TEMA 4. Vectores en el espacio
Problemas Resueltos

Vectores

1. Para $\vec{a}$ = (1, –2, 3) y $\vec{b}$ = (3, –1, 4), halla:

a) $\vec{a}+\vec{b}$ b) $2\vec{a}-\vec{b}$ c) $-\vec{a}+3\vec{b}$ d) $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$

Solución:

a) $\vec{a}+\vec{b}$ = (1, –2, 3) + (3, –1, 4) = (4, –3, 7).

b) $2\vec{a}-\vec{b}$ = 2 · (1, –2, 3) – (3, –1, 4) = (2 – 3, –4 + 1, 6 – 4) = (–1, –3, 2).

c) $-\vec{a}+3\vec{b}$ = – (1, –2, 3) + 3 · (3, –1, 4) = (–1 + 9, 2 – 3, –3 + 12) = (8, –1, 9).

d) $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b} = \lambda(1,-2,3)+\mu(3,-1,4)=(\lambda+3\mu,-2\lambda-\mu,3\lambda+4\mu)$.

2. a) A partir de la definición de dependencia lineal de vectores, demuestra que los vectores {(1, 0, –1), (0, 1, 2), (1, –1, 1)} son linealmente independientes.

b) Expresa el vector $\vec{v}$ = (3, –2, 3) en función de los vectores anteriores.

Solución:

Debe comprobarse que la relación $\lambda_1(1, 0, -1) + \lambda_2(0, 1, 2) + \lambda_3(1, -1, 1) = (0, 0, 0)$ sólo se cumple cuando $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 0$.

En efecto:

$$\lambda_1(1, 0, -1) + \lambda_2(0, 1, 2) + \lambda_3(1, -1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3, -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \quad + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{(Por Gauss)} \quad \begin{matrix} \\ \\ E3+E1 \end{matrix}\begin{cases} \lambda_1 \quad + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-2E2 \end{matrix}\begin{cases} \lambda_1 \quad + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Cuya única solución es $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 0$.

b) Como los vectores anteriores son linealmente independientes constituyen una base de $\mathbf{R}^3$; en consecuencia, cualquier vector depende linealmente de ellos.

En este caso, hay que encontrar los valores de λ_1, λ_2 y λ_3 tales que:

$$(3, -2, 3) = \lambda_1(1, 0, -1) + \lambda_2(0, 1, 2) + \lambda_3(1, -1, 1)$$

Esto es: $\begin{cases} \lambda_1 \quad + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = -2 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3+E1 \end{matrix}\begin{cases} \lambda_1 \quad + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = -2 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-2E2 \end{matrix}\begin{cases} \lambda_1 \quad + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = -2 \\ 4\lambda_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow \lambda_3 = 5/2,\ \lambda_2 = 1/2 \text{ y } \lambda_1 = 1/2.$$

Luego, $(3,-2,3)=\frac{1}{2}\cdot(1,0,-1)+\frac{1}{2}\cdot(0,1,2)+\frac{5}{2}\cdot(1,-1,1)$.

3. Dados los puntos $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(0, 0, -1)$ y $D(-1, 1, 1)$, halla los vectores ***AB***, ***BC*** y ***CD***. Comprueba si son linealmente dependientes o no. Da una interpretación geométrica del hecho.

Solución:

Los vectores ***AB***, ***BC*** y ***CD*** son:

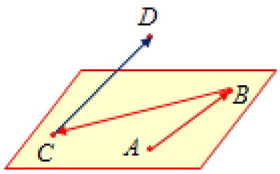
AB = (2, 1, 0) – (1, 0, –1) = (1, 1, 1);

BC = (0, 0, –1) – (2, 1, 0) = (–2, –1, –1);

CD = (–1, 1, 1) – (0, 0, –1) = (–1, 1, 2).

Para ver si son linealmente independientes se hace el determinante,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1+5-3 \neq 0 .$$



Al ser distinto de 0, los vectores son linealmente independientes. Eso significa que no hay ningún plano que contenga a los cuatro puntos, que los vectores no son coplanarios.

4. Para los vectores ***AB***, ***BC*** y ***CD***, del ejercicio anterior, halla:

a) El módulo de cada uno de ellos.

b) El producto escalar ***AB*** · ***BC***.

c) El ángulo que forman ***AB*** y ***BC***.

Solución:

a) ***AB*** = (1, 1, 1) $\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$.

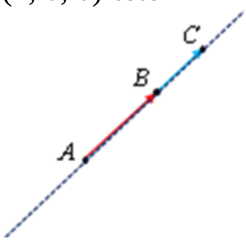
BC = (–2, –1, –1) $\Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{6}$.

CD = (–1, 1, 2) $\Rightarrow \left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{(-1)^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$.

b) ***AB*** · ***BC*** = (1, 1, 1) · (–2, –1, –1) = –2 – 1 – 1 = –4.

c) $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \dfrac{-4}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{-4}{3\cdot\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ ángulo(***AB*** · ***BC***) = 160,53º.

5. Calcula los valores de a y b para que los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(a, 2, b)$ y $C(1, 0, 0)$ estén alineados.



Solución:

Los puntos A, B y C están alineados cuando los vectores ***AB*** y ***AC*** son proporcionales. Esto es, cuando ***AB*** = k · ***AC***

Como ***AB*** = $(a, 2, b) - (1, 1, 1) = (a - 1, 1, b - 1)$, y

AC = (1, 0, 0) – (1, 1, 1) = (0, –1, –1), debe cumplirse que:

$$(a-1, 1, b-1) = k\cdot(0, -1, -1) = (0, -k, -k) \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ 1=-k \\ b-1=-k \end{cases} \Rightarrow k=-1;\ a=1;\ b=2.$$

6. Estudia la dependencia o independencia lineal de los vectores

$\vec{u}$ = (2, 0, 9), $\vec{v}$ = (3, –1, 2), $\vec{w}$ = (5, –1, 4)

Solución:

Los vectores serán linealmente independientes si su determinante asociado es distinto de cero; en caso contrario serán linealmente dependientes.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$, los vectores dados son linealmente independientes.

7. a) Estudia, en función del valor del parámetro a, la dependencia e independencia lineal de los vectores $\vec{v}_1$ = (a, –a, 1), $\vec{v}_2$ = (2a, 1, 1) y $\vec{v}_3$ = (1, –1, –1).

b) Cuando sean linealmente dependientes, escribe $\vec{v}_3$ como combinación lineal de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

Solución:

a) Como $\begin{vmatrix} a & -a & 1 \\ 2a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2a^2 - 3a - 1 = 0 \Rightarrow a = -1$ o $a = -1/2$.

Por tanto:

Si a = –1 o a = –1/2 los vectores son linealmente dependientes → El determinante vale 0.

Si $a \neq -1$ y $a \neq -1/2$ los vectores son linealmente independientes.

b) Para a = –1, los vectores son: $\vec{v}_1$ = (–1, 1, 1), $\vec{v}_2$ = (–2, 1, 1) y $\vec{v}_3$ = (1, –1, –1).

Luego: $\vec{v}_3 = -\vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 = -\vec{v}_1$.

Para a = –1/2, los vectores son: $\vec{v}_1$ = (–1/2, 1/2, 1), $\vec{v}_2$ = (–1, 1, 1) y $\vec{v}_3$ = (1, –1, –1).

Luego: $\vec{v}_3 = 0 \cdot \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -\vec{v}_2$.

8. Halla la relación que debe existir entre a y b para que los puntos de coordenadas A(1, 0, 0), B(a, b, 0), C(a, 0, b) y D(0, a, b) estén en un plano.

Solución:

Cuatro puntos pertenecen a un mismo plano cuando tres de los vectores que determinan son linealmente dependientes.

Si A(1, 0, 0), B(a, b, 0), C(a, 0, b) y D(0, a, b), los vectores ***AB***, ***AC*** y ***AD*** son:

AB = (a, b, 0) – (1, 0, 0) = (a – 1, b, 0);
AC = (a, 0, b) – (1, 0, 0) = (a – 1, 0, b);
AD = (0, a, b) – (1, 0, 0) = (–1, a, b).

Serán linealmente dependientes si $\begin{vmatrix} a-1 & b & 0 \\ a-1 & 0 & b \\ -1 & a & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(a-1)ab - b[(a-1)b + b] = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -a^2b + ab - b^2a = 0 \Leftrightarrow ab(a + b - 1) = 0$

Las soluciones de esta ecuación son: a = 0, b = 0 o $a + b = 1$.

Por tanto, los cuatro puntos dados estarán en un plano cuando a = 0, b = 0 o $a + b = 1$.

Si a = 0 los puntos son: (1, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, b) y (0, 0, b); los dos últimos coinciden.

Si b = 0 los puntos son: (1, 0, 0), (a, 0, 0), (a, 0, 0) y (0, a, 0); coinciden otros dos.

Luego, para que los cuatro puntos sean distintos y estén en el mismo plano es necesario que $a + b = 1$, con a y b distintos de 0.

Aplicaciones del producto escalar, vectorial y mixto

9. a) Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ = (2, 1, 1) y $\vec{v}$ = (–1, 1, 1).
b) ¿Cuánto debe valer *a* para que los vectores $\vec{u}$ = (2, *a*, 1) y $\vec{v}$ = (–1, *a*, 1) sean perpendiculares.
Solución:
a) El coseno del ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ viene dado por:

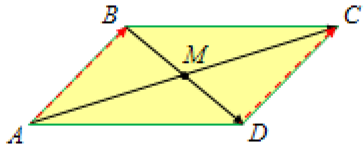
$$\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{(2,1,1)\cdot(-1,1,1)}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}=\frac{0}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}=0$$

Los vectores son perpendiculares.

b) Su producto escalar deber ser 0: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
Luego,

$$(2, a, 1)\cdot(-1, a, 1)=0\Rightarrow -2+a^2+1=0\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm1$$

10. Dados los puntos *A*(1, 0, –1), *B*(2, 1, 0) y *C*(0, 0, –1), determina otro punto *D* de manera que *ABCD* sean vértices consecutivos de un paralelogramo. Determina el punto de corte de sus diagonales y el área de ese paralelogramo.
Solución:



Si *ABCD* son vértices consecutivos de un paralelogramo, debe cumplirse que los vectores libres ***AB*** y ***DC*** sean iguales.
Si *D* = (*a*, *b*, *c*), ***DC*** ⇒ (0, 0, –1) – (*a*, *b*, *c*) = (–*a*, –*b*, –1 – *c*)
Como ***AB*** = (1, 1, 1), entonces:

$$(1, 1, 1) = (-a, -b, -1-c)\Rightarrow D=(-1,-1,-2).$$

El punto de corte de sus diagonales coincide con el punto medio de una de ellas, por ejemplo, la diagonal *AC*. Sus coordenadas son:

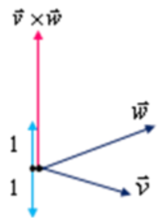
$$M=\left(\frac{1+0}{2},\frac{0}{2},\frac{-1-1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},0,-1\right).$$

El área del paralelogramo es igual al módulo del producto vectorial de dos de los vectores de determinan sus lados: $S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$.

Por tanto: $$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 1 & 1 & 1\\ -2 & -1 & -1\end{vmatrix}=(0,\ -1,\ 1)\to S=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}\ \text{u}^2.$$

11. Dados los vectores $\vec{v}$ = (1, 0, –1) y $\vec{w}$ = (1, 1, 0), calcula los vectores unitarios de $\mathbf{R}^3$ que son ortogonales a ambos.
Solución:
Un vector ortogonal a dos dados se obtiene multiplicándolos vectorialmente.

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=(1,-1,1)$$



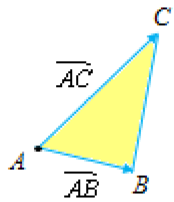
Este vector es perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{w}$, pues los productos escalares:
(1, 0, –1) · (1, –1, 1) = 1 + 0 – 1 = 0
(1, 1, 0) · (1, –1, 1) = 1 – 1 + 0 = 0

Un vector unitario en la dirección de uno dado, $\vec{a}$, es $\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$. En este caso, los vectores unitarios pedidos serán: $\pm\frac{\vec{v}\times\vec{w}}{|\vec{v}\times\vec{w}|}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

12. Determina el valor de *a* para que los puntos *A*(1, 0, 1), *B*(1, 1, 1) y *C*(1, 6, *a*) sean los vértices de un triángulo de área 3/2.
Solución:

El área del triángulo que determinan los puntos *A*, *B* y *C* viene dada por $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

En este caso:
AB = (1, 1, 1) – (1, 0, 1) = (0, 1, 0); **AC** = (1, 6, *a*) – (1, 0, 1) = (0, 6, *a* – 1)
Luego



$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 6 & a-1\end{vmatrix}=(a-1,\ 0,\ 0)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(a-1)^2}=\pm(a-1)\ \text{y}\ S=\frac{1}{2}|a-1|$$

Como se desea que *S* = 3/2, y teniendo en cuenta que el valor absoluto presenta dos posibilidades, se tendrá:

$$\frac{1}{2}(a-1)=\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ a=4;\quad \frac{1}{2}(1-a)=\frac{3}{2}\ \Rightarrow\ a=-2$$

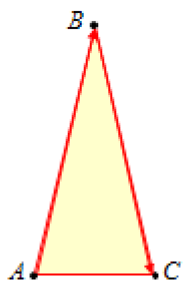
Por tanto, el triángulo tiene área 3/2 si *a* = 4 o *a* = –2.

13. a) Demuestra que los puntos *A*(λ, 2, λ), *B*(2, –λ, 0) y *C*(λ, 0, λ + 2) son vértices de un triángulo isósceles.
b) Para λ = 2 determina su área.
c) Para λ = 0, si los puntos *A*, *B* y *C* se trasladan según el vector $\vec{v}$ = (1, –1, 3) se obtiene un prisma triangular. Halla los nuevos vértices y el volumen del prisma.
Solución:
a) Un triángulo es isósceles cuando tiene dos lados iguales. Por tanto, en este caso, habrá que ver que el módulo de dos de los vectores **AB** = (2 – λ, –λ – 2, –λ), **AC** = (0, –2, 2) y **BC** = (λ – 2, λ, λ + 2) es el mismo.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(2-\lambda)^2+(-\lambda-2)^2+(-\lambda)^2}=\sqrt{3\lambda^2+8}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{0+(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(\lambda-2)^2+\lambda^2+(\lambda+2)^2}=\sqrt{3\lambda^2+8}$$



Como resulta evidente, los lados *AB* y *BC* miden lo mismo. Por tanto, el triángulo será isósceles; y para λ = 0, equilátero.

b) Si λ = 2: **AB** = (0, –4, –2), **AC** = (0, –2, 2) y **BC** = (0, 2, 4).

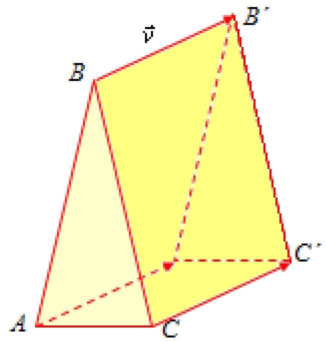
El área del triángulo viene dada por $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 0 & -4 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix}=(-12,\ 0,\ 0)\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=12\Rightarrow S=6\ \text{u}^2.$$

c) Si $\lambda = 0$, los puntos son: $A(0, 2, 0)$, $B(2, 0, 0)$ y $C(0, 0, 2)$; y los trasladados serán:

$A' \to (0, 2, 0) + (1, -1, 3) = (1, 1, 3)$;
$B' \to (2, 0, 0) + (1, -1, 3) = (3, -2, 3)$;
$C' \to (0, 0, 2) + (1, -1, 3) = (1, -1, 5)$.

Además: $\boldsymbol{AB} = (2, -2, 0)$, $\boldsymbol{AC} = (0, -2, 2)$ y $\boldsymbol{AA'} = \vec{v} = (1, -1, 3)$.



El volumen del prisma triangular vale la mitad que el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$ y $\boldsymbol{AA'}$.
Será:

$$V=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AA'}\right]\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}2 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|2(-6+2)+2(-2)\right|=6\ \text{u}^3.$$

14. (Propuesto en Selectividad, Madrid 2012)
Dados los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:
a) Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.
b) Hallar los valores de a para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.

Solución:

a) Los puntos P_1, P_2, P_3 ,P_4 están en el mismo plano si los vectores $\boldsymbol{P_1P_2}$, $\boldsymbol{P_1P_3}$ y $\boldsymbol{P_1P_4}$ son linealmente dependientes.
Esos vectores son:

$\boldsymbol{P_1P_2} = (a, 2, 0) - (1, 3, -1) = (a -1, -1, 1)$;
$\boldsymbol{P_1P_3} = (1, 5, 4) - (1, 3, -1) = (0, 2, 5)$
$\boldsymbol{P_1P_4} = (2, 0, 2) - (1, 3, -1) = (1, -3, 3)$.

Serán linealmente dependientes cuando $\begin{vmatrix}a-1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 5\\ 1 & -3 & 3\end{vmatrix}=0\Rightarrow 21a-28=0\Rightarrow a=\frac{4}{3}$.

b) El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores $\boldsymbol{P_1P_2}$, $\boldsymbol{P_1P_3}$ y $\boldsymbol{P_1P_4}$.
Su valor es:

$$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3},\ \overrightarrow{P_1P_4}\right]\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}a-1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 5\\ 1 & -3 & 3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|21a-21-7\right|=\frac{1}{6}\left|21a-28\right|=7$$

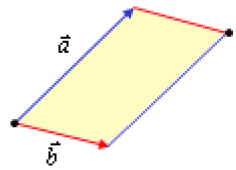
Dos soluciones:

$$\frac{1}{6}(21a-28)=7\Rightarrow a=\frac{70}{21}=\frac{10}{3};\ \text{o bien,}\ \frac{1}{6}(-21a+28)=7\Rightarrow a=-\frac{14}{21}=-\frac{2}{3}$$

15. Dados los vectores: $\vec{a} = (2, -1, 4)$ y $\vec{b} = (0, 3, \lambda)$ con $\lambda \in \mathbf{R}$.
a) Halla el valor de λ para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean ortogonales.
b) Para $\lambda = 0$ calcula el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
Solución:
a) Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar vale 0.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, -1, 4) \cdot (0, 3, \lambda) = -3 + 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{4}$$

b) El área del paralelogramo que determinan los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ viene dada por el módulo del producto vectorial los vectores $\vec{a} \times \vec{b}$.



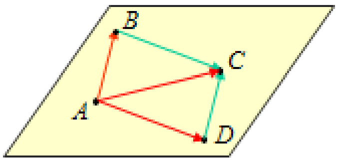
Para $\lambda = 0$, $\vec{b} = (0, 3, 0)$, luego:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-12,\ 0,\ 6) \Rightarrow \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{(-12)^2 + 6^2} = \sqrt{180}$$

El área del paralelogramo vale $\sqrt{180}$ u^2.

16. Dados los puntos $A(1, 2, 1)$, $B(2, 3, 1)$, $C(0, 5, 3)$ y $D(-1, 4, 3)$.
a) Prueba que los cuatro puntos están en el mismo plano.
b) Demuestra que el polígono de vértices consecutivos *ABCD* es rectángulo.
c) Calcula el área de dicho rectángulo.
Solución:
a) Los cuatro puntos pertenecerán al mismo plano si los vectores ***AB***, ***AC*** y ***AD*** son linealmente dependientes.
Estos vectores son:

AB = (2, 3, 1) – (1, 2, 1) = (1, 1, 0);
AC = (2, 3, 1) – (1, 2, 1) = (–1, 3, 2)
AD = (–1, 4, 3) – (1, 2, 1) = (–2, 2, 2)



Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, los vectores, efectivamente, son linealmente dependientes.

b) El cuadrilátero será rectángulo si los vectores ***AB*** y ***BC***, y ***AB*** y ***AD*** son perpendiculares.
Por tanto, sus productos escalares deben valer 0.
Como ***AB*** = (1, 1, 0), ***BC*** = (–2, 2, 2) y ***AD*** = (–2, 2, 2), se tiene:

AB · ***BC*** = ***AB*** · ***AD*** = (1, 1, 0) · (–2, 2, 2) = 0

Por tanto, se trata de un rectángulo.

c) Por tratarse de un rectángulo, su superficie se halla multiplicando su base por su altura.
La base puede ser el módulo de ***AB***; la altura, el módulo de ***AD***.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\,; \quad \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$$

Por tanto,

$$S = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{2}\cdot\sqrt{12} = \sqrt{24}\ \text{u}^2.$$

Observación: La superficie también podría hallarse mediante el producto vectorial.

17. (Propuesto en EvAU 2018, Madrid)
Se consideran los vectores $\vec{u}$ = (–1, 2, 3), $\vec{v}$ = (2, 0, –1) y el punto A(–4, 4, 7). Se pide:
a) Determinar un vector $\vec{w}_1$ que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, unitario y con tercera coordenada negativa.
b) Hallar un vector no nulo $\vec{w}_2$ que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.
c) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y una de sus diagonales es el segmento $\overrightarrow{OA}$.
<u>Solución</u>:
a) Un vector ortogonal a dos dados se obtiene multiplicando vectorialmente los vectores dados.

Por tanto: $\vec{w}_1 = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2 - 4\vec{u}_3 = (-2,\ 5,\ -4)$.

El vector unitario correspondiente es $\dfrac{1}{|\vec{w}_1|} \cdot \vec{w}_1$.

Esto es: $\dfrac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 5^2 + (-4)^2}} \cdot (-2,\ 5,\ -4) = \dfrac{1}{3\sqrt{5}} \cdot (-2,\ 5,\ -4) = \left(-\dfrac{2}{3\sqrt{5}},\ \dfrac{5}{3\sqrt{5}},\ -\dfrac{4}{3\sqrt{5}}\right)$.

La tercera coordenada ya es negativa.

b) Combinación lineal:
$\vec{w}_2 = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$ = a · (–1, 2, 3) + b · (2, 0, –1) = $(-a + 2b,\ 2a,\ 3a - b)$.
Ortogonal a $\vec{v}$:
$\vec{w}_2 \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (-a + 2b,\ 2a,\ 3a - b) \cdot (2,\ 0,\ -1) = 0 \Rightarrow$
$-2a + 4b - 3a + b = 0 \Rightarrow -5a + 5b = 0 \Rightarrow b = a$.
Por tanto, $\vec{w}_2 = (a,\ 2a,\ 2a)$, con $a \neq 0$. Uno de ellos es $\vec{w}_2$ = (1, 2, 2).

c) Debe cumplirse que:
$\overrightarrow{OA} = p\vec{u} + q\vec{v} = (-p + 2q,\ 2p,\ 3p - q)$ = (–4, 4, 7) $\Rightarrow$
p = 2, q = –1.
Los vértices serán:
O = (0, 0, 0); B = (–2, 4, 6); C = (–2, 0, 1); A = (–4, 4, 7).