ALGUNOS PROBLEMAS DE ÁLGEBRA PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD. ESPAÑA 2023

Los problemas que con mayor frecuencia se plantean en este bloque de ÁLGEBRA (en todos los distritos universitarios) son:
1) Problemas relacionados con álgebra de matrices y determinantes: ecuaciones matriciales y cálculo de la matriz inversa (hay que manejar con soltura las propiedades de los determinantes; y conocer la fórmula para el cálculo de la inversa).
2) Problemas de sistemas lineales: discusión y solución. (Teorema de Rouché).
3) Planteamiento y resolución de problemas de sistemas con enunciado.

De la convocatoria ordinaria (junio de 2023) he seleccionado los ejercicios que, aparentemente, presentaban *mayor* dificultad o resultaban *algo novedosos*.

1. Andalucía, ordinaria 2023

EJERCICIO 6. (2,5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) **[0,5 puntos]** Determina para qué valores de m existe la inversa de la matriz A.

b) **[2 puntos]** Para todo $m \neq -1$, resuelve, si es posible, la ecuación $AX + X = B$.

Solución:

a) La matriz A tendrá inversa cuando su determinante sea distinto de 0: $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{vmatrix} = m^3 \Rightarrow |A| = 0 \text{ si } m = 0.$$

Por tanto, la matriz A tendrá inversa cuando $m \neq 0$.

b) La ecuación $AX + X = B \Leftrightarrow (A+I)X = B \Rightarrow X = (A+I)^{-1}B$, cuando $(A+I)^{-1}$ exista.

Esa inversa existe siempre que $m \neq -1$, pues $|A+I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix} = 1 + m^3 \neq 0$ si $m \neq -1$.

$$(A+I)^{-1} = \frac{\left((A+I)_{ij}\right)^t}{|A+I|}$$, donde $\left((A+I)_{ij}\right)^t$ es la traspuesta de la matriz adjunta de $A + I$.

Como

$$\left((A+I)_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m^2 & 1 & -m \\ -m & m^2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+I)^{-1} = \frac{1}{1+m^3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & m^2 & -m \\ -m & 1 & m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $X = (A+I)^{-1}B = \frac{1}{1+m^3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & m^2 & -m \\ -m & 1 & m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+m^3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ -m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & -m \end{pmatrix}$.

2. Aragón, ordinaria 2023

5) Sean las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad D=A\cdot B^T-2I,$$

donde B^T es la matriz traspuesta de B, e I es la matriz identidad de orden 3.

a) (1 punto) Estudia si la matriz D tiene inversa y, en caso afirmativo, calcúlala.

b) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial $C\,X=A^T\cdot B$, donde A^T es la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) La matriz D tendrá inversa cuando su determinante sea distinto de 0: $|D|\neq 0$.

Como

$$D=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$D=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 4\\ 2 & 2 & -4\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -1 & 4\\ 2 & 0 & -4\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}\Rightarrow |D|=-4\Rightarrow D \text{ tiene inversa.}$$

Su inversa es $D^{-1}=\dfrac{(D_{ij})^T}{|D|}$, donde $(D_{ij})^T$ es la traspuesta de la matriz adjunta de D.

La matriz de los adjuntos es: $(D_{ij})=\begin{pmatrix}0 & 4 & 0\\ -4 & 12 & -1\\ 4 & -8 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow D^{-1}=\dfrac{1}{-4}\begin{pmatrix}0 & -4 & 4\\ 4 & 12 & -8\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

(Se recomienda comprobar que $D{\cdot}D^{-1}=I$).

b) La ecuación

$$CX=A^T{\cdot}B\Leftrightarrow X=C^{-1}\left(A^TB\right).$$

Como $A^TB=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ y $C^{-1}=\dfrac{(C_{ij})^T}{|C|}=\dfrac{1}{-3}\begin{pmatrix}0 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$X=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}0 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix}-9 & 0\\ 8 & -2\end{pmatrix}.$$

3. Asturias, ordinaria 2023

Problema 2. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

(a) **(0.75 puntos)** Calcula, en caso de que sea posible, las dimensiones de una matriz D tal que se pueda realizar el producto A · D · B.

(b) **(0.5 puntos)** Estudia si puede existir una matriz M tal que M · A = B.

(c) **(1.25 puntos)** Estudia si existe $(B \cdot A)^{-1}$ y calcúlala en caso de que sea posible.

Solución:

a) El producto de matrices, $A \cdot B$, puede hacerse cuando el número de columnas de la matriz de la izquierda, A, es igual al número de filas de la otra matriz, B. La matriz producto, P, tiene el mismo número de filas que A y el mismo número de columnas que B.

En esquema: $A_{n\times m} \cdot B_{m\times p} = P_{n\times p}$.

En este caso, para que se pueda realizar $A_{3\times 2} \cdot D_{m\times n} \cdot B_{2\times 3}$ es necesario que $m = 2$ y $n = 2$.

b) El producto $M_{n\times m} \cdot A_{3\times 2} = B_{2\times 3}$ no es posible en ningún caso, pues el número de columnas de A no coincide con el número de las columnas de B.

c) Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de 0.

Como

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ con } |B \cdot A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 = 9 \neq 0 \Rightarrow (B \cdot A)^{-1} \text{ existe.}$$

Su inversa es $(B \cdot A)^{-1} = \dfrac{\left((B \cdot A)_{ij}\right)^t}{|B \cdot A|}$, donde $\left((B \cdot A)_{ij}\right)^t$ es la traspuesta de la matriz de los adjuntos de $B \cdot A$.

Esta matriz es: $(B \cdot A)_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left((B \cdot A)_{ij}\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto: $(B \cdot A)^{-1} = \dfrac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 & -4/9 \\ 2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$.

4. Baleares, ordinaria 2023

P1. — Considera la matriu M i el vector $\mathbf{b}$,

$$M=\begin{pmatrix}2 & 1 & a\\ a+1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

respectivament.

(a) **[3 punts]** Indica per a quins valors de a la matriu M és invertible.

(b) **[3 punts]** Calcula, per a tots els valors de a que sigui possible, la inversa de M.

(c) **[4 punts]** Calcula, per al cas $a=0$, el vector $\mathbf{x}$ tal que $M\mathbf{x}=\mathbf{b}$.

Solución:

(a) La matriz M es invertible siempre que su determinante sea distinto de 0: $|M|\neq 0$.

$$|M|=\begin{vmatrix}2 & 1 & a\\ a+1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-2-(a+1-1)+a(a+1)=a^2-2 \Rightarrow |M|=0\Rightarrow a^2-2=0\Rightarrow a=\pm\sqrt{2}.$$

Por tanto, la matriz M tierne inversa para cualquier valor de $a\neq\pm\sqrt{2}$.

b) Si $M=\begin{pmatrix}2 & 1 & a\\ a+1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, su inversa es $M^{-1}=\dfrac{(M_{ij})^t}{|M|}$, donde $(M_{ij})^t$ es la traspuesta de la matriz adjunta de M.

$$M_{ij}=\begin{pmatrix}-1 & -a & a+1\\ a-1 & 2-a & -1\\ 1 & a^2+a-2 & -a-1\end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1}=\frac{1}{a^2-2}\cdot\begin{pmatrix}-1 & a-1 & 1\\ -a & 2-a & a^2+a-2\\ a+1 & -1 & -a-1\end{pmatrix}.$$

c) La solución de $M\cdot\vec{x}=\vec{b}$ es $\vec{x}=M^{-1}\cdot\vec{b}$.

Si $a=0$, $M=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\to M^{-1}=\dfrac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\vec{x}=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

5. Canarias, ordinaria 2023

2B. Un bar de tapas canario sólo ofrece tres platos en su menú: escaldón, tollos y carajacas. El precio medio de los tres platos (la ración) es de 5€. Se sirven 30 raciones de escaldón, 20 raciones de tollos y 10 raciones de carajacas, por lo que se ingresaron 255 euros en total. Sabiendo que el triple del precio de las caracajas supera en diez euros el doble del precio de los tollos. Calcula el precio de la ración de cada producto. 2.5 ptos

Solución:

Sean x, y, z los precios de cada uno de los platos de escaldón, tollos y carajacas, respectivamente.

Se cumplen las siguientes ecuaciones:

Precio medio: $\frac{x+y+z}{3}=5$.

Importe total: $30x+20y+10z=255$.

Relación carajacas–tollos: $3z=2y+10$.

Se forma el sistema: $\begin{cases} x+y+z=15 \\ 30x+20y+10z=255 \\ 2y-3z=-10 \end{cases}$.

Puede resolverse aplicando el método de Gauss:

$$\begin{cases} x+y+z=15 \\ 30x+20y+10z=255 \\ 2y-3z=-10 \end{cases} \Rightarrow$$

$$E2-30E1\begin{cases} x+y+z=15 \\ -10y-20z=-195 \\ 2y-3z=-10 \end{cases} \Rightarrow E2+5E3\begin{cases} x+y+z=15 \\ -35z=-245 \\ 2y-3z=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2,50 \\ z=7 \\ y=5,50 \end{cases}.$$

El precio de las raciones será:

Escaldón, 2,50 €; Tollos, 5,50 €; Carajacas, 7 €.

6. Cantabria, ordinaria 2023

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+3y+z=-1 \\ x-y+z=a \\ -x+y-2z=-3 \end{cases}$$

dado en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

1) [1,25 PUNTOS] Determine para qué valores de a el sistema es compatible.

2) [1,25 PUNTOS] Dado $a=4$, resuelva el sistema anterior si es posible.

Solución:

1) Sea A la matriz de coeficientes *y* M la matriz ampliada,

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & a \\ -1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)=M\ .$$

Si r(A) = r(M) = 3 → sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 → sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) → sistema incompatible: no tiene solución.

Como determinante de A vale,

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=2-3\cdot(-1)=5$$ → con rango 3, se deduce que el sistema siempre es compatible determinado; no depende del valor de a.

2) Para a = 4, el sistema queda $\begin{cases} 2x+3y+z=-1 \\ x-y+z=4 \\ -x+y-2z=-3 \end{cases}$.

Puede resolverse aplicando el método de Gauss:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=-1 \\ x-y+z=4 \\ -x+y-2z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1+2E3 \\ E2+E3 \end{matrix} \begin{cases} 5y-3z=-7 \\ -z=1 \\ -x+y-2z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5y+3=-7 \Rightarrow y=-2 \\ z=-1 \updownarrow \\ -x-2+2=-3 \Rightarrow x=3 \end{cases}.$$

La solución es: x = 3; y = –2; z = –1.

7. Castilla La Mancha, ordinaria 2023

1. Sean las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, con\ a, b, c \in \mathbb{R},\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\ y\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) **[1,5 puntos]** Determina las condiciones que tienen que cumplir los valores *a, b, c* para que $A \cdot X = B$.

b) **[1 punto]** Si además queremos que *X* sea simétrica, ¿qué se debe cumplir? ¿Cómo es la matriz *X* resultante?

Solución:

a) Si $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, para que $A \cdot X = B$, debe cumplirse que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b \\ 4a+2c & 4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+c=1 \\ b=0 \\ 4a+2c=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=a \\ b=0 \\ c=1-2a \end{cases}$$

Por tanto, las matrices *X* son de la forma: $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1-2a & 0 \end{pmatrix}$.

b) Para que *X* sea simétrica debe cumplirse que $1-2a=0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Luego, $X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Castilla–León, ordinaria 2023

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x & 0\\ y & 1\\ z & x+y\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, calcular los valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$ para que AB sea igual a la inversa C^{-1} de la matriz C. **(2 puntos)**

Solución:

La inversa de la matriz C es $C^{-1}=\dfrac{(C_{ij})^T}{|C|}$, donde $(C_{ij})^T$ es la traspuesta de la matriz de los adjuntos de C.

Esa matriz: $(C_{ij})=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Como $|C|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2-1=1 \Rightarrow C^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

La ecuación $AB=C^{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & 0\\ y & 1\\ z & x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}x+z & x+y\\ -x+y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x+z=2\\ x+y=1\\ -x+y=1\end{cases}.$$

Sistema que puede resolverse por el método de Gauss.

$$\begin{cases}x+z=2\\ x+y=1\\ -x+y=1\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}\\ E2-E1\\ E3+E1\end{matrix}\begin{cases}x+z=2\\ y-z=-1\Rightarrow\\ y+z=3\end{cases} \begin{matrix}\\ \\ E3+E2\end{matrix}\begin{cases}x+z=2\\ y-z=-1\Rightarrow\\ 2y=2\end{cases}\begin{cases}x+2=2\Rightarrow x=0\\ 1-z=-1\Rightarrow z=2\uparrow\\ y=1\uparrow\end{cases}$$

9. Cataluña, ordinaria 2023

4. Sigui el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real λ:

$$\begin{cases} x+2\lambda y+(2+\lambda)z=0 \\ (2+\lambda)x+y+2\lambda z=3 \\ 2\lambda x+(2+\lambda)y+z=-3 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre λ.
[1,25 punts]

b) Per al cas $\lambda=-1$, resoleu el sistema, interpreteu-lo geomètricament i identifiqueu-ne la solució.
[1,25 punts]

Solución:

a) Sea A la matriz de coeficientes del sistema y M la matriz ampliada,

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda & 3 \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 & -3 \end{array}\right)=M\ .$$

Si r(A) = r(M) = 3 → sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 → sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) → sistema incompatible: no tiene solución.

Como determinante de A vale,

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 \end{vmatrix}=1-2\lambda(2+\lambda)-2\lambda\left(2+\lambda-4\lambda^2\right)+(2+\lambda)\left[(2+\lambda)^2-2\lambda\right] \to$$

operando $|A|=9\lambda^3+9=(\lambda+1)\left(9\lambda^2-9\lambda+9\right) \Rightarrow |A|=0$ solo si $\lambda=-1$.

Con esto:

- Si $\lambda\neq-1$, el rango de la matriz A = r(M) = 3. El sistema será compatible determinado.
- Si $\lambda=-1$, se tiene:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)=M$$

En este caso, el rango de A es 2: el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3\neq0$.

Como $|M_1|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-6+6=0$, se tiene que r($A$) = r($M$) = 2. El sistema compatible indeterminado.

b) Si λ = –1 el sistema es compatible indeterminado. Queda: $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x+y-2z=3 \end{cases}$, que es equivalente a $\begin{cases} x-2y=-z \\ x+y=3+2z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \end{matrix} \begin{cases} x-2y=-z \\ 3y=3+3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2(1+z)=-z \\ y=1+z \uparrow \end{cases}$.

Haciendo $z = t$, se tiene: $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}$.

La interpretación geométrica es la de tres planos pertenecientes al mismo haz.

10. <u>Comunidad Valenciana, ordinaria 2023</u>

Problema 2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Obtener la matriz $(AB^T+I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación. (6 puntos)

b) Comprobar que $C^2=-\alpha^3 I$, donde I es la matriz identidad, y calcular C^{13}. (4 puntos)

<u>Solución</u>:

a) $AB^T+I \Leftrightarrow AB^T+I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

La inversa de una matriz M es $M^{-1}=\dfrac{(M_{ij})^T}{|M|}$; donde $(M_{ij})=Adj(M)$ es la matriz de los adjuntos de M. Esta matriz existe cuando $|M|\neq 0$.

En este caso:

$$|M|=|AB^T+I|=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-4;\ Adj(AB^T+I)=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(AB^T+I)^{-1}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

b) En efecto,

$$C^2=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a^3 & 0 \\ 0 & -a^3 \end{pmatrix}=-a^3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=-a^3 I.$$

Por tanto:

$$C^{13}=C^{12}\cdot C=(C^2)^6\cdot C=(-a^3 I)^6\cdot C=a^{18}IC=a^{18}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a^{19} \\ -a^{20} & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Extremadura, ordinaria 2023

2. Determinar todos los números $x \in \mathbb{R}$ para los que el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

es mayor o igual que cero . (2 puntos)

Solución:

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} = 1\cdot\left(-x^2 - 3\right) - 1\cdot\left(-4x\right) = -x^2 + 4x - 3 = -\left(x-1\right)\left(x-3\right).$$

Por tanto:

- El determinante se anula, $|D| = 0$, en $x = 1$ y en $x = 3$;
- Si $x < 1$, $|D| < 0$;
- Si $1 < x < 3$, $|D| > 0$;
- Si $x > 3$, $|D| < 0$.

Luego, $|D| \geq 0$ para todo $x \in [1,\ 3]$.

12. Galicia, ordinaria 2023

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores de m, el sistema $\begin{cases} mx + (2+m^2)y = 1+m, \\ my - z = 1, \\ mx + 2y + (2m-4)z = 5. \end{cases}$

Solución:

Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada,

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 2+m^2 & 0 & 1+m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ m & 2 & 2m-4 & 5 \end{array}\right) = M.$$

Si r(A) = r(M) = 3 → sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 → sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) → sistema incompatible: no tiene solución.

El determinante de A vale,

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 2+m^2 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ m & 2 & 2m-4 \end{vmatrix} = m\left[m(2m-4)+2\right] - \left(2+m^2\right)m = m^3 - 4m^2 = m^2(m-4).$$

→ $|A| = 0$ si $m = 0$ o $m = 4$.

Con esto:

- Si $m \neq 0$ y 4, r(A) = 3 y r(M) = 3 → sistema compatible determinado.
- Si $m = 0$, las marices son:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \end{array}\right) = M.$$

El r(A) = 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Como el menor $|M_1| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -2+2 = 0 \Rightarrow$ r(M) = 2.

Por tanto, si $m = 0$ el sistema es compatible indeterminado.

Equivalente a $\begin{cases} 2y = 1 \\ -z = 1 \end{cases}$. Su solución es: $\begin{cases} x = t \\ y = 1/2 \\ z = -1 \end{cases}$.

- Si $m = 4$, las marices son:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 18 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{array}\right) = M.$$

El r(A) = 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 4 & 18 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$.

Como el menor $|M_2| = \begin{vmatrix} 4 & 18 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 18 + 4 \cdot (-2) \neq 0 \Rightarrow$ r(M) = 3.

Por tanto, si $m = 4$ el sistema será incompatible.

13. La Rioja, ordinaria 2023

5.– (2 puntos) Dada una matriz de tamaño 4×4 cuyo determinante es igual a 2. Calcula el valor del determinante de la matriz resultante al realizar las siguientes operaciones:

(i) se traspone la matriz,

(ii) se cambian entre sí la primera y la cuarta columna,

(iii) se multiplica la tercera columna por -4,

(iv) se multiplica toda la matriz por 4.

Solución:

Para dará respuesta a las preguntas formuladas hay que conocer las siguientes propiedades de los determinantes:

1.ª El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta: $|A| = |A^T|$.

2.ª Si se intercambian entre sí dos filas o columnas de un determinante, su valor es el mismo cambiado de signo.

3.ª Si los elementos de una fila se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por ese mismo número.

4.ª Si $A = (a_{ij})_{n \times n}$, entonces: $|kA| = k^n |A|$.

(i) Por la propiedad 1.ª el determinante de la matriz resultante sigue valiendo 2.

(ii) Por la propiedad 2.ª el determinante de la matriz resultante valdrá –2.

(iii) Por la propiedad 3.ª el determinante de la matriz resultante valdrá –4 · 2 = –8.

(iv) Por la propiedad 4.ª, al ser $A = (a_{ij})_{4 \times 4} \Rightarrow |4A| = 4^4 |A| = 256 \cdot 2 = 512$.

14. Madrid, ordinaria 2023

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El $10\,\%$ de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuanta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

Solución:

Sean *x*, *y*, *z* el número de camiones de los tipos *A*, *B* y *C*, respectivamente.

Con los datos del enunciado se obtiene:

$x+1=y+z$ → relación entre los tipos de camiones;

$0{,}10\cdot 24y=\frac{1}{7}\cdot 28z$ → el 10 % de todos los camiones de tipo *B*…

$14x+24y+28z=302$ → toneladas totales extraídas hoy.

Se obtiene el sistema: $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ 2,4y-4z=0 \\ 14x+24y+28z=302 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3y-5z=0 \\ 7x+12y+14z=151 \end{cases}$

Aplicando el método de Gauss:

$$\begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3y-5z=0 \\ 7x+12y+14z=151 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-7E1 \end{matrix} \begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3y-5z=0 \\ 19y+21z=158 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3E3-19E2 \end{matrix} \begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3y-5z=0 \\ 158z=3\cdot 158 \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} x=7 \\ y=5 \\ z=3 \end{cases}.$$

15. Madrid, ordinaria 2023

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema $\begin{cases} (a+1)x + 4y = 0 \\ (a-1)y + z = 3 \\ 4x + 2ay + z = 3 \end{cases}$, se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro a.

b) (0.5 puntos) Resolverlo para $a=3$.

c) (0.75 puntos) Resolverlo para $a=5$.

Solución:

a) Sea *A* la matriz de coeficientes *y M* la matriz ampliada.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & 3 \\ 4 & 2a & 1 & 3 \end{array}\right)=M$$

Si rango de *A* = rango de *M* = 3 → sistema compatible determinado: solución única.

Si r(*A*) = r(*M*) < 3 → sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.

Si r(*A*) > r(*M*) → sistema incompatible: no tiene solución

El determinante de A vale $|A| = -a^2 - 2a + 15$.

Se anula si $a = -5$ o $a = 3$ (Soluciones de la ecuación de 2º grado asociada).
Con esto:

- Si $a \neq -5$ y $3 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.

- Si $a = -5$, se tendrá:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 4 & -10 & 1 \end{pmatrix}; \; M = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \\ 4 & -10 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Como en M la cuarta columna depende de la tercera $C4 = 3C3$, el rango de M es igual al rango de A. (También puede verse que, en los dos casos, $F3 = F2 - F1$).

Como $\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$ y $|A| = 0 \Rightarrow$ r(A) = 2 = r(M). Por tanto, el sistema será compatible indeterminado.

- Si $a = 3$, se tendrá:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En ambas matrices se cumple $F3 = F2 + F1$; por tanto, r(A) = 2 = r(M). El sistema vuelve a ser compatible indeterminado.

b) Para $a = 3$ el sistema es compatible indeterminado. Resulta equivalente a:

$$\begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 2y + z = 3 \\ 4x + 6y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 2y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = -4y \\ z = 3 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 3 - 2t \end{cases}.$$

c) Para $a = 5$ el sistema es compatible determinado. Puede resolverse por transformaciones de Gauss.

$$\begin{cases} 6x + 4y = 0 \\ 4y + z = 3 \\ 4x + 10y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3 - E2 \end{matrix} \begin{cases} 6x + 4y = 0 \\ 4y + z = 3 \\ 4x + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 6E3 - 4E1 \end{matrix} \begin{cases} 6x + 4y = 0 \\ 4y + z = 3 \\ 20y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}.$$

16. Murcia, ordinaria 2023

1: Una papelería vende bolígrafos, rotuladores y libretas. Una libreta cuesta el doble que un bolígrafo y un rotulador juntos, un bolígrafo cuesta la sexta parte que una libreta, y un rotulador cuesta el doble que un bolígrafo.

a) **[0,75 p.]** Denotando por x el precio de cada bolígrafo, por y el de cada rotulador y por z el de cada libreta, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.

b) **[0,25 p.]** Justifique que, con estos datos, no se puede conocer el precio de cada uno de los tres productos.

c) **[1 p.]** Calcule el conjunto de todas las posibles soluciones del sistema.

d) **[0,5 p.]** Sabiendo que una libreta cuesta 18 euros, calcule el precio de cada producto.

Solución:

a) Si x, y, z son los precios de un bolígrafo, un rotulador y una libreta, respectivamente, con los datos del enunciado se obtiene:

$z=2(x+y)$ $\to$ una libreta cuesta el doble que un bolígrafo y un rotulador juntos;

$x=\frac{1}{6}z$ $\to$ un bolígrafo cuesta la sexta parte que una libreta;

$y=2z$ $\to$ n rotulador cuesta el doble que un bolígrafo.

Se obtiene el sistema: $\begin{cases} z=2(x+y) \\ x=\frac{1}{6}z \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y-z=0 \\ 6x-z=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$.

b) Se trata de un sistema homogéneo, que siempre tiene solución.

Como el detrminante de la matriz de coeficientes $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2-4+6=0 \Rightarrow$ que el rango de dicha matriz es 2, por lo que el sistema es indeterminado: tiene infinitas soluciones.

c) El sistema inicial es equivalente a

$\begin{cases} 6x-z=0 \\ 2x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=6x \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=6t \end{cases}$, con $t \in \mathbf{R}$.

d) Por lo tanto, si z = 18 € $\Rightarrow$ t = 3 € e y = 6 €.

17. Navarra, ordinaria 2023

P2) Calcula los valores de t para los que el rango de la matriz $A\cdot B$ es máximo, siendo

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & t-1\\ 1 & t & 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}t+1 & 1 & t\\ 0 & t & -2t+1\\ t+1 & t+1 & -t-1\end{pmatrix}$$

(2,5 puntos)

Solución:
El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.
En este caso, la matriz $A\cdot B$ es de orden 3; por tanto, su rango máximo puede valer 3. Para ello, su deteminante debe ser distinto de 0.

Para hallar el rango de la matriz $A\cdot B$ conviene hacer su determinante. Este determinante puede hacerse aplicando la propiedad $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & t-1\\ 1 & t & 1\end{vmatrix}=1;$$

$$|B|=\begin{vmatrix}t+1 & 1 & t\\ 0 & t & -2t+1\\ t+1 & t+1 & -t-1\end{vmatrix}\underset{F3-F1}{=}\begin{vmatrix}t+1 & 1 & t\\ 0 & t & -2t+1\\ 0 & t & -2t-1\end{vmatrix}\to$$ desarrollando por la primera columna $\to$ $|B|=(t+1)\left[t(-2t-1)-t(-2t+1)\right]=(t+1)\cdot(-2t)$.

Por tanto,
$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|=1\cdot(t+1)\cdot(-2t)=-2t(t+1)$ $\to$ este determinante vale 0 si $t = 0$ o $t = -1$.

Luego:
- Si $t\neq 0$ y -1, como $|A\cdot B|\neq 0$, al ser una matriz de orden 3, se tendrá que su rango es 3.
- Si si $t = 0$ o $t = -1$, como $|A\cdot B|=0$, su rango será menor que 3.

Nota: Lo que sigue no se pide, pero puede ayudar a comprender mejor.
Haciendo el producto,

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & t-1\\ 1 & t & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t+1 & 1 & t\\ 0 & t & -2t+1\\ t+1 & t+1 & -t-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t-1 & -t-1 & t+1\\ t^2-1 & t^2+t-1 & -t^2-2t+2\\ 2t+2 & t^2+t+2 & -2t^2+t-1\end{pmatrix}.$$

Para $t = 0$, $A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}$ $\to$ su rango es 2, pues el menor $\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-1\neq 0$.

Para $t = -1$, $A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 2 & -4\end{pmatrix}$ $\to$ su rango es 2, pues el menor $\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-2\neq 0$.

18. País Vasco, ordinaria 2023

Ejercicio A1

Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función del parámetro α:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+\alpha y+z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \end{cases}$$

Resuelve el sistema en los casos $\alpha=1$ y $\alpha=2$.

Solución:

Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)=M\ .$$

Por el teorema de Rouché:

Si r(A) = r(M) = 3 → sistema compatible determinado: solución única.

Si r(A) = r(M) < 3 → sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.

Si r(A) < r(M) → sistema incompatible: no tiene solución

El determinante de A:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=(4\alpha-3)-2\cdot 2+3(3-2\alpha)=-2\alpha+2\,.$$

→ Se anula si α = 1.

Por tanto:

- Si α ≠ 1, como $|A|\neq 0$, el sistema será compatible determinado: r(A) = r(M) = 3.
- Si α = 1, $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)=M$.

Como la columna de términos independientes está repetida, el rango de M es igual al de A. y vale 2, pues $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \Rightarrow$ si α = 1, el sistema será compatible indeterminado.

En este caso, el sistema será

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+y+z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=1-3z \\ x+y=1-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} E1-E2 \\ \end{matrix} \begin{cases} y=-2z \\ x=1+z \end{cases}.$$

(haciendo $z = t$) $\Rightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$.

→ Para α = 2 es sisterma es compatible determinado:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+2y+z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3-2E1 \end{matrix} \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -2z=0 \\ -y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ =0 \end{cases}.$$