# ALGUNOS PROBLEMAS DE ANÁLISIS PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE EBAU–EvAU–PEBAU … DE 2023

Los problemas que con mayor frecuencia se plantean en este bloque de ANÁLISIS (en todos los distritos universitarios) son los relacionados con:
1) Funciones: dominio; asíntotas; crecimiento y decrecimiento; … Representación gráfica.
2) Estudio de la continuidad y derivabilidad de funciones definidas a trozos.
3) Aplicaciones de los teoremas de Bolzano y Rolle.
4) Uso de derivadas para hallar la tangente a una curva y el cálculo de límites (L´Hôpital).
5) Problemas de optimización: planteamiento y resolución.
6) Integración indefinida: inmediatas; por cambio de variable (dado); por partes y descomposición en fracciones simples.
7) Integrales definidas: cálculo de áreas de regiones planas. (Representación de esas regiones).

He resuelto solo problemas de la convocatoria ordinaria de junio de 2023.

**1**. Andalucía, ordinaria 2023

**EJERCICIO 1. (2,5 puntos)**

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$.

a) **[1,5 puntos]** Estudia y halla los máximos y mínimos absolutos de $f$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[1 punto]** Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2f(x)\right)$.

Solución:

a) La función dada está definida en todo **R**, pues $e^x+e^{-x}>0$. Además, su imagen siempre es positiva.

Los máximos y mínimos se dan en los puntos con derivada nula.

$$f(x)=\frac{1}{e^x+e^{-x}} \Rightarrow f´(x)=\frac{-\left(e^x-e^{-x}\right)}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=\frac{-e^x+e^{-x}}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=\frac{-e^x+\dfrac{1}{e^x}}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=\frac{-e^{2x}+1}{e^x\left(e^x+e^{-x}\right)^2}.$$

$$f´(x)=0 \text{ si } -e^{2x}+1=0\Rightarrow 1=e^{2x}\Rightarrow x=0.$$

Luego:

- Si $x<0$, como $0<e^{2x}<1 \Rightarrow f´(x)>0 \to$ la función crece a loa izquierda de 0;
- Si $x>0$, como $e^{2x}>1 \Rightarrow f´(x)<0 \to$ la función decrece a la derecha de 0.

Por consiguiente, la función tiene un máximo en $x = 0$. Punto (0, 1/2).

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x+e^{-x}}=\left[\dfrac{+\infty}{+\infty+0}\right]\to$ la indeterminación se puede salvar aplicando (dos veces) la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x+e^{-x}}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]=\left(L´H\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x-e^{-x}}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+e^{-x}}=\left[\frac{2}{+\infty}\right]=0.$$

## 2. Andalucía, ordinaria 2023

**EJERCICIO 2.** (2,5 puntos)

Sea la función $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 - 2x + 5$.

a) **[1,5 puntos]** Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, f(-2))$ y $(2, f(2))$.

b) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de $f$ en el punto de inflexión.

Solución:

a) Si $f(x) = x^3 - 2x + 5 \Rightarrow f(-2) = -8 + 4 + 5 = 1;\ f(2) = 8 - 4 + 5 = 9$.

Los puntos correspondientes son (–2, 1) y (2, 9).

La recta que pasa por ellos es $\dfrac{x+2}{2+2} = \dfrac{y-1}{9-1} \Rightarrow y = 2x + 5 \to$ su pendiente es 2.

Como la pendiente de la recta tangente viene dada por la derivada en el punto, hay que buscar los puntos con derivada igual a 2.

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \to 3x^2 - 2 = 2 \Rightarrow 3x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

b) Punto de inflexión:

$$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \to \text{punto } (0, 5).$$

(Como $f'''(x) = 6 \neq 0$, en esa abscisa se da el punto de inflexión).

La recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto (0, 5) es:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 5 = -2x \Rightarrow y = -2x + 5.$$

La recta normal será:

$$y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)}x \Rightarrow y - 5 = \frac{1}{2}x \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 5.$$

**3.** Aragón, ordinaria 2023

**1)** Sea la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} a\,x-\frac{sen\,x}{x}+2, & x\neq 0 \\ 2 \quad , & x=0 \end{cases}, \quad a\in\mathbb{R}.$$

a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de $a$.

b) (1 punto) Calcula el valor de $a$ para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x=-\frac{\pi}{2}$ y di qué tipo de extremo es.

Solución:

a) El único punto que presenta dificultad es $x = 0$.

La función será continua en ese punto cuando $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=2$.

$$\lim_{x\to 0}\left(ax-\frac{\sin x}{x}+2\right)=\left[0-\frac{0}{0}+2\right]\to \text{hay que resolver } = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{0}{0}.$$

Aplicando L´Hôpital: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{0}{0}=(L´H)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$.

Por tanto, $\lim_{x\to 0}\left(ax-\frac{\sin x}{x}+2\right)=0-1+2=1$.

Como $f(0)=2$, la función no es continua en $x = 0$; para cualquier valor que tome $a$.

b) Derivando, $f´(x)=\begin{cases} a-\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

Los extremos relativos se dan en las soluciones de $a-\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=0$.

Si una solución es $x=-\frac{\pi}{2}$, entonces:

$$a-\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=a-\frac{-\frac{\pi}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi^2}{4}}=0\Rightarrow a-\frac{-\frac{\pi}{2}\cdot 0+1}{\frac{\pi^2}{4}}=0\Rightarrow a=\frac{4}{\pi^2}.$$

La derivada segunda es:

$$f´´(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}+\frac{2(x\cos x-\sin x)}{x^3}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

Como $f´´\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}+\frac{2(x\cos x-\sin x)}{x^3}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}\Rightarrow$

$$f´´\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin(-\pi/2)}{(-\pi/2)}+\frac{2((-\pi/2)\cos(-\pi/2)-\sin(-\pi/2))}{(-\pi/2)^3}=\frac{2}{\pi}+\frac{1}{(-\pi/2)^3}>0.$$

Por tanto, en $x=-\frac{\pi}{2}$ se tiene un mínimo relativo.

**4**. Aragón, ordinaria 2023

**2)** Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln x}.$$

**3)** Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2+4x$ y la recta de pendiente $\frac{1}{2}$ que corta a $f(x)$ en $x=\frac{7}{2}$.

Solución:

2) $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln x}=\left[1^{+\infty}\right].$

Esta indeterminación puede resolverse mediante la regla de L´Hôpital y la equivalencia

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\left[1^{\infty}\right]=e^{\left(\lim_{x\to\infty}(f(x)-1)\cdot g(x)\right)}.$$

Como es sencillo ver, aplicando la regla e L´Hôpital,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L´H)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x+1)}{2x+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L´H)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2}=1.$$

Por tanto:

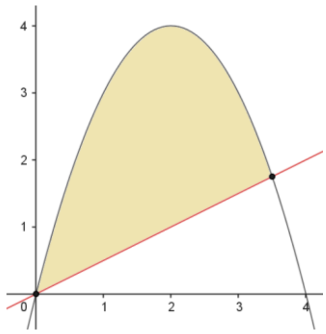
$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln x}=\left[1^{+\infty}\right]=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}-1\right)\cdot\ln x}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x\ln x}{x^2+3x+1}\right)}.$$

Como $\lim_{x\to+\infty}\frac{-x\ln x}{x^2+3x+1}=\frac{-\infty}{\infty}=(L´H)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln x-1}{2x+3}=\frac{-\infty}{\infty}=(L´H)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1/x}{2}=\frac{0}{2}=0$, se deduce que $e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x\ln x}{x^2+3x+1}\right)}=e^0=1$.

3) $f(x)=-x^2+4x \Rightarrow f(7/2)=\frac{7}{4}$.

La recta es $y=\frac{1}{2}x+n$ como corta a la parábola en el punto $\left(\frac{7}{2},\frac{7}{4}\right)\Rightarrow\frac{7}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}+n\Rightarrow n=0$.

El recinto limitado entre la parábola y la recta es el sombreado en la figura adjunta.




Su área viene determinada por

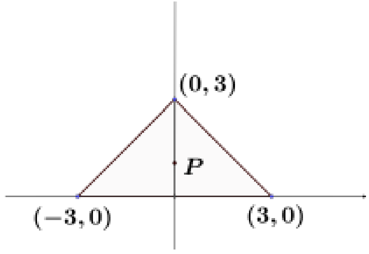
$$S=\int_0^{7/2}\left(-x^2+4x-\frac{1}{2}x\right)dx=\int_0^{7/2}\left(-x^2+\frac{7}{2}x\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{7x^2}{4}\right]_0^{7/2}=-\frac{7^3}{24}+\frac{7^3}{16}=\frac{343}{48}\ \text{u}^2.$$

**5**. Asturias, ordinaria 2023

**Problema 4. (2.5 puntos)**

Calcula las coordenadas del punto P interior al triángulo y situado sobre la altura, tal que la suma de las distancias de P a los tres vértices sea mínima.




Solución:
Sea $P = (0, y)$.
La suma de las distancias de $P$ a los tres vértices es:

$$d(y)=\sqrt{(-3)^2+y^2}+\sqrt{3^2+y^2}+3-y \Rightarrow d(y)=2\sqrt{9+y^2}+3-y.$$

El mínimo se da en alguna de las soluciones de $d'(y)=0$.

$$d'(y)=\frac{2y}{\sqrt{9+y^2}}-1=0 \Rightarrow 2y=\sqrt{9+y^2} \Rightarrow 4y^2=9+y^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{3}.$$

La solución válida es $y=+\sqrt{3}$.
Como:
- para $0<y<\sqrt{3}$, $d'(y)<0 \to d(y)$ decrece;
- para $y>\sqrt{3}$, $d'(y)>0 \to$ la función $d(y)$ crece,
- se deduce que en $y=\sqrt{3}$ la función $d(y)$ toma su valor mínimo.

Por tanto, el punto pedido es $P=\left(0,\sqrt{3}\right)$.

**6**. Asturias, ordinaria 2023

**Problema 3.** Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 + x - 1$ se pide:

(a) **(1.25 puntos)** Calcula los puntos de corte de ambas curvas y dibuja el recinto limitado por ambas funciones

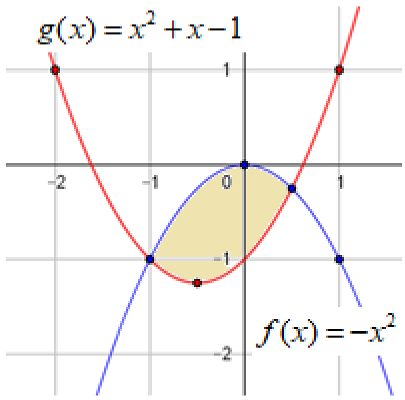
(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área de dicho recinto.

Solución:
(a) Puntos de corte:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow -x^2=x^2+x-1 \Rightarrow$$

$$2x^2+x-1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\begin{cases}-1\\1/2\end{cases}.$$

Los puntos de corte son (–1, –1) y (1/2, –1/4).
Al ser parábolas pueden representarse dando algunos de sus puntos. Por ejemplo, sus vértices son (0, 0) y (–1/2, –5/4).




(b) El área pedida viene dada por:

$$S=\int_{-1}^{1/2}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{-1}^{1/2}\left(-2x^2-x+1\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1/2}=-\frac{2}{24}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-\left(+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-1\right)=\frac{7}{24}+\frac{5}{6}=\frac{9}{8}\ \text{u}^2.$$

## 7. Baleares, ordinaria 2023

**P5.** — La quantitat de tones d'aigua infectada per un bacteri s'espera que segueixi la funció $f(x) = e^{-x} + 0.15x + 1$ sent $x \geq 0$ els dies d'infecció i $f(x)$ les tones d'aigua infectada.

(a) **[4 punts]** Quantes tones d'aigua hi havia inicialment infectades pel bacteri? Cap a quin valor tendeix la quantitat d'aigua infectada? Interpreta els resultats.

(b) **[4 punts]** En quin moment hi ha menys quantitat d'aigua infectada? Quantes tones hi ha en aquell moment?

(c) **[2 punts]** Hi ha algun moment en què l'aigua no estigui infectada? Justifica la resposta.

Solución:

(a) $f(x) = e^{-x} + 0{,}15x + 1$.

Para $x = 0$, $f(0) = e^{-0} + 0{,}15\cdot 0 + 1 = 2$. Inicialmente había 2 toneladas de agua infectada.

A largo plazo el agua infectada tiende a infinito (a la totalidad del agua), pues

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x} + 0{,}15x + 1\right) = 0 + 0{,}15\cdot\infty + 1 = \infty.$$

(b) Derivando, $f'(x) = -e^{-x} + 0{,}15 = 0 \Rightarrow e^{-x} = 0{,}15 \Rightarrow x = -\ln 0{,}15 \approx 1{,}9$.

Como $f''(x) = e^{-x} > 0$, en ese punto, $x = -\ln 0{,}15$, la función toma su valor mínimo.

Las toneladas de agua infectadas en ese momento serán

$$f(-\ln 0{,}15) = 0{,}15 + 0{,}15\cdot(-\ln 0{,}15) + 1 \approx 1{,}43.$$

(c) Siempre habrá agua infectada, pues $f(x) = e^{-x} + 0{,}15x + 1 > 0$ para $x \geq 0$.

## 8. Baleares, ordinaria 2023

**P6.** — **[10 punts]** Representa la regió compresa entre la corba $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, l'eix d'abscisses (eix $OX$) i les rectes $x = 0$ i $x = 7$. Calcula'n l'àrea.

Solución:

La función dada, $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, está definida para todo **R**. Toma valores negativos si $x < 0$, y positivos para $x > 0$. Es continua y simétrica respecto del origen.

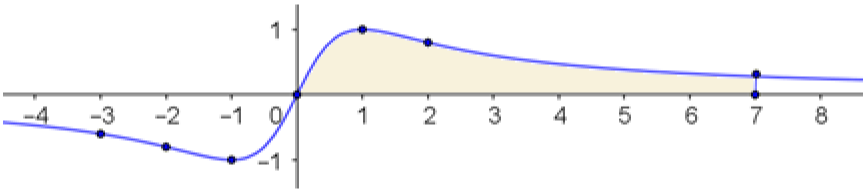
Tiene una asíntota horizontal, la recta $y = 0$, pues $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x^2+1} = 0$.

Su derivada, $f'(x) = \dfrac{2\left(x^2+1\right) - 4x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}$, se anula en $x = -1$ y $x = 1$.

- para $x < -1$ o $x < 1$, $f'(x) < 0 \to f(x)$ decrece;
- para $-1 < x < 1$, $f'(x) > 0 \to f(x)$ crece,
- se deduce que en $x = -1$ la función tiene un mínimo; y en $x = 1$, un máximo.

Dando algunos valores:

(–3, –6/10); (–2, –4/5); (–1, –1); (0, 0); (1, 1); (2, 4/5); (7, 14/50).




El área pedida viene dada por: $S = \displaystyle\int_0^7 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^7 = \ln 50\ \text{u}^2$.

**9**. Islas Canarias, ordinaria 2023

**1A**. Hallar la función polinómica $f(x)$ que verifica que tiene un punto mínimo en $M(1,2)$ y su segunda derivada es: $f''(x) = 2x + 3$. Dar la expresión de $f(x)$. 2.5 ptos

Solución:

Para hallar $f(x)$ hay que integrar dos veces.

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int (2x+3)\,dx = x^2 + 3x + c$$

Como tiene un mínimo en $M(1, 2) \Rightarrow f'(1) = 0$; luego, $1 + 3 + c = 0 \Rightarrow c = -4$.

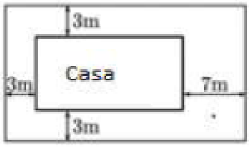
Con esto, $f(x) = \int f'(x)dx = \int (x^2 + 3x - 4)\,dx = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - 4x + c'$.

Como pasa por $M(1, 2) \Rightarrow f(1) = 2$; luego, $\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{2} - 4 + c' = 2 \Rightarrow c' = \dfrac{25}{6}$.

Por tanto, $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - 4x + \dfrac{25}{6}$.

**10**. Islas Canarias, ordinaria 2023

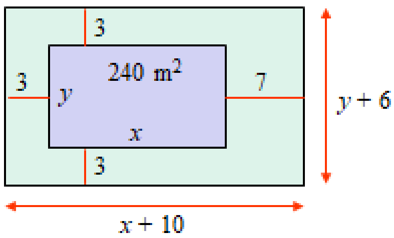
**1B**. Se quiere construir una Casa de la Juventud de 240 m$^2$ de superficie, que estará rodeada por una zona ajardinada con las dimensiones de la imagen.




2.5 ptos

Si se quiere minimizar la superficie total de la zona ajardinada, ¿qué dimensiones debe tener la Casa de la Juventud? ¿Cuál es el área de la zona ajardinada?

Solución:




La superficie de la casa es $x \cdot y = 240$.

La superficie total, casa más la zona ajardinada, será:

$$(x+10)\cdot(y+6) = xy + 6x + 10y + 60$$

Luego, la superficie ajardinada será:

$$S = xy + 6x + 10y + 60 - xy = 6x + 10y + 60$$

Como $x \cdot y = 240 \Rightarrow y = \dfrac{240}{x}$, sustituyendo en la expresión anterior, se tiene:

$$S(x) = 6x + \frac{2400}{x} + 60.$$

El mínimo de $S$ se obtiene en la solución de $S' = 0$ que haga positiva a $S''$.

Derivando:

$$S'(x) = 6 - \frac{2400}{x^2} \to S''(x) = \frac{4800}{x^3}.$$

La derivada primera se anula cuando $6 - \dfrac{2400}{x^2} = 0 \Rightarrow 6x^2 = 2400 = 0 \Rightarrow x = \pm 20$.

Como para $x = 20$ (el valor negativo de la raíz debe descartarse) la derivada segunda es positiva, entonces en ese valor se obtiene el mínimo buscado.

Por tanto, las dimensiones de la Casa deben ser 20 × 12 m.

El área de la zona ajardinada será $S = 6 \cdot 20 + 10 \cdot 12 + 60 = 300$ m$^2$.

**11**. Cantabria, ordinaria 2023

**Ejercicio 2** [2,5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x}$.

**1)** [0,5 PUNTOS] Determine el conjunto de puntos de discontinuidad de $f(x)$.

**2)** [1 PUNTO] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

**3)** [1 PUNTO] Determine si $f(x)$ tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).

Solución:

1) La función no es continua en $x = 0$, pues en ese punto no está definida.

2) Derivando:

$$f(x)=\frac{x^2-x+2}{x} \Rightarrow f´(x)=\frac{(2x-1)x-\left(x^2-x+2\right)}{x^2}=\frac{x^2-2}{x^2}.$$

La derivada se anula cuando $x^2-2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

Con esto:

–Si $x<-\sqrt{2}$, como $f´(x)>0 \Rightarrow$ la función es creciente;

–Si $-\sqrt{2}<x<0$, $f´(x)<0 \Rightarrow$ la función es decreciente.

Luego, en $x=-\sqrt{2}$ la función tiene un máximo relativo: punto $\left(-\sqrt{2},-2\sqrt{2}+1\right)$.

–Si $0<x<\sqrt{2}$, $f´(x)<0 \Rightarrow$ la función es decreciente;

–Si $x>\sqrt{2}$, $f´(x)>0 \Rightarrow$ la función es creciente;

Luego, en $x=\sqrt{2}$ la función tiene un mínimo relativo: punto $\left(\sqrt{2},2\sqrt{2}-1\right)$.

3) $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x}=x-1+\dfrac{2}{x}$.

La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$, pues,

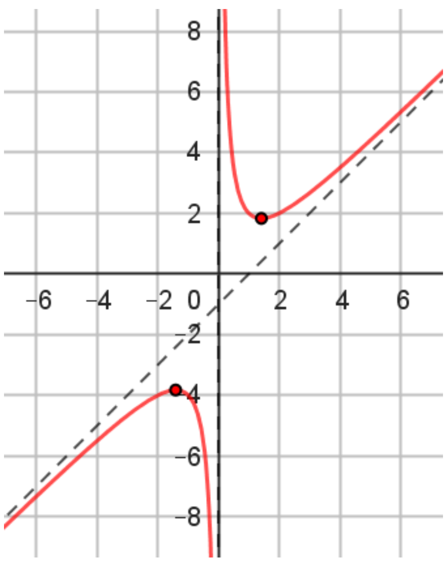
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x-1+\frac{2}{x}\right)=\infty.$$

La asíntota es la recta $x = 0$.

La función tiene una asíntota oblicua, la recta $y=x-1$, pues,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(x-1+\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}(x-1).$$

Aunque no se pide, su gráfica es la adjunta.



**12**. Cantabria, ordinaria 2023

**Ejercicio 6** [2,5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = x^3 + 1$.

**1)** [0,5 PUNTOS] Calcule una primitiva de $f(x)$.

**2)** [1 PUNTO] Calcule los puntos de inflexión de $f(x)$ si los hubiera.

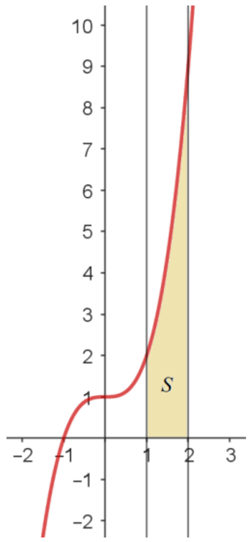
**3)** [1 PUNTO] Calcule el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

1) $F(x) = \int (x^3 + 1)\,dx = \frac{x^4}{4} + x + c$ .

2) Derivando tres veces:

$$f(x) = x^3 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f''(x) = 6x \Rightarrow f'''(x) = 6 .$$




Como $f''(x) = 6x = 0$ en $x = 0$, y $f'''(0) = 6 \neq 0$, en $x = 0$, se da una inflexión. Punto (0, 1).

3) En el intervalo [1, 2] la función es positiva; por tanto, el área pedida es:

$$S = F(2) - F(1) = 6 - \frac{5}{4} = \frac{19}{4} \text{ u}^2.$$

**13**. Castilla y León, ordinaria 2023

**E5.- (Análisis)**

**a)** Determinar $a$ y $b$ de modo que las funciones $f(x) = x^2 - a$ y $g(x) = (x-b)e^x$ tomen el mismo valor en un punto en el que ambas tengan un extremo relativo. **(1 punto)**

**b)** Demostrar que la función $f(x) = 2x + \operatorname{sen} x$ solo se anula en el punto $x = 0$. **(1 punto)**

Solución:

a) Si ambas funciones tienen un extremo relativo en el mismo punto, entonces sus derivadas se anulan en ese punto.

$f(x) = x^2 - a \Rightarrow f'(x) = 2x$, que se anula cuando $x = 0$.

Como $f''(x) = 2 > 0$, el extremo relativo es un mínimo.

$g(x) = (x-b)e^x \Rightarrow g'(x) = e^x + (x-b)e^x = (1+x-b)e^x$.

La derivada $g'(x)$ debe anularse en $x = 0 \Rightarrow$ $g'(0) = (1+0-b)e^0 = 0 \Rightarrow 1-b = 0 \Rightarrow b = 1$.

Por tanto, $g(x) = (x-1)e^x$. El extremo relativo se da en el punto $(0, g(0)) = (0, -1)$.

(Puede verse que en $x = 0$ hay extremo relativo, pues $g'(x) = xe^x \Rightarrow g''(x) = (x+1)e^x$, siendo $g''(0) = 1 \neq 0$.

Como $f(0) = g(0) \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1$.

Las funciones pedidas son $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = (x-1)e^x$.

b) La función $f(x) = 2x + \sin x$ se anula en $x = 0$. En efecto: $f(0) = 2 \cdot 0 + \sin 0 = 0$. Además, está definida, es continua y derivable en todo **R**.

Como $f'(x) = 2 + \cos x > 0$ para todo $x \in$ **R**, la función es creciente siempre. Por tanto, solo puede cortar una vez al eje $OX$. El corte se produce en $x = 0$.

**14**. Castilla y León, ordinaria 2023

**E8.- (Análisis)**

Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = xe^{-x}$ y el eje de abscisas cuando $x$ varía en el intervalo $[-1,0]$. **(2 puntos)**

Solución:

En el intervalo [–1, 0] la función $f(x) = xe^{-x}$ toma valores negativos; salvo en $x = 0$, que toma el valor 0.

Por tanto, el área pedida ($S$) viene por la integral definida:

$$S = -\int_{-1}^{0} \left(xe^{-x}\right) dx = \int_{0}^{-1} \left(xe^{-x}\right) dx$$

El cálculo de $\int \left(xe^{-x}\right) dx$ debe hacerse por el método de partes.

Tomando:

$u = x$ y $dv = e^{-x}dx \Rightarrow du = dx$ y $v = -e^{-x}$

Luego, $\int \left(xe^{-x}\right) dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x}$

Con esto:

$$S = \int_{0}^{-1} \left(xe^{-x}\right) dx = \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_{0}^{-1} = e - e + 1 = 1 \text{ u}^2.$$

**15**. Castilla–La Mancha, ordinaria 2023

2. a) **[0,5 puntos]** Enuncia el teorema de Bolzano.

b) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$. Utiliza el teorema de Bolzano para justificar que esta función tiene al menos una raíz en el intervalo $[0, 2]$.

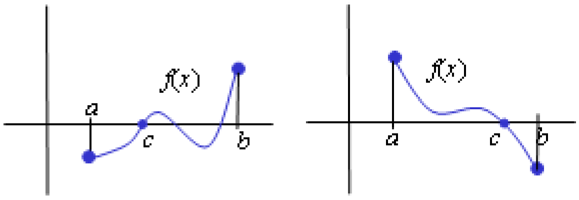
c) **[1 punto]** ¿Podría $f(x)$ tener más de una raíz en el intervalo $[0, 2]$? Justifica tu respuesta.

Solución:

a) El teorema de Bolzano asegura que si una función continua en un intervalo cerrado toma signos distintos en sus extremos, entonces corta al eje *OX* en algún punto de ese intervalo.
Dice lo siguiente:
Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en sus extremos ( $f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$ ), entonces, existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Esto es, si la función es negativa en $a$ ( $f(a) < 0$ ) y positiva en $b$ ( $f(b) > 0$ ), entonces se anula en algún punto $c$ entre $a$ y $b$ ( $f(c) = 0$ ).

Geométricamente, esto significa que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ corta al eje *OX* en un punto, al menos. (Análogamente si $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$.)




Desde el punto de vista algebraico, este teorema asegura que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución entre *a* y *b*. Esa solución será el punto *c* cuya existencia afirma el teorema.

b) La función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$ es continua en todo **R**; en particular en el intervalo [0, 2].
Como $f(0) = -10 < 0$ y $f(2) = 8 + 24 + 6 - 10 = 28 > 0$, entonces, la función cumple el teorema de Bolzano.
Por tanto, existe un punto $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

c) La derivada, $f'(x) = 3x^2 + 12x + 3$, se anula en las raíces de $3x^2 + 12x + 3 = 0$, que son $x = -2 - \sqrt{3}$ y $x = -2 + \sqrt{3}$; ambas negativas. En esos puntos la función puede tener máximos o mínimos, pero para $x > -2 + \sqrt{3}$, como $f'(x) > 0$, la función será creciente. Por tanto, solo puede cortar una vez al eje *OX*, lo que significa que dicha función solo tiene una raíz en el intervalo [0, 2].

**16**. Castilla–La Mancha, ordinaria 2023

5. *a)* **[1 punto]** Calcula la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2}-(1-3x)^{2/3}}$$

Puedes utilizar el cambio de variable $1-3x=t^6$.

Solución:

Si se hace $1-3x=t^6$ se tendrá:

$(1-3x)^{1/2}=t^3$; $(1-3x)^{2/3}=t^4$; $-3dx=6t^5dt \Rightarrow dx=-2t^5dt$.

Sustituyendo en la integral dada:

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2}-(1-3x)^{2/3}}=\int \frac{-2t^5dt}{t^3-t^4}=\int \frac{-2t^5dt}{t^3(1-t)}=\int \frac{-2t^2dt}{(1-t)}=\int \frac{2t^2}{t-1}dt \to$$

(dividendo; puede hacerse por Ruffini) $\to \int \frac{2t^2}{t-1}dt=\int\left(2t+2+\frac{2}{t-1}\right)dt$.

Esta última integral es inmediata:

$$\int\left(2t+2+\frac{2}{t-1}\right)dt=t^2+2t+2\ln(t-1)+c.$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{1/2}-(1-3x)^{2/3}}=(1-3x)^{1/3}+2(1-3x)^{1/6}+2\ln\left((1-3x)^{1/6}-1\right)+c.$$

**17**. Cataluña, ordinaria 2023

3. Sigui $f'(x) = \begin{cases} x-1, & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{1}{x-1}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$ la funció derivada d'una funció derivable $f(x)$ que passa pel punt $A = (0, 3)$.

*a*) Calculeu la funció $f(x)$.
[1,5 punts]

*b*) Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $f'(x)$ en el punt d'abscissa $x = 3$.
[1 punt]

Solución:

a) Para $x \le 2$, $f(x) = \int (x-1)\,dx = \dfrac{x^2}{2} - x + c_1$.

Como pasa por el puno $A(0, 3) \Rightarrow$ $f(0) = \dfrac{0}{2} - 0 + c_1 = 3 \Rightarrow c_1 = 3$.

Por tanto, para $x \le 2$, $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + 3$

Para $x > 2$, $f(x) = \int \dfrac{1}{x-1}\,dx = \ln(x-1) + c_2$.

Como la función debe ser continua en el punto $x = 2$, entonces:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x^2}{2} - x + 3\right) = \lim_{x\to 2^+}\left(\ln(x-1) + c_2\right) \Rightarrow 3 = c_2 .$$

Luego $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - x + 3, & \text{si } x \le 2 \\ \ln(x-1) + 3, & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

b) La ecuación de la recta tangente a $f'(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$ es

$$y - f'(3) = f''(3)(x-3).$$

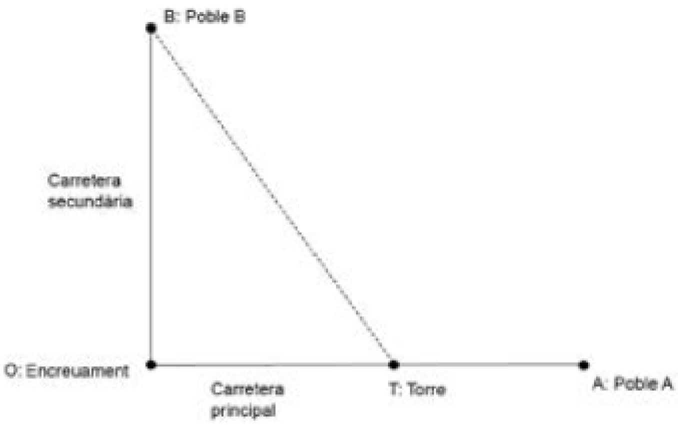
Como $f'(3) = \dfrac{1}{2}$, y $f''(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} \to f''(3) = -\dfrac{1}{4}$, la recta pedida es:

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-3) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}.$$

**18**. Cataluña, ordinaria 2023 (serie 5)

**4.** En una carretera principal hi trobem el poble $A$. A 12 km del poble $A$, hi ha un encreuament $O$ amb una carretera secundària que talla perpendicularment la carretera principal. A 9 km de l'encreuament, a la carretera secundària, hi trobem el poble $B$. Es vol construir una torre de comunicacions $T$ en un punt de la carretera principal situat entre el poble $A$ i l'encreuament $O$. Aquesta torre ha d'estar connectada amb cadascun dels dos pobles en línia recta per cable. Sabem que installar el cable entre la torre $T$ i el poble $B$ té un preu de 250 €/km i, en canvi, installar el cable entre la torre $T$ i el poble $A$ té un preu de 125 €/km. Determineu a quina distància de l'encreuament $O$ a la carretera principal cal situar la torre $T$ perquè el preu del cablejat sigui mínim i quin serà el valor d'aquest preu mínim.

[2,5 punts]




Solución:

Las distancias dadas son: $OA$ = 12 km; $OB$ = 9 km.

Si la torre se sitúa a $x$ km del punto $O$, $OT = x \Rightarrow TA = 12 - x$ y $TB = \sqrt{9^2 + x^2}$.

Con esto, el coste de instalar el cable será:

$$C(x) = 125\cdot(12 - x) + 250\sqrt{81 + x^2}$$

El mínimo de $C$ se da en la solución de $C'(x) = 0$ que hace positiva a $C''(x)$.

Derivando con respecto a $x$,

$$C'(x) = -125 + 250\cdot\frac{2x}{2\sqrt{81 + x^2}} = -125 + \frac{250x}{\sqrt{81 + x^2}}.$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow -125 + \frac{250x}{\sqrt{81 + x^2}} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{81 + x^2}} = 1 \Rightarrow 4x^2 = 81 + x^2 \Rightarrow$$

$$3x^2 = 81 \Rightarrow x = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

En vez de hacer la derivada segunda, pues resulta engorroso, puede comprobarse que la función $C(x)$ decrece para valores de $x < 3\sqrt{3}$, pues $C'(x) < 0$; y crece para $x > 3\sqrt{3}$, ya que $C'(x) > 0$.

Por tanto, la torre debe situarse a $x = 3\sqrt{3}$ km del punto $O$.

En ese caso, el coste de instalación será

$$C\left(3\sqrt{3}\right) = 125\cdot\left(12 - 3\sqrt{3}\right) + 250\sqrt{81 + 27} \approx 850,48 + 2598,08 = 3448,56 \text{ €}.$$

**19**. Comunidad Valenciana, ordinaria 2023

**Problema 5.** Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x} + ln(x+1)$. Obtener:

a) El dominio y las asíntotas de $f(x)$. (2 puntos)
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. (4 puntos)
c) El área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0, x = 1$ y $x = 2$. (4 puntos)

Solución:

a) La función $\frac{1}{x}$ está definida para todo $x \neq 0$; mientras que $\ln(1+x)$ lo está para $x > -1$.

Por tanto, el dominio de $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x+1)$ será $Dom(f) = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

La función tiene dos asíntotas verticales, las rectas $x = -1$ y $x = 0$, pues:

$$\lim_{x \to -1^+}\left(\frac{1}{x} + \ln(x+1)\right) = (-1 - \infty) = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x} + \ln(x+1)\right) = (\infty + 0) = \infty.$$

No tiene más asíntotas.

b) Derivando e igualando a 0:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2 - x - 1}{x^2(x+1)}.$$

Se anula cuando $x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

Como:

–Para $-1 < x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

–Para $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < 0$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

En consecuencia, en $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ la función tiene un máximo relativo.

–Para $0 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

–Para $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Por tanto, en $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ la función tiene un mínimo relativo.

c) En el intervalo [1, 2] la función es positiva. Por tanto, el área pedida viene dada por la integral definida $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1)\right) dx$.

La integral $\int \ln(x+1)\,dx$ debe hacerse por partes.

Tomando: $u = \ln(x+1) \Rightarrow du = \dfrac{1}{x+1}dx$; $dv = dx \Rightarrow v = x$.

Luego,

$$\int \ln(x+1)\,dx = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx \to \text{descomponiendo en la segunda integral} \to$$

$$= x\ln(x+1) - \int\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = x\ln(x+1) - x + \ln(x+1).$$

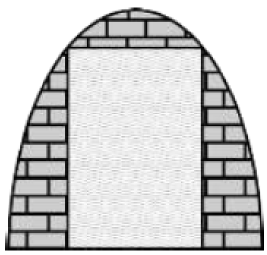
Por tanto:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1)\right)dx = \left[\ln x + x\ln(x+1) - x + \ln(x+1)\right]_1^2 =$$

$$= \ln 2 + 2\ln 3 - 2 + \ln 3 - (\ln 1 + \ln 2 - 1 + \ln 2) = 3\ln 3 - \ln 2 - 1.$$

## 20. Comunidad Valenciana, ordinaria 2023

**Problema 6.** El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación $y = -x^2 + 12$, donde $x$ e $y$ se miden en metros e $y = 0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:

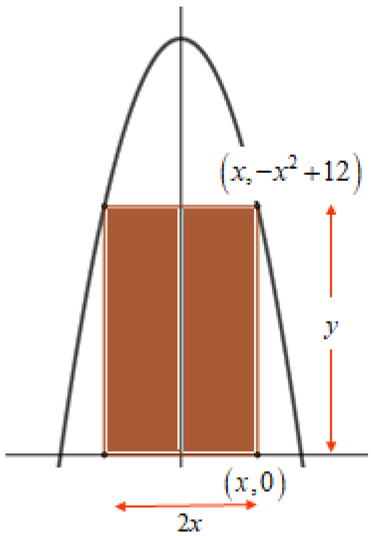


a) Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible. (6 puntos)

b) Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra. (4 puntos)

Solución:

a) Si la longitud de la base de la puerta mide $2x$, sus esquinas están en los puntos $(-x, 0)$, $(x, 0)$, $(x, y)$, $(-x, y)$, siendo $y = -x^2 + 12$.




La superficie de la puerta será:

$$S = 2xy \Rightarrow S(x) = 2x(-x^2+12) = -2x^3 + 24x$$

El máximo de $S$ se da en la solución de $S'(x) = 0$ que hace negativa a $S''(x)$.

Derivando con respecto a $x$,

$$S'(x) = -6x^2 + 24 \to S''(x) = -12x\ .$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2\ ;\ S''(2) = -24$$

Por tanto, la superficie máxima de la puerta se da cuando $x = 2$. Sus dimensiones serán 4 m de ancho por 8 m de alto.

b) El área por debajo del arco vale

$$S_A = 2\int_0^{\sqrt{12}} (-x^2+12)\,dx = 2\left[-\frac{x^3}{3} + 12x\right]_0^{\sqrt{12}} = 2\left(-4\sqrt{12} + 12\sqrt{12}\right) = 16\sqrt{12} = 32\sqrt{3}\ \text{m}^2.$$

El área de la puerta vale $4 \cdot 8 = 32$ m$^2$.

El área recubierta de piedra valdrá: $32\sqrt{3} - 32$ m$^2$.

**21**. Extremadura, ordinaria 2023

5. a) Comprobar que hay alguna solución positiva y alguna negativa de la ecuación (1.5 puntos)

$$x \cdot \cos(2x) = x^2 - 1.$$

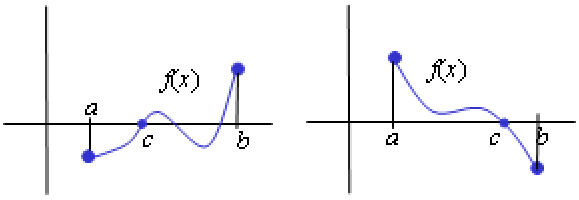
b) Aproximar la solución positiva encontrada con un error menor que una décima. (0.5 puntos)

Solución:

a) Debe aplicarse el teorema de Bolzano, que dice: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en sus extremos ( $f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$), entonces, existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Desde el punto de vista algebraico, este teorema asegura que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución entre *a* y *b*. Esa solución será el punto *c* cuya existencia afirma el teorema.

Geométricamente, esto significa que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ corta al eje *OX* en un punto, al menos. (Análogamente si $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$.)




En este caso, si se considera la función $f(x) = x^2 - 1 - x \cdot \cos(2x)$, que es continua en todo **R**, se cumple:

- $f(-2) = 4 - 1 + 2\cos(-4) = 3 + 2\cos(-4) > 0 \to$ utilizando calculadora, $f(-2) \approx 1,693$.
- $f(0) = -1 < 0$.

Por tanto, hay una raíz negativa, que está entre –2 y 0.

- $f(1) = 1 - 1 - \cos 2 > 0 \to$ utilizando calculadora, $f(1) \approx 0,416$.

Por tanto, hay una raíz positiva, que está entre 0 y 1.

b) La raíz buscada está en el intervalo (0, 1).

Probando:

$f(0,8) = 0,64 - 1 - 0,8 \cdot \cos 1,6 \approx -0,337 < 0 \to$ la raíz está en el intervalo (0,8, 1).

$f(0,9) = 0,81 - 1 - 0,9 \cdot \cos 1,8 \approx 0,014 > 0 \to$ la raíz está en el intervalo (0 8, 0,9).

La aproximación es menor que 0,1. La solución buscada está entre 0,8 y 0,9.

Se puede afinar un poco más:

$f(0,89) = 0,89^2 - 1 - 0,89 \cdot \cos(2 \cdot 0,89) \approx -0,023 < 0$.

$\to$ la raíz está en el intervalo (0,89, 0,9), con aproximación menor de 0,01.

## 22. Extremadura, ordinaria 2023

**6.** Calcular $a$, $b$ y $c$ para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ cx & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 4]. (2 puntos)

Solución:

El teorema de Rolle dice:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[x_1, x_2]$ y derivable en el intervalo $(x_1, x_2)$, y además $f(x_1) = f(x_2)$, entonces, existe al menos un punto $x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

En este caso hay que exigir que la función $f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } 0 \le x < 1 \\ cx & \text{si } 1 \le x \le 4 \end{cases}$ sea continua en [0, 4], derivable en (0, 4) y tal que $f(0) = f(4)$.

→ En primer lugar hay que estudiar la continuidad.

Hay que exigir que los limites laterales en $x = 1$ sean iguales.

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\left(x^2+ax+b\right) = 1+a+b;\ \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}(cx) = c.$$

Límites laterales iguales: $1+a+b = c \Rightarrow a+b-c = -1$ [1]

→ Derivabilidad:

Hay que exigir que las derivadas laterales en $x = 1$ sean iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{si } 0<x<1 \\ c & \text{si } 1<x<4 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^-}(2x+a) = 2+a;\ \lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+}(c) = c$$

Por tanto, $2+a = c \Rightarrow a = c-2$ [2]

→ $f(0) = f(4) \Rightarrow b = 4c$ [3]

Sustituyendo [3] y [2] en [1]:

$$c-2+4c-c = -1 \Rightarrow c = \frac{1}{4};\ b = 1;\ a = -\frac{7}{4}.$$

En consecuencia:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-\frac{7}{4}x+1 & \text{si } 0\le x<1 \\ \frac{1}{4}x & \text{si } 1\le x\le 4 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x-\frac{7}{4} & \text{si } 0<x<1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 1<x<4 \end{cases} \to f'(x) = 0 \text{ en } x = \frac{7}{8}.$$

## 23. Galicia, ordinaria 2023

**3. Análisis:**

a) Si $f(x) = ae^x + b$, diga qué valores deben tener $a$ y $b$ para que se cumplan $f(0) = 0$ y $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$.

b) Estudie si la función $f(x) = x + \sin x$ tiene extremos o puntos de inflexión en el intervalo $(0,2\pi)$, diga dónde están en caso de que existan y esboce la gráfica de $f$ en ese intervalo.

Solución:

a) Si $f(x) = ae^x + b \Rightarrow f(0) = ae^0 + b = a + b$. Luego, si $f(0) = 0 \Rightarrow a + b = 0$.

Por otra parte, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{ae^x + b}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$, indeterminación que debe hacerse por L´Hôpital.

Si $\lim_{x\to 0} \frac{ae^x + b}{x} = 3$, entonces, como:

$$\lim_{x\to 0} \frac{ae^x + b}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to 0} \frac{ae^x}{1} = a \Rightarrow a = 3;\ b = -3.$$

b) La función $f(x) = x + \sin x$ es continua y derivable en todo **R**; en particular en el intervalo (0, 2π).

Su derivada, $f´(x) = 1 + \cos x$ se anula en $x = \pi$, solución de $1 + \cos x = 0$.

La derivada segunda, $f´´(x) = -\sin x$, también se anula en $x = \pi$. Por tanto, la función no tiene máximos ni mínimos en el intervalo (0, 2π).

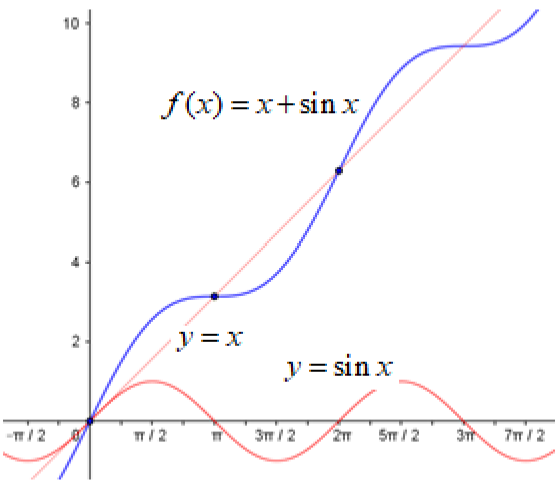
La derivada tercera es $f´´´(x) = -\cos x$.

Como $f´´´(\pi) = -\cos \pi = 1 \neq 0 \Rightarrow$ en $x = \pi$ se tiene un punto de inflexión.

Para esbozar su gráfica, puede observarse que:

- $f(x) = x + \sin x > 0$, para $x \in (0, 2\pi)$, pues $\sin x > 0$ para $0 < x < \pi$; y $\sin x \leq -1$ para $\pi < x < 2\pi$.
- Nunca es decreciente, pues $f´(x) = 1 + \cos x \geq 0$.
- Algunos de sus puntos son:

  (0, 0), $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1\right)$,
  $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$, $(\pi, \pi)$, $\left(\frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$,
  $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} - 1\right)$, $\left(\frac{7\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$, $(2\pi, 2\pi)$.




Nota. Su gráfica se puede obtener sumando los valores de las funciones $y = x$ e $y = \sin x$.

**24**. Galicia, ordinaria 2023

**4. Análisis:**

Calcule el área de la región determinada por las desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Haga un esbozo gráfico de la región. **Nota**: $\ln x$ es el logaritmo neperiano de $x$.

Solución:

La función $f(x) = x \ln x$ está definida para $x > 0$; y es continua y derivable.

Es positiva para $x > 1$.

Su derivada, $f'(x) = \ln x + 1$ se anula en $x = e^{-1}$, solución de $\ln x + 1 = 0$.

Como $f'(x) = \ln x + 1 < 0$ en el intervalo $\left(0, e^{-1}\right)$, y $f'(x) = \ln x + 1 > 0$ si $x > e^{-1}$, la función tiene un mínimo en ese punto: $\left(e^{-1}, -e^{-1}\right)$. (Decrece en el intervalo $\left(0, e^{-1}\right)$; crece si $x > e^{-1}$).

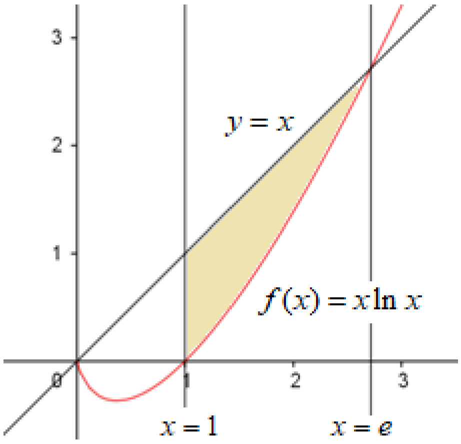
Corta al eje $OX$ en $x = 1$, punto (1, 0).

Corta a la recta $y = x$ en la solución de

$$\begin{cases} y = x \\ y = x \ln x \end{cases} \Rightarrow x = x \ln x \Rightarrow 1 = \ln x \Rightarrow x = e.$$

Punto $(e, e)$.

Con esto, el recinto del que hay que calcular el área es el sombrado en la figura adjunta.




Por tanto, el área pedida viene dada por la integral definida

$$\int_1^e (x - x \ln x)\, dx.$$

La integral $\int (x \ln x)\, dx$ debe hacerse por partes.

Tomando: $u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x} dx$; $dv = x dx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2}$.

Luego,

$$\int (x \ln x)\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}.$$

Por tanto:

$$\int_1^e (x - x \ln x)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \left[\frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^e = \frac{3e^2}{4} - \frac{e^2}{2} - \frac{3}{4} = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} \text{ u}^2.$$

**25**. La Rioja, ordinaria 2023

**1.– (2 puntos)** Sea
$$f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-1)}.$$

(i) Halla el dominio, asíntotas verticales y horizontales de la función $f$, en caso de que existan.

(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

Solución:

(i) La función $f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-1)}$ no está definida cuando se anula el denominador:

$(x-2)(x-1) = 0$; en $x = 1$ y en $x = 2$. Por tanto, Dom($f$) = **R** – {1, 2}.

Las rectas $x = 1$ y x = 2 son asíntotas verticales, pues:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty \text{ y } \lim_{x\to 2} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \left[\frac{2}{0}\right] = \infty$$

También tiene una asíntota horizontal, la recta $y = 0$, ya que

$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = 0 \to$ basta observar que el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

Luego, no tiene asíntotas oblicuas.

(ii) Derivando:

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{x}{x^2-3x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2+2}{\left(x^2-3x+2\right)^2}.$$

Luego: $f'(x) = 0$ en $x = -\sqrt{2}$ y $x = +\sqrt{2}$.

Con esto:

Si $x < -\sqrt{2}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

Si $-\sqrt{2} < x < 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.

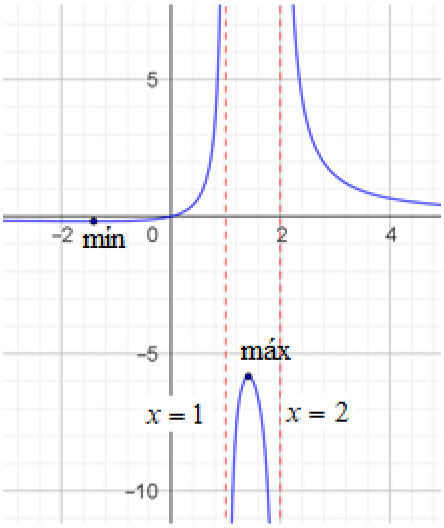
Por tanto, en $x = -\sqrt{2}$ hay un mínimo: $\left(-\sqrt{2}, -0{,}17\right)$

Si $1 < x < \sqrt{2}$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.

Si $\sqrt{2} < x < 2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

Por tanto, en $x = \sqrt{2}$ hay un mínimo: $\left(\sqrt{2}, -5{,}83\right)$

Si $x > 2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.




(La gráfica se da para que el problema se comprenda mejor).

**26**. La Rioja, ordinaria 2023

**3.– (2 puntos)** Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^x + x^3\right)^{\frac{1}{x}}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x+2} - \dfrac{x^2+1}{x-2}\right)$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^x + x^3\right)^{\frac{1}{x}} = \left[1^{\infty}\right]$ → esta indeterminación se transforma aplicando logaritmos:

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}\left(e^x+x^3\right)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\ln\left(e^x+x^3\right)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\left(e^x+x^3\right)\right) = \left[\infty\cdot\ln 1 = \infty\cdot 0\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(e^x+x^3\right)}{x}\right) = \left[\frac{0}{0}\right]$$ → ahora puede aplicarse L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln\left(e^x+x^3\right)}{x}\right) = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{e^x+3x^2}{e^x+x^3}}{1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+3x^2}{e^x+x^3} = \frac{1}{1} = 1.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^x + x^3\right)^{\frac{1}{x}} = e$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x+2} - \dfrac{x^2+1}{x-2}\right) = [\infty-\infty]$. Para resolver esta indeterminación es necesario transformar la función operando; así:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2} - \frac{x^2+1}{x-2}\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(x^2-1\right)\cdot(x-2)-\left(x^2+1\right)\cdot(x+2)}{x^2-4} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-4x^2-2x}{x^2-4} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right]$$

→ aplicando L´Hôpital $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-8x-2}{2x} = (L´H) = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-8}{2} = -4$.

<u>27. Madrid, ordinaria 2023</u>

**A.2. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, se pide:

a) (0.25 puntos) Estudiar si es par o impar.

b) (0.75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto $x = 1$.

c) (1.5 puntos) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

<u>Solución</u>:

a) La función $f(x) = \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$ será par si $f(x) = f(-x)$.

Como $f(-x) = \sqrt[3]{\left((-x)^2-1\right)^2} = \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2} = f(x)$, la función es par (simétrica respecto del eje *OY*).

b) La función $f(x) = \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$ está definida en todo **R**. En $x = 1$, su valor es 0.

Además, $\lim_{x\to 1} \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2} = 0$; luego es continua en $x = 1$.

Derivada;

$$f(x) = \left(x^2-1\right)^{2/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{-1/3}\cdot 2x = \frac{4x}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)}} \to \text{no está definida en } x = 1.$$

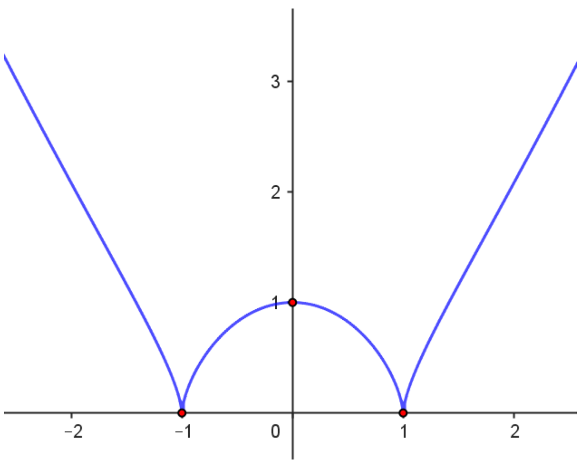
Por tanto, no es derivable en $x = 1$.

c) Al ser par basta con estudiar cómo se comporta para valores de $x \geq 0$.
La derivada se anula en $x = 0$.
Como no es derivable en $x = 1$ hay que considerar los intervalos: (0, 1) y (1, +∞).
→ Para valores de $0 < x < 1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente.
→ Para valores de $x > 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.
Por tanto, en el punto $x = 1$ la función tiene un mínimo absoluto, aunque no sea derivable.

Para valores situados a la izquierda de $x = 0$, por ser par:
→ Para valores de $-1 < x < 0$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.
→ Para valores de $x < -1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente.
Por tanto, en el punto $x = 0$ la función tiene un máximo relativo; y en $x = -1$, otro mínimo, también absoluto.

Como la función no es derivable ni en $x = -1$ ni en $x = 1$, en esos puntos la función tiene sendos picos.

Aunque no se pide, su gráfica es la adjunta.



<u>**28**. Madrid, ordinaria 2023</u>

**B.2. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2+x^2} & \text{si} \quad x\le -1\\ \dfrac{2x^2}{3-3x} & \text{si} \quad x>-1\end{cases}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1}$.

c) (0.75 puntos) Calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

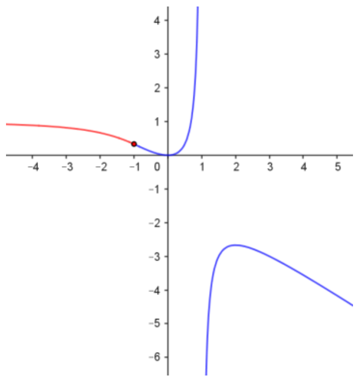
<u>Solución</u>:

a) La función está definida en **R** – {1}. Por tanto, en $x = 1$ no puede ser continua.
En el punto $x = -1$ hay que comprobar que existe límite y que coincide con su valor de definición. Esto es: $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=f(-1)=\dfrac{1}{3}$.

Como:

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2}{2+x^2}=\frac{(-1)^2}{2+(-1)^2}=\frac{1}{3};$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{2x^2}{3-3x}=\frac{2(-1)^2}{3-3(-1)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$



Luego, la función es continua en $x = -1$.
Por tanto, la función es continua en todo su dominio, en **R** – {1}.
(La gráfica no se pide).

b) $$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)^{2x^2-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1}=\left[1^\infty\right].$$

Indeterminación que se puede resolver aplicando: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\left[1^\infty\right]=e^{\left(\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-1)\cdot g(x)\right)}$.

Por tanto:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)^{2x^2-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1}=\left[1^\infty\right]=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2+x^2}-1\right)\cdot\left(2x^2-1\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-2\left(2x^2-1\right)}{2+x^2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-4x^2+2}{2+x^2}\right)}=e^{-4}.$$

c) $$\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_{-1}^{0}\frac{2x^2}{3-3x}dx=\frac{2}{3}\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{1-x}dx.$$

Una primitiva puede hacerse dividiendo la función racional. Así:

$$\int\frac{x^2}{1-x}dx=\int\left(-x-1+\frac{1}{1-x}\right)dx=-\frac{x^2}{2}-x-\ln(1-x).$$

Por tanto, $\dfrac{2}{3}\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{1-x}dx=\frac{2}{3}\left(-\frac{x^2}{2}-x+\ln(1-x)\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{2}{3}\left(0-\left(-\frac{1}{2}+1+\ln 2\right)\right)=\frac{2\ln 2}{3}-\frac{1}{3}$.

**29**. Murcia, ordinaria 2023

**3:** Calcule los siguientes límites:

a) **[1,25 p.]** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x)-1}{x\,\text{sen}(x)}$.

b) **[1,25 p.]** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{3x}$.

Solución:

a) El límite pedido puede hacerse aplicando la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{x\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(2x)}{\sin x + x\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-4\cos(2x)}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{-4}{2} = -2 .$$

b) Se resuelve multiplicando el numerador y el denominador de la función por la exprsión conjugada del numerador.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}\right)\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)}{3x\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{9+x-(9-x)}{3x\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{3\left(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}\right)} = \frac{2}{3(3+3)} = \frac{1}{9} .$$

**30**. Murcia, ordinaria 2023

**4:** Considere la función $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$, definida para todo valor de $x\in\mathbb{R}$.

a) **[0,5 p.]** Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) **[0,5 p.]** Calcule la derivada de $f(x)$ y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$.

c) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

d) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de $f(x)$ que pasa por el punto $(1,1)$.

Solución:

a) El límite pedido, aunque es inmediato, puede hacerse aplicando la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L'H)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x}=1.$$

b) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x\left(1+x^2\right)-x^2\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

La derivada se anula cuando $x = 0$; además:

- si $x<0$, como $f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ decrece:
- si $x>0$, $f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ crece.

En consecuencia, en $x=0$ la función tiene un mínimo.

c) $\displaystyle\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=x-\arctan x+c$.

d) Si la primitiva $F(x)=x-\arctan x+c$ pasa por el punto (1, 1), entonces $F(1)=1$, luego:

$$F(1)=1-\arctan 1+c=1\Rightarrow c=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

Por tanto, $F(x)=x-\arctan x+\dfrac{\pi}{4}$.

**31**. Navarra, ordinaria 2023

**P6)** Estudia la continuidad en $\mathbb{R}$ de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos^2(\pi x) - 1}{1 - x} & x < 1 \\ \ln\left(x \cdot e^{x+1}\right) - 2x & x \geq 1 \end{cases} \qquad (2{,}5 \text{ puntos})$$

Solución:

La función dada está definida en todo **R**.

En el intervalo (–∞, 1), $f(x) = \dfrac{\cos^2(\pi x) - 1}{1 - x}$ es continua → (hay dificultad en $x$ = 1, pero en ese punto no está definida).

En el intervalo [1, +∞), $f(x) = \ln\left(x \cdot e^{x+1}\right) - 2x$ es continua en todos sus puntos; en $x$ = 1 toma el valor $f(1) = \ln\left(1 \cdot e^2\right) - 2 \cdot 1 = 2 - 2 = 0$.

Por tanto, la única dificultad se da en el punto $x$ = 1.

Será continua en ese punto si

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\cos^2(\pi x) - 1}{1 - x} = \lim_{x \to 1^+} \left(\ln\left(x \cdot e^{x+1}\right) - 2x\right) = 0.$$

El primer límite debe hacerse aplicando la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\cos^2(\pi x) - 1}{1 - x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x \to 1^-} \frac{2\cos(\pi x) \cdot (-\sin(\pi x)) \cdot \pi}{-1} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Como los límites laterales coinciden, la función es continua en todo **R**.

**32**. Navarra, ordinaria 2023

**P8)** Encuentra los dos puntos en los que se cortan las gáficas de estas dos funciones:

$$f(x) = 2 - 2x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x^4 - x^2 \qquad (2{,}5 \text{ puntos})$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

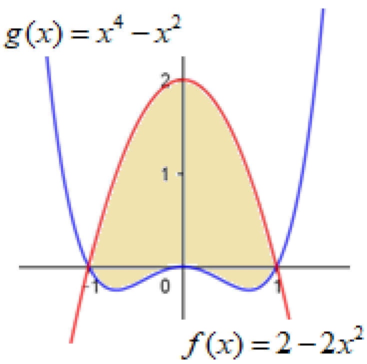
Solución:

(a) Puntos de corte:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2 - 2x^2 = x^4 - x^2 \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 1 \text{ (la solución } x^2 = -2 \text{ no es real).}$$

Los puntos de corte son (–1, 0) y (1, 0).




(b) El área pedida viene dada por:

$$S = \left|\int_{-1}^{1} \left(f(x) - g(x)\right) dx\right| = \left|\int_{-1}^{1} \left(x^4 + x^2 - 2\right) dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - 2x\right]_{-1}^{1}\right| = \left|\frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 2 - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 2\right)\right| = \frac{44}{15} \text{ u}^2.$$

Nota. Aunque no es necesario, para comprender mejor el problema, se podrían representar ambas funciones. El área pedida es la sombreada.

**33**. País Vasco, ordinaria 2023

**Ejercicio A4**

Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado inferiormente por la curva de ecuación $y = \frac{x^2}{4}$ y superiormente por las curvas de ecuaciones $y = \frac{4}{x^2}$ e $y = 4$. Calcula el área de ese recinto.

Solución:

Ambas funciones pueden dibujarse dando valores.

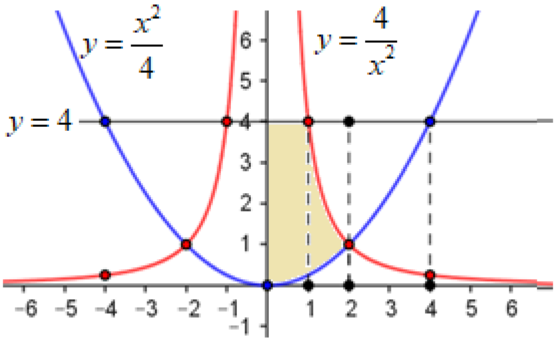
La primera, $y = \frac{x^2}{4}$, es una parábola, que pasa por los puntos:

(–4, 4); (–2, 1); -(–1, 1/4); (0, 0), vértice; (1, 1/4); (2, 1); (4, 4).

La segunda, $y = \frac{4}{x^2}$, que está definida para $x \neq 0$, pasa por los puntos:

(–4, 1/4); (–2, 1); (–1, 4);
(1, 4); (2, 1); (4, 1/4).

Esta función tiene dos asíntotas, una vertical, la recta $x = 0$; otra horizontal, $y = 0$.




La recta $y = 4$ es horizontal.

El recinto que limitan en el primer cuadrante es el sombreado.

El área de ese recinto viene dada por la suma de dos integrales definidas:

$$S = \int_0^1 \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left[4x - \frac{x^3}{12}\right]_0^1 + \left[-\frac{4}{x} - \frac{x^3}{12}\right]_1^2 =$$

$$= 4 - \frac{1}{12} + \left(\left(-2 - \frac{8}{12}\right) - \left(-4 - \frac{1}{12}\right)\right) = \frac{64}{12} = \frac{16}{3} \text{ u}^2.$$

**34**. País Vasco, ordinaria 2023

## Ejercicio B4

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}\,dx, \qquad \int (x+2)\sin(3x)\,dx.$$

Solución:

$$\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}dx = \int \frac{x^2+4+4x-4x}{(x+2)^2}dx = \int \frac{(x+2)^2-4x}{(x+2)^2}dx = \int\left(1-\frac{4x}{(x+2)^2}\right)dx$$

La segunda parte de la integral puede hacerse por descomposición en fracciones simples, pues:

$$\frac{4x}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2} \Rightarrow \frac{4x}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2} \to \text{identificando coeficientes:}$$

$$\begin{cases} A=4 \\ 2A+B=0 \end{cases} \Rightarrow A=4; B=-8.$$

Luego:

$$\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}dx = \int\left(1-\frac{4x}{(x+2)^2}\right)dx = \int\left(1-\frac{4}{x+2}+\frac{8}{(x+2)^2}\right)dx = x-4\ln(x+2)-\frac{8}{x+2}+c\,.$$

La integral $\int (x+2)\sin(3x)\,dx$ debe hacerse por el método de pares.

Haciendo: $u=x+2$; $dv=\sin(3x)dx \Rightarrow du=dx$; $v=-\frac{1}{3}\cos(3x)$

Luego,

$$\int (x+2)\sin(3x)dx = (x+2)\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right)-\int\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{3}(x+2)\cos(3x)+\frac{1}{9}\sin(3x)+c$$