a) $f(x)=x^3+8$ b) $f(x)=\dfrac{x}{x^3+8}$ c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-8}$ d) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+8}$

e) $f(x)=\sqrt{x^3-8}$ f) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ g) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ h) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x}}$

i) $f(x)=e^{x-2}$ j) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ k) $f(x)=\log(5x-6)$ l) $f(x)=\log\dfrac{1}{x^2+2}$

m) $f(x)=\tan 2x$ n) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x-1}$ o) $f(x)=\cos(2x-1)$ p) $f(x)=\dfrac{2-\sin x}{2+\cos x}$

Solución:

Las funciones dadas son continuas en todos los puntos de su dominio de definición. Por tanto, en los casos dados, hay que excluir los puntos en los que no están definidas, que son:

a) $f(x)=x^3+8$ es continua en todo **R**. Los polinomios son funciones continuas siempre.

b) $f(x)=\dfrac{x}{x^3+8}$ es continua en **R** – {–2}. Puede observarse que en $x = -2$ se anula el denominador.

Las funciones racionales son continuas siempre, menos en los ceros del denominador.

c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-8}$ es continua en **R** – $\left\{-\sqrt{8},\sqrt{8}\right\}$.

d) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+8}$ es continua en todo **R**, pues está definida siempre.

e) $f(x)=\sqrt{x^3-8}$ es continua para todo $x \geq 2$. Estas funciones están definidas cuando el radicando no es negativo.

f) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ es continua en todo **R**, pues está definida siempre.

g) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ es continua en todo **R**, pues está definida siempre.

h) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x}}$ es continua cuando $x^2-2x>0$; esto es cuando $x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$.

i) $f(x)=e^{x-2}$ es continua en todo **R**, pues está definida siempre.

j) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ es continua en **R** – {0}.

k) $f(x)=\log(5x-6)$ es continua para todo $x > 6/5$. Para valores de $x \le 6/5$ la función no está definida.

l) $f(x)=\log\dfrac{1}{x^2+2}$ es continua en todo **R**, pues está definida siempre.

m) $f(x)=\tan 2x$ es continua para todo $x\neq\dfrac{\pi}{4}+k\cdot\dfrac{\pi}{2}$. Recuérdese que la tangente, tan α, no está definida cuando $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+k\cdot\pi$. En este caso, $2x=\dfrac{\pi}{2}+k\cdot\pi \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\cdot\dfrac{\pi}{2}$.

n) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x-1}$ es continua en **R** – {1}.

o) $f(x)=\cos(2x-1)$ es continua en todo **R**, pues está definida siempre.

p) $f(x)=\dfrac{2-\sin x}{2+\cos x}$ es continua en todo **R**, pues está definida siempre.

30. Indica los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones. Justifica la respuesta en cada caso.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x\le 1\\ x-1, & \text{si } x>1\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & \text{si } x\le 1\\ x-1, & \text{si } x>1\end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & \text{si } x\le 0\\ x+1, & \text{si } x>0\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & \text{si } x\le 0\\ \sin x, & \text{si } x>0\end{cases}$ e) $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, & \text{si } x\le 1\\ \dfrac{-1}{x-2}, & \text{si } x>1\end{cases}$ f) $f(x)=\begin{cases} 1-x, & \text{si } x\le 1\\ \ln(2-x) & \text{si } x>1\end{cases}$

Solución:

Las funciones definidas a trozos son continuas cuando lo son en cada intervalo y, además, sus límites laterales son iguales en los puntos de división del dominio.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x\le 1\\ x-1, & \text{si } x>1\end{cases}$ $\to$ Cada función es continua en su intervalo de definición respectivo; pero es discontinua en $x = 1$, pues en ese punto los límites laterales no son iguales:

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1$. Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$.

b) $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & \text{si } x\le 1\\ x-1, & \text{si } x>1\end{cases}$ $\to$ En este caso, la función es continua en todo **R**, pues en $x = 1$ los límites laterales coinciden.
Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(1-x^2\right)=0$. Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x-1\right)=0$.

c) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{si } x\le 0\\ x+1, & \text{si } x>0\end{cases}$ $\to$ La función está definida en todo **R**. La única dificultad para su continuidad se da en $x = 0$.
Como los límites laterales coinciden, la función también es continua en $x = 0$.
En efecto:
Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\cos x=1$. Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+1\right)=1$.

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & \text{si } x\le 0\\ \sin x, & \text{si } x>0\end{cases}$ $\to$ La función está definida en todo **R**. La función $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ es discontinua en $x = 1$, pero ese punto está en el segundo "trozo".
En $x = 0$, los límites laterales valen:
Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x-1}=-1$. Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x=0$.
Como no coinciden, la función no es continua en $x = 0$.

e) $f(x)=\begin{cases}e^{x-1}, & \text{si } x\le 1\\ \dfrac{-1}{x-2}, & \text{si } x>1\end{cases}$ $\to$ La función no está definida en $x = 2$. Por tanto, en ese punto es discontinua.
El otro punto conflictivo es $x = 1$. Hay que estudiar los límites laterales.
Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} e^{x-1}=e^0=1$. Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-1}{x-2}=1$.
Como son iguales, la función es continua en $x = 1$.

f) $f(x)=\begin{cases}1-x, & \text{si } x\le 1\\ \ln(2-x) & \text{si } x>1\end{cases}$ $\to$ La función no está definida para $x \geq 2$. Por tanto, sólo puede ser continua si $x < 2$. Por otra parte, en $x = 1$ puede presentar dificultad: hay que estudiar los límites laterales en ese punto.
Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(1-x\right)=0$.
Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\ln\left(2-x\right)=\ln 1=0$.
Como son iguales, la función es continua en $x = 1$.

31. Estudia la continuidad de función $f(x)=\dfrac{x^5-x^8}{1-x^6}$. ¿Si tuviese alguna discontinuidad evitable cómo podría evitarse?
<u>Solución</u>:
La función es discontinua cuando $1-x^6=0 \Rightarrow x=-1$ o $x = 1$.

La discontinuidad puede evitarse si existe el límite.

En $x = -1$, como $\lim_{x\to -1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{-2}{0}\right] = \infty$, la discontinuidad no puede evitarse (es de salto infinito). La función tiene una asíntota vertical: $x = -1$.

En $x = 1$, como $\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{x^5(1-x^3)}{(1+x^3)(1-x^3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^5}{(1+x^3)} = \frac{1}{2}$. Por tanto, en $x = 1$, la discontinuidad puede evitarse definiendo $f(1) = \frac{1}{2}$.

32. Determina el tipo de discontinuidades que presenta la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 7x - 8}$.

Solución:

Es discontinua en los ceros del denominador: $x^2 + 7x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49+32}}{2} = \begin{cases} -8 \\ 1 \end{cases}$.

En $x = 1$ la discontinuidad es evitable, pues existe el límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 7x - 8} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+8)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x+8} = \frac{2}{9}$$

En $x = -8$ la discontinuidad es inevitable, pues no existe el límite:

$$\lim_{x\to -8} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 7x - 8} = \left[\frac{63}{0}\right] = \infty$$

33. Dependiendo de los valores de p, ¿tiene la función $f(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - px + 1}$ alguna discontinuidad? Si la tuviese, ¿podría evitarse en algún caso?

Solución:

Es discontinua en los ceros del denominador: $x^2 - px + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4}}{2}$.

Por tanto, si $p > 2$ o $p < -2$, la función tiene dos discontinuidades; si $p = \pm 2$, tiene una discontinuidad; en caso contrario es continua para todo x.

Para $p = 2$, la función es: $f(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 1}$, que es discontinua en $x = 1$.

Como $\lim_{x\to 1} \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{x-1} = \infty$, la discontinuidad no puede evitarse.

En los demás casos (cuando $p > 2$ o $p \le -2$) la discontinuidad no puede evitarse, pues en todos ellos el límite en $x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4}}{2}$ se hace infinito.

34. La función $f(x)=\dfrac{x^2+kx+4}{x^2-4}$ es discontinua en los puntos x = –2 y x = 2. ¿Podría evitarse alguna discontinuidad para algún valor de k?
Solución:
La función no está definida cuando x = ±2; en esos puntos se anula el denominador. Pero si el numerador de la función fuese 0 es posible que la discontinuidad pueda evitarse en algún caso. Para ello es necesario que los valores x = –2 o x = 2 sean raíz del numerador.

- El valor x = –2 es raíz de x^2+kx+4 si $4-2k+4=0 \Rightarrow k=4$.

En este caso, $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)^2}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x-2}=0$. Por tanto, la discontinuidad puede evitarse en x = –2. (No se puede evitar en x = 2).

- El valor x = 2 es raíz de x^2+kx+4 si $4+2k+4=0 \Rightarrow k=-4$.

En este caso, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x+2}=0$. La discontinuidad puede evitarse en x = 2. (No puede evitarse en x = –2).

35. ¿Para qué valores de a es continua en x = 1 la función $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{si } x\le 1 \\ 2x+a, & \text{si } x>1\end{cases}$?

Solución:
En el punto x = 1 deben ser iguales los límites laterales.
Por la izquierda:
$$\underset{x\to 1^-}{lím}\ f(x)=\underset{x\to a^-}{lím}\ x^2=1.$$
Por la derecha:
$$\underset{x\to 1^+}{lím}\ f(x)=\underset{x\to 1^+}{lím}(2x+a)=2+a.$$
Como deben ser iguales: $1=2+a \Rightarrow a=-1$.

36. Determina los valores de a y b que hacen que la función $f(x)=\begin{cases} \sin x-a & x<-\pi \\ \cos x+b & -\pi\le x<0 \\ e^x-1 & x\ge 0\end{cases}$ sea continua en todo **R**.
Solución:
Hay que estudiar los límites laterales en los puntos x = –π y x = 0. En cada caso esos límites deben ser iguales.

- En x = π:

Por la izquierda:
$$\underset{x\to \pi^-}{lím}\ f(x)=\underset{x\to \pi^-}{lím}(\sin x-a)=\sin\pi-a=-a.$$
Por la derecha:
$$\underset{x\to \pi^+}{lím}\ f(x)=\underset{x\to \pi^+}{lím}(\cos x+b)=\cos\pi+b=-1+b.$$
Como deben ser iguales: $-a=-1+b \Rightarrow a=1-b$.

- En x = 0:

Por la izquierda:
$$\underset{x\to 0^-}{lím}\ f(x)=\underset{x\to 0^-}{lím}(\cos x+b)=\cos 0+b=1+b.$$
Por la derecha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(e^x - 1\right) = e^0 - 1 = 0.$$

Como deben ser iguales: $1 + b = 0 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = 2$.

Luego, la función continua es: $f(x) = \begin{cases} \sin x - 2 & x < -\pi \\ \cos x - 1 & -\pi \le x < 0 \\ e^x - 1 & x \ge 0 \end{cases}$.

37. Determina la continuidad de las funciones:

a) $f(x) = |x-1|$ b) $f(x) = |x^2 - 2x|$

Solución:

Ambas funciones pueden definirse a trozos.

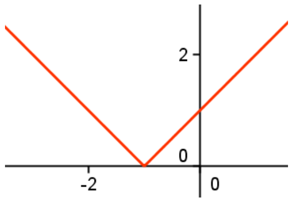
a) $f(x) = |x+1| = \begin{cases} -(x+1), & \text{si } x < -1 \\ x+1, & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$ → El único punto conflictivo es $x = -1$.

Se estudian los límites laterales en $x = -1$.

Como $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}\left(-(x+1)\right) = 0$, y $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(x+1) = 0$,

se deduce que la función es continua en $x = -1$.

Su gráfica es la adjunta.

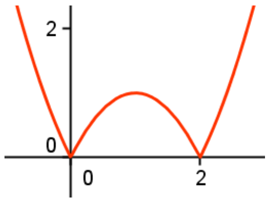


b) $f(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{si } x \le 0 \\ -x^2 + 2x, & \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2 - 2x, & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$. Hay que estudiar lo que pasa en $x = 0$ y $x = 2$.

En ambos casos coinciden los límites laterales y, en consecuencia, la función es continua en todo **R**. En efecto:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x^2 - 2x\right) = 0 \text{ y } \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(-x^2 + 2x\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(-x^2 + 2x\right) = 0 \text{ y } \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(x^2 - 2x\right) = 0$$



Teorema de Bolzano

38. Enuncia el teorema de Bolzano. Aplicando dicho teorema comprueba que la función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 1$ corta al eje OX en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución:

El teorema de Bolzano dice: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Aplicando el teorema de Bolzano a la función continua $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ se observa:

- Para $x = -1$, $f(-1) = -7 < 0$.
- Para $x = 1$, $f(1) = -1 < 0$. En consecuencia, no puede concluirse que la función corte al eje OX entre -1 y 1.

No obstante, como se indica que se compruebe que corta, puede probarse con algún otro punto del intervalo; por ejemplo, con $x = 0$, observándose que $f(0) = 1 > 0$.

Por tanto, se tiene:

- En el intervalo $[-1, 0]$: $f(-1) = -7 < 0$; $f(0) = 1 > 0$.

Como la función toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo [–1, 0], se deduce que se anula en algún punto $c \in$ (–1, 0). Ese es el punto de corte.

- En el intervalo [0, 1]: $f(0) = 1 > 0$; $f(1) = -1$. En consecuencia, la función vuelve a cortar al eje *OX* en algún punto del intervalo [0, 1].

Luego se concluye que la función corta dos veces al eje *OX* entre –1 y 1.

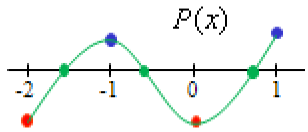
39. Comprueba que la ecuación $e^{-x} + 2x - 1 = 0$ tiene una raíz en el intervalo [–2, –1]. Calcula un valor de esa raíz con una aproximación del orden de las centésimas.
Solución:
La función $f(x) = e^{-x} + 2x - 1$ es continua y, además, cumple que:

$f(-2) = e^2 - 5 = 2{,}389\ldots > 0$ y $f(-1) = e - 3 = -0{,}28\ldots < 0$.

Entonces, por el teorema de Bolzano, existe un punto $c \in$ (–2, –1) tal que $f(c) = 0$. Este valor *c* es la raíz de $e^{-x} + 2x - 1 = 0$ en el intervalo [–2, –1].
Cálculo de la raíz:
En $x = -1{,}5$, $f(-1{,}5) = e^{1{,}5} - 4 = 0{,}48\ldots \Rightarrow$ La raíz está entre –1,5 y –1.
En $x = -1{,}3$, $f(-1{,}3) = e^{1{,}3} - 3{,}6 = 0{,}069\ldots \Rightarrow$ La raíz está entre –1,3 y –1.
En $x = -1{,}2$, $f(-1{,}2) = e^{1{,}2} - 3{,}4 = -0{,}07988\ldots \Rightarrow$ La raíz está entre –1,3 y –1,2.
En $x = -1{,}25$, $f(-1{,}25) = e^{1{,}25} - 3{,}5 = -0{,}009657\ldots$ (Valor muy próximo a 0).
El valor aproximado para *c* puede ser $x = -1{,}25$.

40. Comprueba que el polinomio $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 0{,}2$ tiene dos raíces negativas y otra positiva. Da una solución aproximada de la raíz positiva
Solución:
La función es continua en todo **R**. Por tanto puede aplicarse el teorema de Bolzano.
Se cumple que:

$P(-2) < 0$; $P(-1) > 0$; $P(0) < 0$; $P(1) > 0$



Esquemáticamente se comportaría como se indica en la figura.
Por tanto, entre –2 y –1 hay una raíz (negativa); entre –1 y 0 hay otra raíz (negativa); entre 0 y 1 hay una tercera raíz (positiva).
Cálculo de la raíz positiva, que está entre 0 y 1, pues $P(0) = -0{,}2 < 0$ y $P(1) = 4{,}8 > 0$.
La raíz debe estar próxima a 0; se prueba con $x = 0{,}1 \to P(0{,}1) = -0{,}168\ldots \Rightarrow$ La raíz está entre 0,1 y 1.
En $x = 0{,}2$, $P(0{,}2) = -0{,}064\ldots \Rightarrow$ La raíz está entre 0,2 y 1, pero muy cerca de 0,2.
En $x = 0{,}25$, $P(0{,}25) = 0{,}01875\ldots \Rightarrow$ La raíz está entre 0,2 y 0,25.
En $x = 0{,}23$, $P(0{,}23) = -0{,}0169\ldots \Rightarrow$ La raíz está entre 0,23 y 0,25.
En $x = 0{,}24$, $P(0{,}24) = 0{,}000448\ldots$ Como el valor está muy próximo a 0, el valor aproximado para *c* puede ser $x = 0{,}24$.

41. Determina los valores que puede toma *p* para que la función $f(x) = 2x^3 + px^2 - 3$ corte al eje de abscisas como se indica:
a) Una vez en el intervalo [–1, 0].
b) Una vez en el intervalo [0, 1].
c) Dos veces en el intervalo [–1, 1].
Solución:
A la función puede aplicársele Bolzano.

a) $f(-1) = -5 + p$; $f(0) = -3$.
Para que esos valores tengan distinto signo es necesario que $-5 + p > 0 \Rightarrow p > 5$.
Luego, la función corta una vez en el intervalo [–1, 0] si $p > 5$.

b) $f(1) = -1 + p$; $f(0) = -3$.
Para que esos valores tengan distinto signo es necesario que $-1 + p > 0 \Rightarrow p > 1$.
Luego, la función corta una vez en el intervalo [0, 1] si $p > 1$.

c) $f(-1) = -5 + p$; $f(0) = -3$; $f(1) = -1 + p$.
Para que esos valores tengan, sucesivamente, distinto signo es necesario que $-5 + p > 0$ y que $-1 + p > 0$. Por tanto, $p > 5$.
En ese caso la función corta una vez en el intervalo [–1, 0] y otra en el intervalo [0, 1].

42. Halla el valor de p para que la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + p$ tome con seguridad el valor $\sqrt{2}$ en algún punto del intervalo [1, 2].
<u>Solución</u>:
Esta función es continua siempre; en particular en el intervalo [1, 2]; además:
$f(1) = -2 + p$ y $f(2) = -4 + p$
Por el teorema de los valores intermedios, la función toma todos los valores comprendidos entre –2 + p y –4 + p.
Para que $-4 + p \le \sqrt{2} \le -2 + p$ debe cumplirse que $2 + \sqrt{2} \le p \le 4 + \sqrt{2}$.

43. ¿Para qué valores del parámetro a puede asegurarse que la función $f(x) = x^3 - ax^2 + x + 1$ corta dos veces al eje OX, en el intervalo [–1, 1]?
<u>Solución</u>:
La función es continua en todo **R**. Por tanto cumple el teorema de Bolzano. Además, es conveniente observar que en $x = 0$, la función vale 1: $f(0) = 1$.
Luego, se tiene:
$f(-1) = -1 - a$, $f(0) = 1$, $f(1) = 3 - a$.
→ $f(-1) = -1 - a > 0$ si $a < -1$ y $f(-1) = -1 - a < 0$ si $a > -1$.
→ $f(1) = 3 - a > 0$ si $a < 3$ y $f(1) = 3 - a < 0$ si $a > 3$
En consecuencia:
- Si $a < -1 \Rightarrow f(-1) > 0$, $f(0) > 0$, $f(1) > 0$ → No puede asegurase el corte entre –1 y 0; pero sí entre 0 y 1.
- Si $-1 < a < 3 \Rightarrow f(-1) < 0$, $f(0) > 0$, $f(1) > 0$ → Puede asegurase el corte entre –1 y 0; pero no entre 0 y 1.
- Si $a > 3 \Rightarrow f(-1) < 0$, $f(0) > 0$, $f(1) < 0$. Seguro que corta dos veces: una vez entre –1 y 0 y otra entre 0 y 1.

44. ¿Puede aplicarse el teorema de Bolzano a la función $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$ en el intervalo [0, π]?

Solución:

La función toma signos distintos en los extremos del intervalo: $f(0)=\dfrac{1}{\cos 0}=1$;

$f(\pi)=\dfrac{1}{\cos\pi}=-1\ldots$ Pero no es continua en dicho intervalo. Por tanto, no puede aplicarse el teorema.

45. ¿Puede aplicarse el teorema de Bolzano a la función $f(x)=\sin 2x+\cos 3x$ en el intervalo [0, π]? Encuentra, si existe, un punto de [0, π] en el cual se anule esta función.

Solución:

La función $f(x)=\sin 2x+\cos 3x$ es continua en todo **R.** Además: $f(0)=\sin 0+\cos 0=1$ y $f(\pi)=\sin 2\pi+\cos 3\pi=-1$.

Luego verifica las hipótesis del teorema de Bolzano.

Por tanto, existe un punto perteneciente al intervalo [0, π] tal que $f(x)=\sin 2x+\cos 3x=0$.

Observaciones:

1) A ojo, se ve que una solución de esa ecuación trigonométrica es $x = \pi/2$.

2) Aunque resulte más complicado también puede resolverse la ecuación trigonométrica.

$$\sin 2x+\cos 3x=0 \Rightarrow \sin 2x+\cos(2x+x)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\sin 2x}+\cos 2x\cos x-\underline{\sin 2x}\sin x=0 \quad (*)$$

Sacando factor común y aplicando la fórmula de sin 2x y cos 2x:

$$(*) \Rightarrow \underline{2\sin x\cos x}(1-\sin x)+\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\cos x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sin x\underline{\cos x}(1-\sin x)+\left(1-\sin^2 x-\sin^2 x\right)\underline{\cos x}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\cos x}\left(2\sin x-2\sin^2 x+1-2\sin^2 x\right)=0 \Rightarrow \cos x\left(-4\sin^2 x+2\sin x+1\right)=0$$

La última ecuación tiene, al menos, la solución $\cos x=0$, que en el intervalo considerado es $x = \pi/2$.

46. Aplicando el teorema de Bolzano halla un intervalo en el que las siguientes funciones corten al eje de abscisas:

a) $f(x)=-x^3+6$ b) $g(x)=x^4-x-4$ c) $h(x)=e^{x-2}-3x$

Solución:

Las tres funciones dadas son continuas en todo **R**.

a) Como $f(0)=6$ y $f(2)=-2$ $\Rightarrow$ La función corta al eje en el intervalo [0, 2]. (También vale en el intervalo [1, 2]).

b) Como $g(0)=-4$ y $g(2)=10$ $\Rightarrow$ La función corta al eje en el intervalo [0, 2]. (También vale en el intervalo [1, 2]).

c) Como $h(0)=e^{-2}>0$ y $h(2)=-5<0$ $\Rightarrow$ La función corta al eje en el intervalo [0, 2]. (También vale en el intervalo [2, 5]).

47. ¿Por qué no se puede aplicar el teorema de Bolzano, en el intervalo [–1, 1], a las siguientes funciones?

a) $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+1}$ b) $h(x)=\dfrac{1}{\tan x}$ c) $g(x)=\dfrac{x}{1-e^x}$ d) $i(x)=\dfrac{x-1}{1+2\sin x}$

Solución:
Ninguna de las funciones es continua en el intervalo [–1, 1].
a) Es discontinua en $x = –1/2$. No obstante, podría aplicarse en el intervalo [0, 1].
b) Discontinua en $x = 0$.
c) Discontinua en $x = 0$.
d) Discontinua en $x = –\pi/6$.

48. Comprueba que la ecuación $x = x\sin x + \cos x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[-\pi, \pi]$.
Solución:
La función $f(x) = x\sin x + \cos x - x$ es continua en $[-\pi, \pi]$.
Además: $f(-\pi) = -1+\pi > 0$ y $f(\pi) = -1-\pi < 0$
Por tanto, aplicando el teorema de Bolzano se deduce que existe un punto $c\in(-\pi, \pi)$ tal que $f(c) = 0$.
Ese valor de c será la raíz de la ecuación $x = x\sin x + \cos x$, pues cumple que $f(c) = c\sin c + \cos c - c = 0 \Leftrightarrow c = c\sin c + \cos c$.

49. Demuestra que la función $f(x) = e^x + 2\cos x$ corta infinitas veces al eje OX. Da dos intervalos distintos en los que pueda asegurarse que la gráfica de f corta al eje OX.
Solución:
Las funciones $g(x) = e^x$ y $h(x) = 2\cos x$ son continuas en toda la recta real. Además:
1) La función $g(x) = e^x$ toma valores menores que 1 para todo $x < 0$: $e^x < 1$ si $x < 0$.
2) La función $h(x) = 2\cos x$ toma valores comprendidos entre –2 y 2 en cada intervalo de la forma $[k\pi, (k+1)\pi]$; en concreto en los intervalos $[–\pi, 0]$, $[–2\pi, –\pi]$, $[–3\pi, –2\pi]$…
Por tanto, en cada uno de esos intervalos la función $f(x) = e^x + 2\cos x$ toma valores positivos y negativos y, en consecuencia, corta al eje OX.
Por ejemplo:
En $[–\pi, 0]$: $f(-\pi) = e^{-\pi} + 2\cos(-\pi) = e^{-\pi} - 2 < 0$; $f(0) = e^0 + 2\cos 0 = 1+2 > 0$.
En $[–2\pi, –\pi]$: $f(-2\pi) = e^{-2\pi} + 2\cos(-2\pi) = e^{-2\pi} + 2 > 0$; $f(-\pi) = e^{-\pi} + 2\cos(-\pi) = e^{-\pi} - 2 < 0$
Luego $f(x) = e^x + 2\cos x$ corta infinitas veces al eje OX. Al menos una vez en cada intervalo $[-(k+1)\pi, -k\pi]$ con k entero positivo.

50. Demuestra que la función $f(x) = e^{-x} - \sin x$ corta al eje OX en algún punto del intervalo $(\pi/2, \pi)$.
Solución:
Es una cuestión similar al problema anterior. La función es continua en todo **R**; por tanto cumple el teorema de Bolzano desde $-\infty$ hasta $+\infty$.
Como $f(\pi/2) = e^{-\pi/2} - \sin\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{e^{\pi/2}} - 1 < 0$ y $f(\pi) = e^{-\pi} - \sin\pi = \dfrac{1}{e^{\pi}} > 0 \Rightarrow$ la función se anula en algún entre $\pi/2$ y π. Ese será el punto de corte.

51. (Propuesto en EBAU 2018, Navarra)

Demuestra que existe α ∈ (2, 3) tal que $f(\alpha) = -\dfrac{3}{2}$, siendo $f(x) = \cos(\pi x)\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 - 1}$.

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Solución:

La función dada es continua en el intervalo [2, 3] (lo es en todo **R**). Por tanto cumple el teorema de los valores intermedios: "Si $f(x)$ es continua en [*a*, *b*], entonces la función toma todos los valores comprendidos (intermedios) entre $f(a)$ y $f(b)$. Esto es, para cualquier valor *c*, $f(a) \leq c \leq f(b)$, existe un punto α ∈ [*a*, *b*], tal que $f(\alpha) = c$".

Como:

$$f(2) = \cos(2\pi)\sqrt[3]{2^3 - 2\cdot 2^2 - 1} = 1\cdot\sqrt[3]{-1} = -1 \text{ y } f(3) = \cos(3\pi)\sqrt[3]{3^3 - 2\cdot 3^2 - 1} = -1\cdot\sqrt[3]{8} = -2,$$

entonces, la función toma todos los valores comprendidos entre −2 y −1.

Ya que $-2 \leq -\dfrac{3}{2} \leq -1 \Rightarrow$ existe α ∈ (2, 3) tal que $f(\alpha) = -\dfrac{3}{2}$.

52. (Propuesto en PAU 20127, Castilla y León)

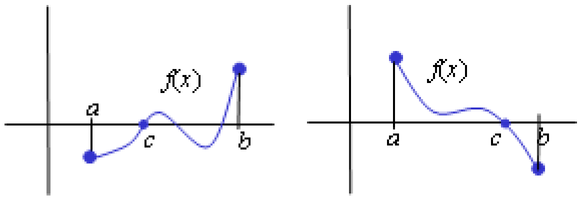
a) Enunciar el teorema de Bolzano e interpretarlo geométricamente.

b) Encontrar un intervalo en el que $P(x) = x^6 + x^4 - 1$ tenga al menos una raíz.

Solución:

a) El teorema de Bolzano asegura que si una función continua en un intervalo cerrado toma signos distintos en sus extremos, entonces corta al eje en algún punto de ese intervalo. Dice así: "Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado [*a*, *b*] y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$), entonces existe algún punto *c* ∈ (*a*, *b*) tal que $f(c) = 0$".

Geométricamente, esto significa que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ corta al eje *OX* en un punto *c* entre *a* y *b*. (Análogamente si $f(a) > 0$ y *f*(*b*) <0.)



b) Desde el punto de vista algebraico, este teorema asegura que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución, una raíz, entre *a* y *b*.

En este caso, para $P(x) = x^6 + x^4 - 1$, como $P(0) = -1$ y $P(1) = 1$, el polinomio tendrá una raíz en el intervalo (0, 1).