ALGUNOS PROBLEMAS DE GEOMETRÍA PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD. ESPAÑA 2023

En este bloque de GEOMETRÍA se resuelven 20 ejercicios. He buscado la mayor diversidad entre todos los propuestos en la Pruebas de Acceso a la Universidad de las 17 Comunidades españolas. Me he limitado a la convocatoria ordinaria de junio.
El lector atento (profesor/a o estudiante) descubrirá que hay algo de casi todo: que la mayoría de los conceptos presentes en el currículo del Geometría aparecen en esta selección. No obstante, hay algunos problemas que se presentan con mayor frecuencia; entre ellos:
1) Determinación de la ecuación de una recta o de un plano en sus diferentes formas.
2) Paso de unas formas de ecuación otras: de paramétricas a continua; o al revés.
3) Cálculo del punto simétrico respecto de un plano o respecto de una recta.
4) Aplicaciones del producto escalar, vectorial y mixto: distancias; ángulos entre rectas y planos; perpendicularidad; áreas y volúmenes.
5) Problemas de dependencia lineal y posiciones relativas de rectas y planos. Perpendicularidad recta/plano.

1. Andalucía, ordinaria 2023

EJERCICIO 7. (2,5 puntos)

El plano perpendicular al segmento de extremos $P(0,3,8)$ y $Q(2,1,6)$ que pasa por su punto medio corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C.

Solución:

El punto medio de $P(0, 3, 8)$ y $Q(2, 1, 6)$ es $M\left(\frac{0+2}{2},\frac{3+1}{2},\frac{8+6}{2}\right)=(1,2,7)$.

El vector característico del plano buscado es:

$$\vec{v}_\pi=\overrightarrow{PQ}=(2,1,6)-(0,3,8)=(2,-2,-2)\equiv(1,-1,-1).$$

Por tanto, la ecuación del plano pedido será:

$$\pi:(x-1)-(y-2)-(z-7)=0\Rightarrow\pi:x-y-z+8=0.$$

Los puntos de corte con los ejes de coordenadas son:

$A(-8, 0, 0)$; $B(0, 8, 0)$; $C(0, 0, 8)$.

El área del triángulo de vértices A, B y C viene dada por $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$.

En este caso:

$\overrightarrow{AB}$ = (0, 8, 0) – (–8, 0, 0) = (8, 8, 0); $\overrightarrow{AC}$ = (0, 0, 8) – (–8, 0, 0) = (8, 0 8).

Como:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 8 & 8 & 0\\ 8 & 0 & 8\end{vmatrix}=(64,\ 64,\ 64)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{64^2+64^2+64^2}=64\sqrt{3}.$$

Luego, la superficie del triángulo es: $S=\frac{64\sqrt{3}}{2}=32\sqrt{3}$.

2. Aragón, ordinaria 2023

9) Si los vectores $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1 punto) Comprueba si los vectores $\{\vec{r},\vec{s},\vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\vec{r}=2\vec{u}+\vec{w},\qquad \vec{s}=\vec{u}+\vec{v}-\vec{w},\qquad \vec{t}=-3\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}.$$

b) (1 punto) Si además, los vectores $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ son ortogonales y unitarios, calcula razonadamente $\vec{u}\cdot\vec{r}+\vec{v}\cdot\vec{s}+\vec{w}\cdot\vec{t}$, donde $\cdot$ representa el producto escalar de dos vectores.

Solución:

a) Si los vectores $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ son linealmente independientes, entonces la igualdad $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$ solo si cumple si $a = b = c = 0$.

Veamos qué sucede con la igualdad $d\vec{r}+e\vec{s}+f\vec{t}=\vec{0}$, con

$\vec{r}=2\vec{u}+\vec{w}$, $\vec{s}=\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$ y $\vec{t}=-3\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$

Si $d\vec{r}+e\vec{s}+f\vec{t}=\vec{0} \Rightarrow d(2\vec{u}+\vec{w})+e(\vec{u}+\vec{v}-\vec{w})+f(-3\vec{u}-\vec{v}+\vec{w})=\vec{0} \Rightarrow$

$(2d+e-3f)\vec{u}+(e-f)\vec{v}+(d-e-f)\vec{w}=\vec{0} \to$ como $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ son linealmente independientes, entonces:

$$\begin{cases}2d+e-3f=0\\ e-f=0\\ d-e-f=0\end{cases} \Rightarrow \text{resolviendo: } \begin{cases}2d+e-3f=0\\ e=f\\ d-e-f=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2d-2e=0\\ e=f\\ d-2e=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d=e\\ e=f\\ d=2e\end{cases}$$

, que solo se cumple cuando $e = 0$; y, por tanto, $d = e = f = 0$. Lo que significa que los vectores $\{\vec{r},\vec{s},\vec{t}\}$ también son linealmente independientes.

b) Si los vectores $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ son ortogonales, entonces se cumple:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0;\ \vec{u}\cdot\vec{w}=0;\ \vec{v}\cdot\vec{w}=0;\ \vec{u}\cdot\vec{u}=1;\ \vec{v}\cdot\vec{v}=1;\ \vec{w}\cdot\vec{w}=1$.

Con esto:

$\vec{u}\cdot\vec{r}+\vec{v}\cdot\vec{s}+\vec{w}\cdot\vec{t}=\vec{u}\cdot(2\vec{u}+\vec{v})+\vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v}-\vec{w})+\vec{w}\cdot(-3\vec{u}-\vec{v}+\vec{w})=$

$2\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{w}-3\vec{w}\cdot\vec{u}-\vec{w}\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\vec{w} = 2 + 0 + 0 + 1 - 0 - 0 - 0 + 1 = 4$.

3. Asturias, ordinaria 2023

Problema 6. Dados los puntos A = (1, 0, 0) y B = (−1, 4, −4),

(a) **(1.5 puntos)** Calcula el plano π que hace que A y B sean simétricos

(b) **(0.5 puntos)** Calcula la distancia de A a π

(c) **(0.5 puntos)** Calcula una ecuación continua de la recta que pasa por A y B

Solución:

(a) El plano pedido pasa por el punto medio de *AB*, $M\left(\frac{1-1}{2},\frac{0+4}{2},\frac{0-4}{2}\right)=(0,2,-2)$ y su vector característico viene dado por el vector

$\vec{v}_\pi=\overrightarrow{AB}=(-1,4,-4)-(1,0,0)=(-2,4,-4)\equiv(-1,2,-2)$.

Su ecuación será:

$\pi:-1\cdot x+2(y-2)-2(z+2)=0 \Rightarrow \pi: x-2y+2z+8=0$.

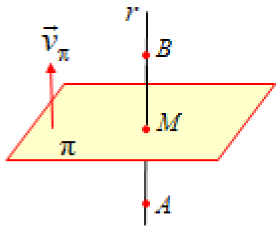
(b) La distancia de A a π viene dada por:

$$d\left(A(1,0,0),\pi: x-2y+2z+8=0\right)=\left|\frac{1-2\cdot 0+2\cdot 0+8}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(2)^2}}\right|=\frac{9}{3}=3.$$

(c) El vector de dirección de la recta que pasa por A y B es $\vec{v}_r=\overrightarrow{AB}=(-1,2,-2)$.

Su ecuación será:

$$r:\begin{cases} x=1-t \\ y=2t \\ z=-2t \end{cases}.$$



4. Baleares, ordinaria 2023

P3. — Considera el pla $\pi: 2x+3y+z-6=0$.

(a) [**3 punts**] Determina els vèrtexs del triangle que ve determinat per la intersecció del pla amb els eixos de coordenades.

(b) [**3 punts**] Calcula l'àrea del triangle anterior.

(c) [**4 punts**] Sigui A el vèrtex del triangle sobre l'eix d'abscisses (eix OX). Calcula la recta perpendicular al pla que passa per A.

Solución:

(a) Los puntos de corte del plano $\pi: 2x+3y+z-6=0$ con los ejes de coordenadas son: $A(3, 0, 0)$; $B(0, 2, 0)$; $C(0, 0, 6)$.

(b) El área del triángulo de vértices A, B y C viene dada por $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

En este caso:

$\overrightarrow{AB}$ = (0, 2, 0) – (3, 0, 0) = (–3, 2, 0); $\overrightarrow{AC}$ = (0, 0, 6) – (3, 0, 0) = (–3, 0, 6).

Como:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix}=(12,\ 18,\ 6) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{12^2+18^2+6^2}=\sqrt{504}=6\sqrt{14}$$

Luego, la superficie del triángulo es: $S=\frac{6\sqrt{14}}{2}=3\sqrt{14}$ u^2.

(b) El vector de dirección de la recta es el característico del plano, $\vec{v}_r=\vec{v}_\pi=(2,3,1)$.

Por tanto, la recta pedida es: $r:\begin{cases} x=3+2t \\ y=3t \\ z=t \end{cases}$.

5. Canarias, ordinaria 2023

3A. En el espacio tridimensional consideramos el plano y las rectas siguientes:

$$\pi: 2x+3y-z=4 \quad ; \quad r:\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+5y+z=0 \end{cases} \quad ; \quad s: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{1}$$

a) Calcular el punto simétrico de $P(-2,1,2)$ respecto de π. 1.25 ptos

b) Calcular el ángulo que forman r y s. 1.25 ptos

Solución:

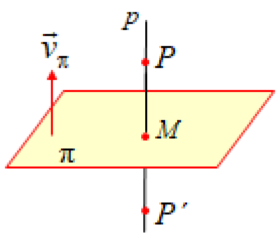
a) Sea $P'(x_0, y_0, z_0)$ el simétrico de $P(-2, 1, 2)$ respecto de π. Ese punto está en la recta perpendicular a π que pasa por P y, además, el punto de corte entre esa recta y el plano π, M, debe ser el punto medio entre P y P'.

La recta perpendicular a π por P es: $p:\begin{cases} x=-2+2t \\ y=1+3t \\ z=2-t \end{cases}$, siendo $\vec{v}_r=\vec{v}_\pi=(2,3,-1)$ el vector característico del plano.

Por tanto, el punto M, que se obtiene sustituyendo las ecuaciones de p en π,

$$2(-2+2t)+3(1+3t)-(2-t)=4 \Rightarrow 14t-3=4 \Rightarrow t=\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$M=\left(-2+2\cdot\frac{1}{2}, 1+\frac{3}{2}, 2-\frac{1}{2}\right)=\left(-1, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right).$$



Como el punto medio entre $P'(x_0, y_0, z_0)$ y $P(-2, 1, 2)$ es

$$M\left(\frac{-2+x_0}{2}, \frac{1+y_0}{2}, \frac{2+z_0}{2}\right) \Rightarrow$$

$$-1=\frac{-2+x_0}{2} \Rightarrow x_0=0\,; \quad \frac{5}{2}=\frac{1+y_0}{2} \Rightarrow y_0=4\,; \quad \frac{3}{2}=\frac{2+z_0}{2} \Rightarrow z_0=1.$$

Por tanto, $P'=(0, 4, 1)$.

b) El ángulo que forman r y s es el que forman sus vectores de dirección, $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$, siendo

$$\cos(r, s)=\cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s)=\left|\frac{\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s}{|\vec{v}_r|\cdot|\vec{v}_s|}\right|.$$

Para obtener $\vec{v}_r$ hay que expresar r en paramétricas:

$$r:\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+5y+z=0 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x-z=-y \\ 2x+z=-5y \end{cases} \Rightarrow r: \underset{E2+E1}{} \begin{cases} x-z=-y \\ 3x=-6y \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_r=(-2,1,-1).$$

Por otra parte, $\vec{v}_s=(1,0,1)$.

Luego, si los vectores de dirección de las rectas r y s son $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$, respectivamente, entonces el coseno del ángulo (r, s) es:

$$\cos(r,s)=\left|\frac{(-2,1,-1)\cdot(1,0,1)}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{1+1}}\right|=\left|\frac{-3}{\sqrt{12}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{ángulo } (r, s)=30^\circ.$$

6. Cantabria, ordinaria 2023

Ejercicio 7 [2,5 PUNTOS]

Considere los planos

$$\pi_1 : 2x - 3y + 5z = a$$

$$\pi_2 : bx + 3y - 5z = 4$$

en función de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$. Determine si es posible asignar algún valor a los parámetros a y b para que los planos π_1 y π_2 :

1) [0,5 PUNTOS] Sean coincidentes. En caso afirmativo de un valor para a y b.

2) [1 PUNTO] Sean paralelos. En caso afirmativo de un valor para a y b.

3) [1 PUNTO] Se corten en una recta. En caso afirmativo de un valor para a y b.

Solución:

1) Los planos serán coincidentes cuando sus coeficientes y términos independientes sean proporcionales. Esto implica que:

$$(2,-3,5,a) = \lambda(b,3,-5,4) \Rightarrow \begin{cases} 2 = b\lambda \\ -3 = 3\lambda \to \lambda = -1 \\ 5 = -5\lambda \\ a = 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = -4 \end{cases}.$$

2) Los planos serán paralelos cuando sus coeficientes sean proporcionales (tienen el mismo vector normal), pero no lo sea el término independiente. Esto implica que:

$$(2,-3,5) = \lambda(b,3,-5) \Rightarrow \begin{cases} 2 = b\lambda \\ -3 = 3\lambda \to \lambda = -1 \\ 5 = -5\lambda \\ a \neq 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a \neq -4 \end{cases}.$$

3) Los planos se cortan en una recta cuando sus coeficientes no sean proporcionales (no tienen el mismo vector normal). Esto implica que:

$$(2,-3,5) \neq \lambda(b,3,-5) \Rightarrow -3 \neq 3\lambda \Rightarrow \lambda \neq -1 \Rightarrow b \neq -2.$$

En este caso, si $b \neq -2$, a puede tomar cualquier valor.

7. Castilla La Mancha, ordinaria 2023

3. Sean el punto $A(1, 1, a)$ y el plano $\pi \equiv b \cdot x + y + z = 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

a) **[1,5 puntos]** ¿Qué deben cumplir los valores a, b para que el punto A esté contenido en el plano π y éste tenga como vector normal uno que es perpendicular al vector $\vec{u} = (1, 2, 0)$?

b) **[1 punto]** Con los valores de a, b del apartado anterior, obtén la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto A.

Solución:

a) El vector normal al plano $\pi \equiv bx + y + z = 1$ es $\vec{v}_\pi = (b,1,1)$.

El vector $\vec{v}_\pi = (b,1,1)$ es normal a $\vec{u} = (1,2,0)$ cuando $\vec{v}_\pi \cdot \vec{u} = 0$.

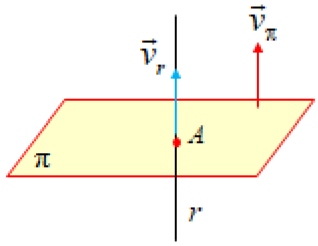
Esto implica que $b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2$.

El punto $A(1, 1, a) \in \pi \Rightarrow b + 1 + a = 1 \Rightarrow -2 + 1 + a = 1 \Rightarrow a = 2$.

Por tanto, $\pi \equiv -2x + y + z = 1$ y $A(1, 1, 2)$.

b) El vector de dirección de la recta pedida es $\vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (-2,1,1)$;

si pasa por $A(1, 1, 2)$ su ecuación será: $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$.



8. Castilla La Mancha, ordinaria 2023

6. *b)* **[1,5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, 1, 3)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (2, 2, 0)$ y $\vec{v} = (0, 0, -1)$.

Solución:

b) Un vector perpendicular a dos dados viene dado por el producto vectorial de esos vectores.

Por tanto, si $\vec{u} = (2,2,0)$ y $\vec{v} = (0,0,-1)$, el vector de dirección de la recta será $\vec{v}_r = \vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2,2,0).$$

Como la recta debe pasar por $A(2, 1, 3)$, su ecuación será: $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3 \end{cases}$.

9. Castilla y León, ordinaria 2023

E3. (Geometría)

Calcular la ecuación del plano π que es perpendicular al plano $\sigma \equiv x + 2y + 3z = 0$ y pasa por los puntos $P = (0,0,0)$ y $Q = (0,1,1)$. **(2 puntos)**

Solución:

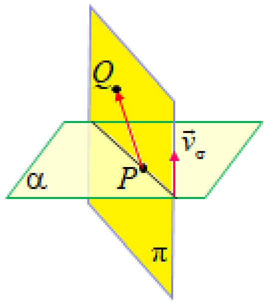
Puede observarse que el punto $P = (0, 0, 0)$ pertenece a $\sigma \equiv x + 2y + 3z = 0$.

El plano π viene determinado por los vectores $\vec{v}_\sigma = (1, 2, 3)$ y $\overrightarrow{PQ}$.

$\overrightarrow{PQ} = (0, 1, 1) - (0, 0, 0) = (0, 1, 1)$.

Como π contiene a $P = (0, 0, 0)$, sus ecuaciones serán:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3\lambda + \mu \end{cases} \to \pi \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -x - y + z = 0$$



10. Castilla y León, ordinaria 2023

E4.- (Geometría)

Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - 2z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{1}$, se pide:

a) Comprobar que r es paralela a π. **(1 punto)**

b) Hallar el plano σ, distinto de π y paralelo a π, cuya distancia a r coincide con la de π. **(1 punto)**

Solución:

a) La recta r será paralela al plano π si:

1) El vector de dirección de la recta sea perpendicular al característico del plano:

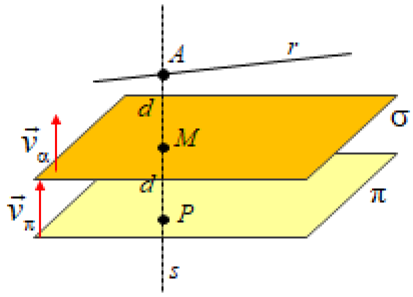
$\vec{v}_\pi = (1, 2, -2)$; $\vec{v}_r = (-2, 2, 1)$.

Efectivamente lo son, pues $\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r = (1, 2, -2) \cdot (-2, 2, 1) = -2 + 4 - 2 = 0$.

2) El punto $A(0, 4, 1)$ de r no está contenido en π.

También se cumple, pues $1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 6 \neq 0$.

Por tanto, la recta r es paralela al plano π.



b) El plano σ tiene como vector característico el mismo $\vec{v}_\pi = (1, 2, -2)$. Su ecuación será: $\sigma \equiv x + 2y - 2z + d = 0$.

Si la distancia a π debe ser la misma que la distancia a r, entonces debe contener al punto M, intermedio entre A y P, siendo P el punto más cercano de A a π.

El punto P es el de corte de la recta s, perpendicular a π que pasa por A, con el plano π

La recta s es: $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \to$ Corte con π: $\lambda + 2(4 + 2\lambda) - 2(1 - 2\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$.

Por tanto, $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$; $M\left(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Como $M \in \alpha \Rightarrow -\frac{1}{3} + \frac{20}{3} - \frac{10}{3} + d = 0 \Rightarrow d = -3 \Rightarrow \sigma \equiv x + 2y - 2z - 3 = 0$.

11. Cataluña, ordinaria 2023

6. Siguin els plans π_1 i π_2, determinats respectivament per les equacions $\pi_1: x+y=3$ i $\pi_2: x-z=-2$.

a) Trobeu l'equació general ($Ax+By+Cz+D=0$) del pla π_3, que és perpendicular a π_1 i π_2, i que passa pel punt $P=(4,1,2)$.
[0,75 punts]

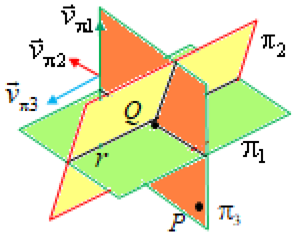
b) Sigui r la recta d'intersecció de π_1 i π_2. Calculeu l'equació vectorial de la recta r.
[0,75 punts]

c) Calculeu el punt Q de la recta r que és més a prop del punt P.
[1 punt]

Solución:

a) El plano pedido viene determinado por el punto $P(4, 1, 2)$ y por los vectores característicos de los planos π_1 y π_2, $\vec{v}_{\pi 1}=(1,1,0)$; $\vec{v}_{\pi 2}=(1,0,-1)$.

Por tanto:



$$\pi_3:\begin{cases} x=4+t+h \\ y=1+t \\ z=2-h \end{cases} \Rightarrow \pi_3 \equiv \begin{vmatrix} x-4 & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\pi_3 \equiv -(x-4)+(y-1)-(z-2)=0 \Rightarrow \pi_3 \equiv -x+y-z+5=0.$$

b) $$r:\begin{cases} x+y=3 \\ x-z=-2 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} y=3-x \\ z=2+x \end{cases} \to (x=\lambda) \Rightarrow r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}.$$

c) El punto Q es el de corte del plano π_3 con la recta r:

$$-\lambda+(3-\lambda)-(2-\lambda)+5=0 \Rightarrow \lambda=2.$$

Luego, $Q(2, 1, 4)$.

12. Comunidad Valenciana, ordinaria 2023

Problema 4. Dada la recta $r: \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{cases}$ y el punto $P = (0,5,2)$ se pide:

a) Comprobar que el punto $Q = (2,6,0)$ pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q. (2 puntos)

b) Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s. (3 puntos)

c) Obtener la proyección ortogonal del punto P en la recta r. (5 puntos)

Solución:

a) El punto Q = (2, 6, 0) pertenece a r, ya que cumple las ecuaciones de los planos que la determinan.

En efecto:

$$r: \begin{cases} 5x+y+7z=16 \\ 9x-y+7z=12 \end{cases} \to Q=(2,\,6,\,0) \to \; r: \begin{cases} 5\cdot 2+6+7\cdot 0=16 \\ 9\cdot 2-6+7\cdot 0=12 \end{cases}.$$

La recta s viene determinada por el punto Q y el vector $\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ}$.

$\overrightarrow{PQ}$ = (2, 6, 0) – (0, 5, 2) = (2, 1, –2).

Su ecuación será: $s: \begin{cases} x=2+2t \\ y=6+t \\ z=-2t \end{cases}$.

b) El ángulo que forman las rectas r y s es el que determinan sus respectivos vectores de dirección.

$$r: \begin{cases} 5x+y+7z=16 \\ 9x-y+7z=12 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} y+7z=16-5x \\ -y+7z=12-9z \end{cases} \Rightarrow r: \begin{matrix} E1-E2 \\ E1+E2 \end{matrix} \begin{cases} 2y=4+4x \\ 14z=28-14x \end{cases} \to (x=h) \Rightarrow$$

$$r: \begin{cases} x=h \\ y=2+2h \to \\ z=2-h \end{cases} \to \vec{v}_r=(1,\,2,\,-1).$$

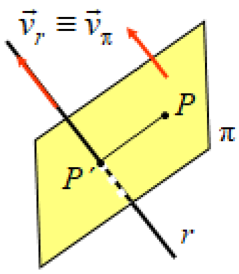
Por tanto, el coseno del ángulo (r, s) es:

$$\cos(r,s)=\cos(\vec{v}_r,\vec{v}_s)\left|\frac{(1,2,-1)\cdot(2,1,-2)}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{4+1+4}}\right|=\left|\frac{2+2+2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}\right|=\frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \text{ángulo } (r,\,s) \approx 35{,}26^{\circ}.$$

c) La proyección de P sobre r es el punto de corte de la recta con el plano perpendicular a ella que pasa por P.

El vector característico de ese plano será $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r$ = (1, 2, –1); por pasar por P(0, 5, 2), se tiene que:

$$\pi: 1(x-0)+2(y-5)-1(z-2)=0 \Rightarrow \pi: x+2y-z-8=0.$$



Corte de la recta con el plano:

$$h+2(2+2h)-(2-h)=0 \Rightarrow 6h-6=0 \Rightarrow h=1.$$

Luego, el punto proyectado es: $P´$= (1, 4, 1).

13. Extremadura, ordinaria 2023

4. Hallar un vector de módulo 5 que sea ortogonal a los vectores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 1)$. (2 puntos)

Solución:

El vector $\vec{w} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ es unitario, cualquiera que sea $\vec{a} \neq \vec{0}$. El vector $5\vec{w}$ tendrá módulo 5.

Un vector ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es su producto vectorial: $\vec{u} \times \vec{v}$.

Así pues, en este caso, un vector unitario y perpendicular a los dos dados será $\vec{w} = \dfrac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2, -1, 2) \Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Luego, el vector ortogonal de módulo 5, perpendicular a los dos dados será:

$$\frac{5}{3}(2, -1, 2) = \left(\frac{10}{3}. -\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right) \to \text{otra solución es } -\frac{5}{3}(2, -1, 2) = \left(-\frac{10}{3}. \frac{5}{3}, -\frac{10}{3}\right).$$

14. Galicia, ordinaria 2023

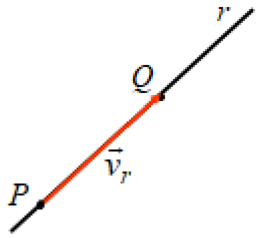
5. Geometría:

a) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(2,-1,0)$ y $Q(3,0,0)$ y la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $R(0,4,-2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}(1,0,-1)$ y $\vec{v}(2,1,-2)$.

b) Calcule el ángulo agudo que forma la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ con el plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

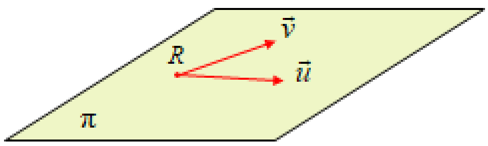
Solución:

a) La recta r viene determinada por el punto Q y el vector $\vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (3, 0, 0) - (2, -1, 0) = (1, 1, 0)$.



Su ecuación será: $s: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$.

El plano pedido viene determinado por los vectores $\vec{u}(1,0,-1)$ y $\vec{v}(2,1,-2)$, y por el punto $R(0, 4, -2)$.



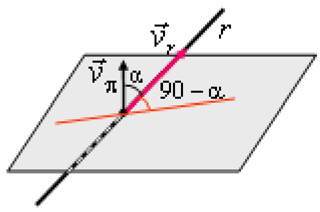
Sus ecuaciones paramétricas son:

$$\pi: \begin{cases} x = t + 2h \\ y = 4 + h \\ z = -2 - t - 2h \end{cases}.$$

Siendo su ecuación general:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y-4 & 0 & 1 \\ z+2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 1 \cdot x + 0 \cdot (y-4) + 1(z+2) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + z + 2 = 0.$$

b) El ángulo que forma una recta con un plano es el complementario del que determinan los vectores $\vec{v}_r$, de dirección de la recta, con $\vec{v}_\pi$, normal al plano.



Por tanto, el seno del ángulo (r, π), será:

$$\operatorname{sen}(r, \pi) = \cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|}.$$

En nuestro caso: $\vec{v}_r = (1, 1, 0)$; $\vec{v}_\pi = (1, 0, 1)$;

Luego: $\operatorname{sen}(r, \pi) = \frac{(1, 0, 1) \cdot (1, 1, 0)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ ángulo$(r, \pi) = 30º$.

<u>**15**. La Rioja, ordinaria 2023</u>

8.– (2 puntos) Halla el punto simétrico del punto $A(0, 2, 3)$ respecto al plano π de ecuación $x + y - z = 4$.

<u>Solución</u>:

El punto $A' = (x_0, y_0, z_0)$ será el simétrico de A respecto de un plano π si cumple:

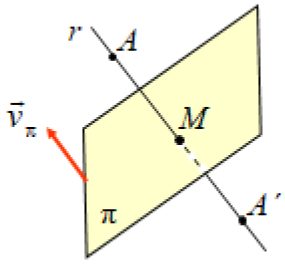
1) Ambos puntos, $A = (0, 2, 3)$ y A', estarán en la recta r, perpendicular a π por A.

2) El punto M (corte de la recta y el plano), debe ser el punto medio entre A y A'.

Como $\pi \equiv x + y - z = 4 \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (1, 1, -1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$.

Corte de la recta r con plano π: $x + y - z = 4$.

$\lambda + (2 + \lambda) - (3 - \lambda) = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{3}$.



Por tanto, $M = \left(\frac{5}{3}, \frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Punto medio de A y A': $\left(\frac{x_0}{2}, \frac{2 + y_0}{2}, \frac{3 + z_0}{2}\right)$.

Como $\left(\frac{5}{3}, \frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{x_0}{2}, \frac{2 + y_0}{2}, \frac{3 + z_0}{2}\right) \Rightarrow$

$\frac{5}{3} = \frac{x_0}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{10}{3}$; $\frac{11}{3} = \frac{2 + y_0}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{16}{3}$; $\frac{4}{3} = \frac{3 + z_0}{2} \Rightarrow z_0 = -\frac{1}{3}$.

Por tanto, $A' = \left(\frac{11}{3}, \frac{16}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

16. Madrid, ordinaria 2023

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los puntos $A(1,-2,3)$, $B(0,2,-1)$ y $C(2,1,0)$. Se pide:

a) (1.25 puntos) Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.

b) (0.75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano $z=1$.

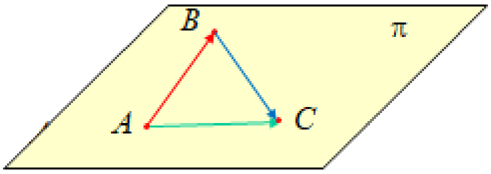
c) (0.5 puntos) Determinar el perímetro del triángulo T.

Solución:

a) Los puntos $A(1, -2, 3)$, $B(0, 2, -1)$ y $C(2, 1, 0)$ determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = (0, 2, -1) - (1, -2, 3) = (-1, 4, -4)$;

$\overrightarrow{AC} = (2, 1, 0) - (1, -2, 3) = (1, 3, -3)$.



Como los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son linealmente independientes (basta con ver que $\overrightarrow{AB} \neq k\cdot\overrightarrow{AC}$ para cualquier valor de k), entonces los puntos dados forman un triángulo.

El plano que determinan es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 - t + h \\ y = -2 + 4t + 3h \\ z = 3 - 4t - 3h \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y+2 & 4 & 3 \\ z-3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv y + z - 1 = 0.$$

b) La recta que contiene a los puntos A y B es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 4t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$.

Se corta con el plano $z = 1$, cuando $3 - 4t = 1 \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$ (sustituyendo en r), $y = 0$; $x = \dfrac{1}{2}$.

El punto de corte pedido es: $P\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ 1\right)$.

c) El perímetro del triángulo es:

$$p = d(A,B) + d(A,C) + d(B,C) = \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| =$$

$$\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-4)^2} + \sqrt{1^2 + 3^2 + (-3)^2} + \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \Rightarrow p = \sqrt{33} + \sqrt{19} + \sqrt{6}.$$

El vector $\overrightarrow{BC} = (2, 1, 0) - (0, 2, -1) = (2, -1, 1)$.

17. Madrid, ordinaria 2023

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, el plano $\pi : x - z = 2$ y el punto $A(1,1,1)$, se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.

b) (0.75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r.

Solución:

a) Las ecuaciones paraméricas de r son: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases}$.

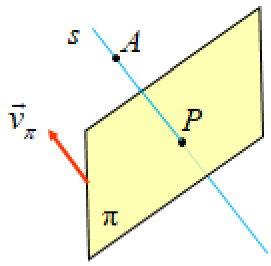
Sustituyendo en $\pi : x - z = 2 \Rightarrow 1 + 2\lambda - (-1 - 2\lambda) = 2 \Rightarrow \lambda = 0$.

Por tanto, la recta y el plano se cortan cuando λ = 0, en el punto $R(1, 0, -1)$.

b) La proyección ortogonal del punto A sobre el plano π es el punto de intersección de la recta, s, perpendicular a π por A, con dicho plano.

El vector de dirección de s es el característico de π, $\vec{v}_s = \vec{v}_\pi = (1, 0, -1)$.

Por tanto: $s \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases}$.



Sustituyendo en π: $1 + t - (1 - t) = 2 \Rightarrow t = 1$.

Luego, el punto proyectado es $P(2, 1, 0)$.

c) Sea $A' = (x_0, y_0, z_0)$ el simétrico de A respecto de la recta r.

Ambos puntos, A y A' estarán en el plano π´, perpendicular a r por A. Además, el punto M, punto medio entre A y A, debe pertenecer al plano y a la recta.

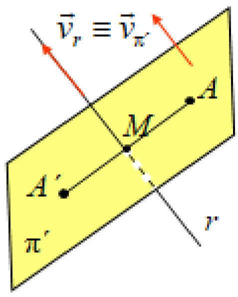
El plano π´ tiene como vector característico el de dirección de la recta: $\vec{v}_r = (2, 1, -2) = \vec{v}_\pi$.

Su ecuación será: $\pi' : 2(x-1) + (y-1) - 2(z-1) = 0 \Rightarrow \pi' : 2x + y - 2z - 1 = 0$.

El punto M, de corte de r con π´ se obtiene sustiuyendo las ecuaicones de la recta en el plano:

$$\pi' : 2(1+2t) + t - 2(-1-2t) - 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$M = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$



Como el punto medio de A y A' es $M = \left(\frac{1+x_0}{2}, \frac{1+y_0}{2}, \frac{1+z_0}{2}\right) \Rightarrow$

$$\frac{1}{3} = \frac{1+x_0}{2} \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{3};\ -\frac{1}{3} = \frac{1+y_0}{2} \Rightarrow y_0 = -\frac{5}{3};$$

$$-\frac{1}{3} = \frac{1+z_0}{2} \Rightarrow z_0 = -\frac{5}{3}.$$

Por tanto, $A' = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

18. Murcia, ordinaria 2023

5: Considere las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases} x-2y = 5 \\ y+z = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-8}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-3}{-1}.$$

a) **[1 p.]** Compruebe que ambas rectas son paralelas.

b) **[1 p.]** Compruebe que el punto $P=(7,1,-1)$ está en la recta r y calcule su proyección ortogonal sobre la recta s.

c) **[0,5 p.]** Calcule la distancia entre ambas rectas.

Solución:

a) Las rectas r y s serán paralelas si sus vectores de dirección, $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$, lo son; además, no deben tener puntos en común, para no ser coincidentes.

En este caso:

$$r:\begin{cases} x-2y=5 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow (\text{si } y=t) \to r \equiv \begin{cases} x=5+2t \\ y=t \\ z=-t \end{cases} \to \vec{v}_r = (2, 1, -1).$$

$$s:\frac{x-8}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-3}{-1} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=8+2h \\ y=-3+h \\ z=3-h \end{cases} \to \vec{v}_s = (2, 1, -1).$$

Es evidente que sus vectores de dirección coinciden.

Como el punto $S = (8, -3, 3) \in s$, no pertenece a r, pues no cumple la ecuación $x - 2y = 5$, se deduce que las rectas no son coincidentes.

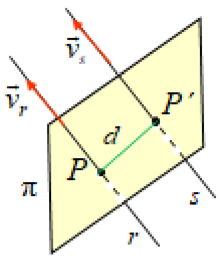
b) El punto $P = (7, 1, -1) \in r$, pues cumple sus ecuaciones.

En efecto:

$$r:\begin{cases} x-2y=5 \\ y+z=0 \end{cases} \to P=(7, 1, -1) \to r:\begin{cases} 7-2\cdot 1=5 \\ 1+(-1)=0 \end{cases}.$$

La proyección ortogonal del punto P sobre la recta s es el punto de intersección de la recta con el plano π, perpendicular a s que pasa por P.

El vector de dirección de s es el característico de π, $\vec{v}_s = \vec{v}_\pi = (2, 1, -1)$.



Como debe contener a P, su ecuación será:

$$\pi: 2(x-7)+(y-1)-(z+1)=0 \Rightarrow \pi: 2x+y-z-16=0.$$

Corte de s con π:

$$\pi: 2(8+2h)+(-3+h)-(3-h)-16=0 \Rightarrow 6h-6=0 \Rightarrow h=1.$$

Luego el punto proyectado es $P´ = (10, -2, 2)$.

c) La distancia entre ambas rectas es la misma que la distancia entre P y $P´$.

$$d(r,s)=d(P,P')=\sqrt{(7-10)^2+(1+2)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}.$$

19. Navarra, ordinaria 2023

P3) Calcula la ecuación continua de la recta perpendicular a r y s que corta a ambas, siendo

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ x - 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-0}{-2}$$

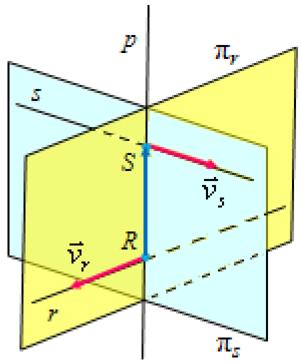
(2,5 puntos)

Solución:

La perpendicular común, p, puede obtenerse mediante la intersección de dos planos, π_r y π_s.

El plano π_r viene determinado por la recta r, a la que contiene, y por el vector $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$.

El plano π_s viene determinado por la recta s, a la que contiene, y por el vector $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$.



En este caso:

$$r: \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ x - 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{matrix} 3E1 \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} 3x - 3y - 3z + 6 = 0 \\ x - 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$r: \begin{matrix} E1 - E2 \\ E2 + E1 \end{matrix} \begin{cases} 2x - 6z + 14 = 0 \\ 4x - 6y - 2 = 0 \end{cases} \to \text{(haciendo } x = 3t) \to r: \begin{cases} x = 3t \\ y = -1/3 + 2t \\ z = 7/3 + t \end{cases} \to \vec{v}_r = (3, 2, 1).$$

$$s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-0}{-2} \to \vec{v}_s = (3, -4, -2).$$

Con esto, para hallar p:

1) Se halla $\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = (0, 9, -18) \equiv (0, 1, -2)$.

2) Se hallan π_r y π_s:

- π_r, determinado por r y $\vec{v}_r \times \vec{v}_s \Rightarrow \pi_r: \begin{vmatrix} x & 3 & 0 \\ y + 1/3 & 2 & 1 \\ z - 7/3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_r$: $-5x + 6y + 3z - 5 = 0$.
- π_s, determinado por s y $\vec{v}_r \times \vec{v}_s \Rightarrow \pi_s: \begin{vmatrix} x - 2 & 3 & 0 \\ y + 5 & -4 & 1 \\ z & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_s$: $10x + 6y + 3z + 10 = 0$.

3) Por tanto, la perpendicular común es: $p: \begin{cases} -5x + 6y + 3z - 5 = 0 \\ 10x + 6y + 3z + 10 = 0 \end{cases}$.

Sus ecuaciones paramétricas son: $p \equiv \begin{cases} x = -1 \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \to$ Forma continua: $p: \dfrac{x+1}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-2}$.

20. País Vasco, ordinaria 2023

Ejercicio A2

Sea r la recta cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y+z=2 \end{cases}.$$

a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta r.

b) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el punto $P(2, 1, 0)$, que es exterior a r.

Solución:

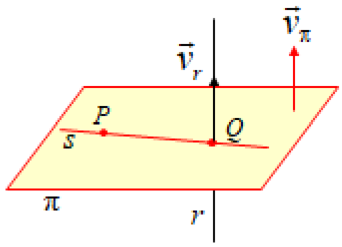
a) Ecuaciones paramétricas de r:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y+z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$r \equiv_{E2-2E1} \begin{cases} x+y-z=1 \\ 3z=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1-y \\ z=0 \end{cases} \to (y=t) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}.$$

b) La recta pedida viene determinada por el punto P dado y por el punto Q, de corte de la recta r con el plano π, perpendicular a r que pasa por P.

El vector característico de ese plano será $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (-1, 1, 0)$; por pasar por $P(2, 1, 0)$, se tiene que:



$$\pi: -(x-2)+(y-1)+0(z-0)=0 \Rightarrow \pi: -x+y+1=0.$$

Corte de la recta con el plano:

$$-(1-t)+t+1=0 \Rightarrow 2t=0 \Rightarrow t=0.$$

Luego, el punto de corte es $Q = (1, 0, 0)$.

El vector de dirección de la recta pedida es $\overrightarrow{PQ} = (1, 0, 0) - (2, 1, 0) = (-1, -1, 0)$.

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta pedida son: $s \equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=0 \end{cases}$.