ALGUNOS PROBLEMAS DE GEOMETRÍA PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD. ESPAÑA 2022

En este bloque de GEOMETRÍA se resuelven 37 ejercicios. He buscado la mayor diversidad entre todos los propuestos en la Pruebas de Acceso a la Universidad de las 17 Comunidades españolas. El lector atento (profesor/a o estudiante) descubrirá que hay algo de casi todo: que la mayoría de los conceptos presentes en el currículo del Geometría aparecen en esta selección. No obstante, hay algunos problemas que se presentan con mayor frecuencia; entre ellos:
1) Determinación de la ecuación de una recta o de un plano en sus diferentes formas.
2) Cálculo del punto simétrico respecto de un plano o respecto de una recta.
3) Aplicaciones del producto escalar, vectorial y mixto: distancias; ángulos entre rectas y planos; perpendicularidad; áreas y volúmenes.
4) Problemas de dependencia lineal y posiciones relativas de rectas y planos. Perpendicularidad recta/plano.

1. Andalucía, ordinaria 2022

EJERCICIO 7. (2,5 puntos)

Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, 0, -1)$, así como el punto $A(-4, 4, 7)$.

a) Calcula a y b para que el vector $\vec{w} = (1, a, b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(0,75 puntos)**

b) Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\overrightarrow{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas. **(1,75 puntos)**

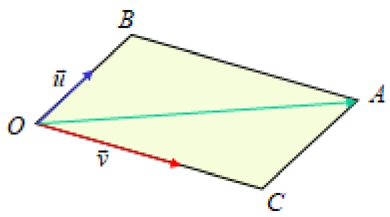
Solución:

a) Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es 0.

- $\vec{u}$ = (–1, 2, 3) será ortogonal a $\vec{w}$ = (1, a, b) si $\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow (-1, 2, 3)\cdot(1, a, b) = 0 \Rightarrow -1+2a+3b=0$.
- $\vec{v}$ = (2, 0, –1) será ortogonal a $\vec{w}$ = (1, a, b) si $\vec{v}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow (2, 0, -1)\cdot(1, a, b) = 0 \Rightarrow 2-b=0 \Rightarrow b=2$.

Sustituyendo b = 2 en $-1+2a+3b=0 \Rightarrow -1+2a+6=0 \Rightarrow a=-\dfrac{5}{2}$.

b) Si los lados del paralelogramo siguen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, entonces, la diagonal $OA=\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$.



Por tanto: $(-4, 4, 7) = \lambda\cdot(-1, 2, 3) + \mu\cdot(2, 0, -1) \Rightarrow$

$$\begin{cases} -4=-\lambda+\mu \\ 4=2\lambda \\ 7=3\lambda-\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=2 \\ \mu=-1 \end{cases}.$$

Luego, los vértices son:

$O(0, 0, 0)$; $A(-4, 4, 7)$; $B(-2,4, 6)$; $C(-2, 0, 1)$.

2. Andalucía, ordinaria 2022

EJERCICIO 8. (2,5 puntos)

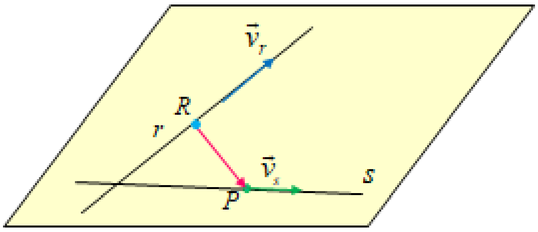
Considera la recta $r \equiv x-2=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$, así como la recta s determinada por el punto $P(1,2,3)$ y el vector director $\vec{v}=(1+a,-a,3a)$.

a) Calcula a para que las rectas r y s se corten. **(1,5 puntos)**

b) Calcula a para que las rectas r y s sean perpendiculares. **(1 punto)**

Solución:

a) Las rectas r y s se cortan cuando están en el mismo plano: esto significa que los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{RP}$ son coplanarios.



$\vec{v}_r=(1,-1,2)$; $\vec{v}_s=(1+a,-a,3a)$;

$R(2,0,1)\in r$;

$\overrightarrow{RP}=(1,2,3)-(2,0,1)=(-1,2,2)$.

Serán coplanarios cuando sean linealmente dependientes, lo que significa que

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1+a & -a & 3a \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -8a+(2+2a+3a)+2(2+2a-a)=0 \Rightarrow -a+6=0 \Rightarrow a=6.$$

b) Las rectas serán perpendiculares cuando sus vectores de dirección lo sean; lo que significa que su producto escalar es 0: $\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s=0$.

$$\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s=(1,-1,2)\cdot(1+a,-a,3a)=1+a+a+6a=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{8}.$$

3. Aragón, ordinaria 2022

9)

a) (1 punto) Dados los siguientes vectores: $\vec{v}_1 = a\,\vec{u}_1 - 2\,\vec{u}_2 + 3\,\vec{u}_3$, $\vec{v}_2 = -\vec{u}_1 + a\,\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ sean ortogonales, sabiendo que los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ son ortogonales y de módulo igual a 1.

b) (1 punto) Calcula el volumen del tetraedro formado por los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ siendo

$$\vec{v}_1 = (1,0,-2) \ \ y \ \ \vec{v}_2 = (3,1,0)$$

Solución:

a) Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es 0.

$\vec{v}_1 = a\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$ = $(a, -2, 3)$ será ortogonal a $\vec{v}_2 = -\vec{u}_1 + a\vec{u}_2 + \vec{u}_3$ = $(-1, a, 1)$ si $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$.

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (a, -2, 3) \cdot (-1, a, 1) = 0 \Rightarrow -a - 2a + 3 = 0 \Rightarrow a = 1$.

b) El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan: $\vec{v}_1$ = (1, 0, –2); $\vec{v}_2$ = (3, 1, 0) ; $\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ = (1, 0, –2) + (3, 1, 0) = (4, 1, –2).

Estos tres vectores no determinan un tetraedro, pues son linealmente dependientes: están en el mismo plano.

En efecto:

$$V_T = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{v}_1, \vec{v}_2, v_3\right]\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\left|-2+2\right| = 0.$$

4. Aragón, extraordinaria 2022

8) El volumen de un tetraedro es de 10 unidades cúbicas. Si tres de sus vértices se encuentran en los puntos $A(1,1,1)$, $B(-2,1,0)$ y $C(0,1,3)$, halla las coordenadas del cuarto vértice D sabiendo que se encuentra en el eje Y. Escribe todas las soluciones posibles.

Solución:

El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan. En este caso, los vectores: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$.

Como A(1, 1, 1), B(–2, 1, 0), C(0, 1, 3) y D(0, y, 0), se tiene:

$\overrightarrow{AB}$ = (–2, 1, 0) – (1, 1, 1) = (–3, 0, –1); $\overrightarrow{AC}$ = (0, 1, 3) – (1, 1, 1) = (–1, 0, 2);

$\overrightarrow{AD}$ = (0, y, 0) – (1, 1, 1) = (–1, y – 1, –1).

Luego,

$$V_T = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} -3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & y-1 & -1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\left|-(y-1)(-7)\right| = \frac{1}{6}\left|7y-7\right|.$$

Para que $\frac{1}{6}\left|7y-7\right| = 10 \Rightarrow \begin{cases} 7y-7=60 \\ 7y-7=-60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{67}{7} \\ y = -\dfrac{53}{7} \end{cases}$.

El punto D es cualquiera de los dos siguientes: $D_1\left(0, \ \frac{67}{7}, \ 0\right)$ o $D_2\left(0, \ -\frac{53}{7}, \ 0\right)$.

5. Asturias, ordinaria 2022

BLOQUE 3.B Dados dos planos $\pi \equiv x+y+z=3$, $\pi' \equiv x+y=3$ y el punto $A=(2,1,6)$

(a) **(0.75 puntos)** Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π'.

(b) **(1 punto)** Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π.

(c) **(0.75 puntos)** Calcula el punto A′ simétrico de A respecto del plano π.

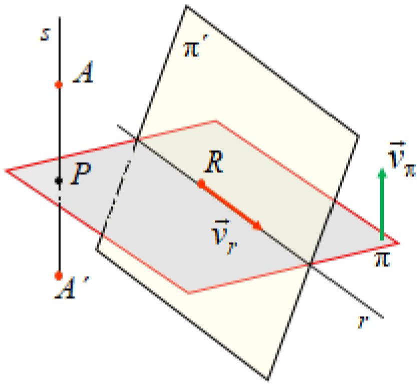
Solución:

(a) Resolviendo el sistema determinado por los dos planos: $\begin{cases} \pi \equiv x+y+z=3 \\ \pi' \equiv x+y=3 \end{cases} \Rightarrow$

$$E1-E2\begin{cases} z=0 \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=3 \\ y=3-x \end{cases} \to (x=t) \Rightarrow r: \begin{cases} x=t \\ y=3-t \\ z=0 \end{cases}.$$

Con esto: el punto $R=(0, 3, 0)$; el vector director, $\vec{v}_r=(1, -1, 0)$.

(b) El punto P pedido es el de intersección del plano π con la recta s perpendicular a él por A.



La ecuación de s es: $s: \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=6+\lambda \end{cases}$,

donde $\vec{v}_s=\vec{v}_\pi=(1, 1, 1)$.

Sustituyendo s en π:

$$(2+\lambda)+(1+\lambda)+(6+\lambda)=3 \Rightarrow \lambda=-2.$$

Por tanto, $P=(0, -1, 4)$.

(c) El punto A', simétrico de A respecto de π, cumple que $\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AP}$.

Luego,

$\overrightarrow{OA'}=(2, 1, 6)+2\cdot[(0, -1, 4)-(2, 1, 6)]=(2, 1, 6)+2\cdot(-2, -2, -2)=(-2, -3, 2)$.

Esto es, $A'=(-2, -3, 2)$.

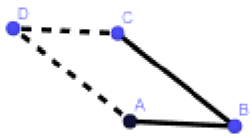
6. Asturias, extraordinaria 2022

BLOQUE 3.B Dados los puntos A = (1, 0, 1), B = (1, 6, 1), C = (−2, −1, 5) y E = (−1, 1, 1).

(a) **(0.5 puntos)** Calcula ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula las coordenadas del punto D para que el polígono ABCD sea un paralelogramo y el area de ABCD.

(c) **(0.75 puntos)** Halla ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por E.



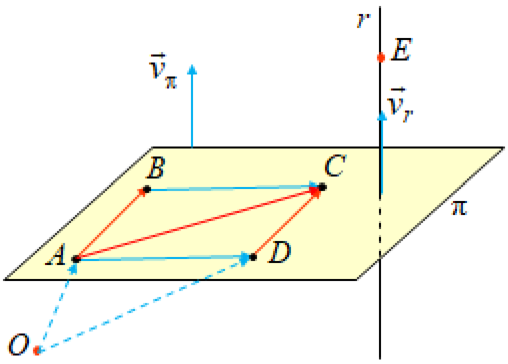
Solución:

a) El plano que contiene a los puntos A, B y C viene determinado por el punto A y los vectores

$\overrightarrow{AB}$ = (1, 6, 1) – (1, 0, 1) = (0, 6, 0) y

$\overrightarrow{AC}$ = (–2, –1, 5) – (1, 0, 1) = (–3, –1, 4).

Sus ecuaciones paramétricas son:



$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 \quad - 3\mu \\ y = \quad 6\lambda - \mu \\ z = 1 \quad + 4\mu \end{cases} \rightarrow$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -3 \\ y & 6 & -1 \\ z-1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 24(x-1) + 18(z-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 4x + 3z - 7 = 0.$$

(b) Si $ABCD$ es un paralelogramo, entonces:

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$, con $\overrightarrow{BC}$ = (–2, –1, 5) – (1, 6, 1) = (–3, –7, 4);

Luego, $\overrightarrow{OD}$ = (1, 0, 1) + (–3, –7, 4) = (–2, –7, 5).

Esto es, D = (–2, –7, 5).

El área del paralelogramo viene dada por $S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (24,\ 0,\ 18) \Rightarrow S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{24^2 + 18^2} = \sqrt{900} = 30\ \text{u}^2.$$

(c) El vector de dirección de r será $\vec{v}_r = \vec{v}_\pi$ = (4, 0, 3).

$$\text{Luego, } r \equiv \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 1 \\ z = 1 + 3t \end{cases}.$$

7. Baleares, ordinaria 2022

5. Del paral·lelogram (quadrilàter els costats oposats del qual són paral·lels) $ABCD$, es coneixen els vèrtexs consecutius $A(1,0,-1)$, $B(2,1,0)$ i $C(4,3,-2)$.

   (a) Calculau el cosinus de l'angle que formen els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. (2 punts)

   (b) Calculau les coordenades del punt mitjà, M, del segment AC. (2 punts)

   (c) Calculau les coordenades del vèrtex D. (4 punts)

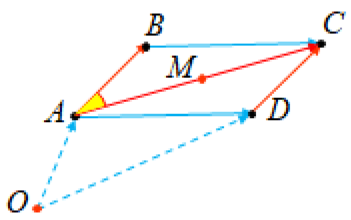
   (d) Calculau l'àrea del paral·lelogram $ABCD$. (2 punts)

Solución:

(a) Si $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$ y $C(4, 3, -2)$, entonces:

$\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0) - (1, 0, -1) = (1, 1, 1)$;

$\overrightarrow{AC} = (4, 3, -2) - (1, 0, -1) = (3, 3, -1)$.



Aplicando el producto escalar:

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(1,1,1)\cdot(3,3,-1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+3^2+(-1)^2}} =$$

$$= \frac{3+3-1}{\sqrt{3\cdot 19}} = \frac{5}{\sqrt{57}}.$$

(b) El punto medio del segmento de extremos $A(a_1, a_2, a_3)$ y $C(c_1, c_2, c_3)$ viene dado por

$$M\left(\frac{a_1+c_1}{2}, \frac{a_2+c_2}{2}, \frac{a_3+c_3}{2}\right).$$

En este caso, $M = \left(\frac{1+4}{2}, \frac{0+3}{2}, \frac{-1-2}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}\right)$.

(c) Si $ABCD$ es un paralelogramo, entonces:

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$, con $\overrightarrow{BC} = (4, 3, -2) - (2, 1, 0) = (2, 2, -2)$;

luego $\overrightarrow{OD} = (1, 0, -1) + (2, 2, -2) = (3, 2, -3)$.

Esto es, $D = (3, 2, -3)$.

(d) El área del paralelogramo $ABCD$ viene dada por $S = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

Como,

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-4,\ 4,\ 0) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}.$$

Luego, la superficie del paralelogramo será: $S = 4\sqrt{2}$ u^2.

8. Baleares, extraordinaria 2022

5. Sigui a un paràmetre real. Considerau el pla $\pi \equiv 3x - 2y - z = 4$, el punt $P(1,1,0)$ i la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y &= 0, \\ x - az &= 1. \end{cases}$$

En cada cas, si existeix, obteniu el valor del paràmetre a per al qual:

(a) el punt P pertany a la recta r. (1 punt)

(b) la recta r i el pla π es tallen en un únic punt. (3 punts)

(c) la recta r està continguda en el pla π. (3 punts)

(d) la recta r és perpendicular al pla π. (3 punts)

Solución:

(a) El punto $P(1, 1, 0)$ pertenecerá a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x - az = 1 \end{cases}$ cuando cumpla sus ecuaciones.

Sustituyendo las coordenadas de P en r se tiene: $r \equiv \begin{cases} 1 - 1 = 0 \\ 1 - a \cdot 0 = 1 \end{cases}$. Siempre se cumple, para cualquier valor de a. Luego, el punto $P \in r$ para todo número real a.

→ La recta y el plano determinan el sistema $\begin{cases} \pi \equiv 3x - 2y - z = 4 \\ r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x - az = 1 \end{cases} \end{cases} \to \begin{cases} 3x - 2y - z = 4 \\ x - y \quad\quad = 0 \\ x \quad\quad - az = 1 \end{cases}$.

(b) La recta y el plano tienen un único punto en común cuando ese sistema sea compatible determinado. Por tanto, el rango de la matriz de coeficientes debe ser 3.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix} = 3a - 2a - 1 = a - 1 \Rightarrow$ su rango es 3 cuando $a \neq 1$.

Luego, la recta corta al plano (en un único punto) siempre que $a \neq 1$.

(c) La recta está contenida en el plano cuando el sistema sea compatible indeterminado. Para eso, r(A) = r(M) = 2, siendo M la matriz ampliada: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -a & 1 \end{array}\right) = M$.

Si $a = 1$, r(A) = 2 y $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) = M$.

Como el menor M, $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow$ el sistema nunca puede ser compatible indeterminado. Por tanto, la recta r nunca estará contenida en el plano π.

(d) La recta *r* será perpendicular al plano π cuando su vector de dirección sea paralelo al vector característico del plano: $\vec{v}_r = m\vec{v}_\pi$.

El vector característico del plano es $\vec{v}_\pi = (3, \ -2, \ -1)$.

Expresando la recta en sus ecuaciones paramétricas, lo que se consigue despejando *y* y *z* en función de *x*, y haciendo *x* = λ.

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ x - az = 1 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\dfrac{1}{a} + \dfrac{\lambda}{a} \end{cases}.$$

El vector de dirección es *r* es $\vec{v}_r = \left(1, \ 1, \ \dfrac{1}{a}\right)$.

Es imposible que los vectores $\vec{v}_\pi = (3, \ -2, \ -1)$ y $\vec{v}_r = \left(1, \ 1, \ \dfrac{1}{a}\right)$ sean paralelos: sus coordenadas no son proporcionales en ningún caso.

9. Canarias, ordinaria 2022

3B. En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones siguientes:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + t + 4s \\ y = 1 + s \\ z = 3 - 2t - 5s \end{cases} ;\ r_1 \equiv \frac{x+4}{5} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-1}{0} ;\ r_2 \equiv \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ y + 4z = 5 \end{cases}$$

a) Calcula la ecuación de la recta s, perpendicular al plano π y que contiene el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2 1.25 ptos

b) ¿Es cierto que el ángulo entre las rectas r_1 y r_2 es menor de 45°? Justifícalo 1.25 ptos

Solución:

a) Ecuaciones paramétricas de las rectas.

$$r_1 \equiv \frac{x+4}{5} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-1}{0} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -5 + 6t \\ z = 1 \end{cases}.$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ y + 4z = 5 \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = -2 + 3h \\ y = 5 - 4h \\ z = \quad h \end{cases}$$. (Se ha despejado y en función de $z = h$; después se ha sustituido en la primera ecuación).

El punto de corte de esas rectas se obtiene resolviendo el sistema: $r_1 \equiv r_2 \to \begin{cases} -4 + 5t = -2 + 3h \\ -5 + 6t = 5 - 4h \\ 1 = h \end{cases}$.

Su solución es $\begin{cases} h = 1 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow$ El punto de intersección de ambas rectas es $P(1, 1, 1)$.

La recta s debe llevar la dirección del vector característico del plano π: $\vec{v}_s = \vec{v}_\pi$.

Como $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + t + 4s \\ y = 1 + s \\ z = 3 - 2t - 5s \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 4 \\ y-1 & 0 & 1 \\ z-3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\pi \equiv 2\cdot(x-1) - 3\cdot(y-1) + 1\cdot(z-3) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x - 3y + z = 2 \Rightarrow \vec{v}_\pi = (2, -3, 1).$$

Por tanto, la recta perpendicular al plano π y que contiene el punto de corte de las rectas r_1 y r_2 es: $s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$.

b) El ángulo que forman dos rectas es el que forman sus vectores de dirección. Se determina mediante el producto escalar.

$$\cos\left(r_1, r_2\right) = \cos\left(\vec{v}_{r1}, v_{r2}\right) = \frac{\vec{v}_{r1}\cdot\vec{v}_{r2}}{\left|\vec{v}_{r1}\right|\cdot\left|\vec{v}_{r2}\right|} = \frac{(5,6,0)\cdot(3,-4,1)}{\sqrt{5^2+6^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2+1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(r_1, r_2\right) = \frac{-9}{\sqrt{1586}} \approx -0,226 \Rightarrow \left(r_1, r_2\right) = \arccos(-0,226) = 103,06^{\circ} \sim 76,94^{\circ}.$$

10. Canarias, extraordinaria 2022

3B. En el espacio tridimensional se conocen las ecuaciones de la recta y el plano siguientes: $r \equiv \begin{cases} -3x+2y=5 \\ -4y+3z+7=0 \end{cases}$ y $\pi \equiv 5x-6y+7z+58=0$

a) Sabiendo que la recta r y el plano π se cortan en un punto A, dar la ecuación de la recta s, perpendicular al plano π que pasa por dicho punto A — 1.5 ptos

b) Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π — 1 pto

Solución:

a) El punto de corte de la recta $r \equiv \begin{cases} -3x+2y=5 \\ -4y+3z+7=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 5x-6y+7z+58=0$ es la solución del sistema $\begin{cases} \pi \equiv 5x-6y+7z+58 \\ r \equiv \begin{cases} -3x+2y=5 \\ -4y+3z+7=0 \end{cases} \end{cases} \to \begin{cases} 5x-6y+7z=-58 \\ -3x+2y \quad =5 \\ \quad -4y+3z=-7 \end{cases}$.

Puede resolverse por sustitución (despejando x y z en función de y…):

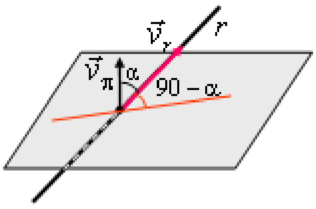
$$\begin{cases} 5x-6y+7z=-58 \\ x=\dfrac{2y-5}{3} \\ z=\dfrac{-7+4y}{3} \end{cases} \Rightarrow 5\cdot\frac{2y-5}{3}-6y+7\cdot\frac{-7+4y}{3}=-58 \Rightarrow y=-5;\ x=-5;\ z=-9.$$

Por tanto, $A = (-5, -5, -9)$.

El vector de dirección de s es el normal al plano: $\vec{v}_s=\vec{v}_\pi = (5, -6, 7)$.

Por tanto, las ecuaciones de s son: $s \equiv \begin{cases} x=-5+5t \\ y=-5-6t \\ z=-9+7t \end{cases}$.

b) El ángulo que forma una recta con un plano es el complementario del que determinan los vectores $\vec{v}_r$, de dirección de la recta, con $\vec{v}_\pi$, normal al plano.



Por tanto, el seno del ángulo (r, π),

$$\text{sen}\ (r,\ \pi) = \cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi|\cdot|\vec{v}_r|}.$$

En nuestro caso:

$$\vec{v}_r = (-3, 2, 0) \times (0, -4, 3) = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = (6,\ 9,\ 12).$$

Luego, $\text{sen}\ (r, \pi) = \dfrac{(6,\ 9,\ 12)\cdot(5,\ -6,\ 7)}{\sqrt{36+81+144}\cdot\sqrt{25+36+49}} = \dfrac{60}{\sqrt{28710}} \approx 0{,}3541 \Rightarrow$

ángulo(r, π) = arccos(0,3541) = 69,26º.

11. Cantabria, ordinaria 2022

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

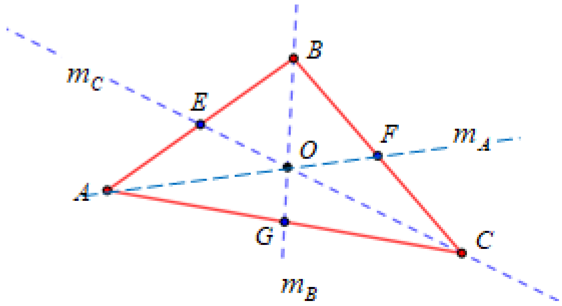
Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice. Considere el triángulo de vértices $A = (-1,2,3)$, $B = (3,-4,1)$, $C = (1,-4,5)$.

A. [1,5 PUNTOS] Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo ABC.

B. [1 PUNTO] Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

Solución:

La situación es la que se indica en la figura adjunta.



- Mediana m_C:

Punto medio del lado AB,

$$E = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2-4}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (1,-1,2).$$

Vector de dirección,

$$\overrightarrow{EC} = (1, -4, 5) - (1, -1, 2) = (0, -3, 3).$$

Luego, la mediana es: $m_C \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -4-3t \\ z = 5+3t \end{cases}$.

- Mediana m_A:

Punto medio del lado BC, $F = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{-4-4}{2}, \frac{1+5}{2}\right) = (2,-4,3)$.

Vector de dirección, $\overrightarrow{FA} = (-1, 2, 3) - (2, -4, 3) = (-3, 6, 0)$.

Luego, la mediana es: $m_A \equiv \begin{cases} x = -1-3h \\ y = 2+6h \\ z = 3 \end{cases}$.

- Mediana m_B:

Punto medio del lado AC, $G = \left(\frac{-1+1}{2}, \frac{2-4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = (0,-1,4)$.

Vector de dirección, $\overrightarrow{GB} = (3, -4, 1) - (0, -1, 4) = (3, -3, -3)$.

Luego, la mediana es: $m_B \equiv \begin{cases} x = 3+3p \\ y = -4-3p \\ z = 1-3p \end{cases}$.

Corte de las medianas m_C con m_A. Se igualan las coordenadas genéricas de ambas rectas y se resuelve el sistema.

$$\begin{cases} 1 = -1-3h \\ -4-3t = 2+6h \\ 5+3t = 3 \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{2}{3} \text{ y } h = -\frac{2}{3}.$$

Por tanto, se cortan en $O = (1, -2, 3)$, que se obtiene sustituyendo el valor de t en m_C.

→ Este punto O pertenece también a la tercera mediana m_B. Se obtiene para $p = -\frac{2}{3}$.

La coincidencia de los valores de t, h y p es eso, una coincidencia.

12. Cantabria, ordinaria 2022

Ejercicio 7 [2,5 PUNTOS]

Los puntos A = (2, 0, 0), B = (–1, 12, 4) son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice se encuentra en la recta

$$r = \begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$$

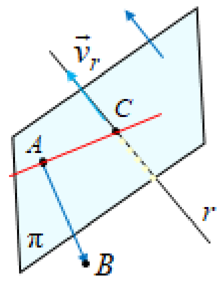
A. [1,5 PUNTOS] Calcule las coordenadas del tercer vértice *C*, sabiendo que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por los puntos *A* y *C*.

B. [0,5 PUNTOS] Determine el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

C. [0,5 PUNTOS] Calcule el área del triángulo *ABC*.

Solución:

A. La situación es la que se indica en la figura adjunta.



La recta *r* se expresa en paramétricas haciendo *x* = *t* y despejando:

$$r \equiv \begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 11 - \frac{4}{3}t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \left(1, 0, -\frac{4}{3}\right).$$

El punto *C* buscado es el de corte del plano π, perpendicular a *r* que contiene a *A*, con la recta *r*.

El vector característico de ese plano es el de dirección de la recta: $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r = \left(1, 0, -\frac{4}{3}\right)$.

Su ecuación será: $\pi \equiv 1\cdot(x-2) + 0\cdot(y-0) - \frac{4}{3}\cdot(z-0) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 3x - 4z = 6$.

Sustituyendo las ecuaciones de *r* en π se obtiene *C*.

$$\pi \equiv 3t - 4\left(11 - \frac{4}{3}t\right) = 6 \Rightarrow t = 6.$$

Por tanto, *C* = (6, 0, 3).

Puede verse que $\overrightarrow{AC}$ = (6, 0, 3) – (2, 0, 0) = (4, 0, 3) es perpendicular a la recta, pues:

$$\overrightarrow{AC}\cdot\vec{v}_r = (4, 0, 3)\cdot\left(1, 0, -\frac{4}{3}\right) = 4 - 4 = 0.$$

B. Los vectores que determinan son:

$\overrightarrow{AB}$ = (–1, 1, 4) – (2, 0, 0) = (–3, 12, 4); $\overrightarrow{AC}$ = (4, 0, 3).

Aplicando el producto escalar:

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(-3, 12, 4)\cdot(4, 0, 3)}{\sqrt{(-3)^2 + 12^2 + 4^2}\cdot\sqrt{4^2 + 3^2}} = 0 \Rightarrow \text{son perpendiculares.}$$

C. La superficie del triángulo de vértices *ABC* es $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$.

Como $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ -3 & 12 & 4\\ 4 & 0 & 3\end{vmatrix}=(36,25,-48)\Rightarrow$

$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{36^2+25^2+(-48)^2}=\sqrt{4425}=65$.

Luego, la superficie del triángulo será: $S=32,5$ u^2.

13. Castilla La Mancha, ordinaria 2022

4. Sean las rectas

$$r\equiv\begin{cases}x = 2\lambda\\ y=-\lambda\\ z=a\end{cases},\quad s\equiv\begin{cases}x=-1\\ y=\mu\\ z=-5\mu\end{cases},$$

donde λ y μ son los parámetros y $a\in\mathbb{R}$.

a) **[1,5 puntos]** Estudia su posición relativa en función de los valores que toma *a*.

b) **[1 punto]** Encuentra razonadamente un plano que contenga a *s* y que sea paralelo a *r*.

Solución:

a) $r\equiv\begin{cases}x=2\lambda\\ y=-\lambda\\ z=a\end{cases}$ → Un punto de *r* es *R* = (0, 0, *a*); su vector de dirección, $\vec{v}_r$ = (2, –1, 0).

$s\equiv\begin{cases}x=-1\\ y=\mu\\ z=-5\mu\end{cases}$ → Un punto de *s* es *S* = (–1, 0, 0); su vector de dirección, $\vec{v}_s$ = (0, 1, –5).

Estudiando la dependencia lineal de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{RS}$, siendo $R\in r$ y $S\in s$, se determina la posición relativa de ambas rectas: si esos vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan; si son linealmente dependientes, están en el mismo plano.

Como $\overrightarrow{RS}$ = (–1, 0, 0) – (0, 0, *a*) = (–1, 0, –*a*), se tiene que

$$\left[\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{RS}\right]=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -5\\ -1 & 0 & -a\end{vmatrix}=-2a-5\to\text{se anula si } a=-\frac{5}{2}.$$

Por tanto:

- Si $a\neq-\frac{5}{2}$, los vectores serán linealmente independientes → las rectas se cruzan.
- Si $a=-\frac{5}{2}$, las rectas están en el mismo plano. En este caso, $\overrightarrow{RS}=\left(-1,0,\frac{5}{2}\right)$, que no es

proporcional a ninguno de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$; luego, las rectas se cortarán.

b) El plano viene determinado por la recta *s* y por el vector $\vec{v}_r$.

Sus ecuaciones serán:

$$\pi\equiv\begin{cases}x=-1 & +2\lambda\\ y= & \mu-\lambda\\ z= & -5\mu\end{cases}\Leftrightarrow\pi\equiv\begin{vmatrix}x+1 & 0 & 2\\ y & 1 & -1\\ z & -5 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow\pi\equiv5x+10y+2z+5=0.$$

14. Castilla La Mancha, extraordinaria 2022

4. Sea el punto $A = (1, 0, 1)$ y el plano $\pi \equiv x + y + z = 8$.

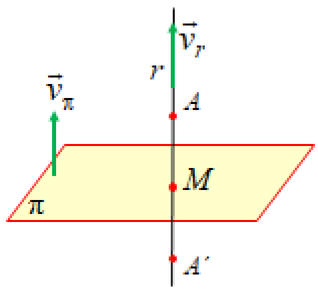
a) **[1,5 puntos]** Calcula la recta perpendicular a π y que pasa por A. ¿En qué punto se cortan la recta y el plano?

b) **[1 punto]** Obtén el punto de la recta anterior distinto de A que dista de π igual que A, es decir, el punto simétrico de A con respecto a π.

Solución:

a) El vector de dirección de r es el normal al plano: $\vec{v}_r = \vec{v}_\pi$ = (1, 1, 1).

Por tanto, sus ecuaciones son: $r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \quad \lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$,



El punto de corte se obtiene sustituyendo las ecuaciones de r en π:

$$\pi \equiv (1+\lambda)+\lambda+(1+\lambda)=8 \Rightarrow 3\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 2.$$

Por tanto, M = (3, 2, 3).

b) Sea $A' = (x_0, y_0, z_0)$ el simétrico de A respecto de π. Entonces, M debe ser el punto medio entre A y A'.

$$M = (3, 2, 3) = \left(\frac{1+x_0}{2}, \frac{y_0}{2}, \frac{1+z_0}{2}\right) \Rightarrow$$

$$3 = \frac{1+x_0}{2} \Rightarrow x_0 = 5;\ 2 = \frac{y_0}{2} \Rightarrow y_0 = 4;\ 3 = \frac{1+z_0}{2} \Rightarrow z_0 = 5.$$

Por tanto, A' = (5, 4, 5).

15. Castilla y León, ordinaria 2022

E3.- (Geometría)

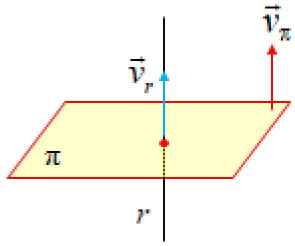
a) Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{4}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + mz = 0$, calcule m para que la recta y el plano sean perpendiculares. **(1 punto)**

b) Calcule el plano perpendicular a los planos $\pi \equiv x + y + z = 1$ y $\pi_1 \equiv x - y + z = 2$, que pasa por el punto $(1,2,3)$. **(1 punto)**

Solución:

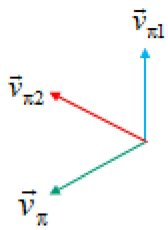
a) Una recta es perpendicular a un plano cuando el vector de dirección de la recta es paralelo al vector característico del plano: cuando $\vec{v}_r = k\cdot\vec{v}_\pi$.

Como $\vec{v}_r$ = (2, 1, 4) y $\vec{v}_\pi$ = (2, 1, m), para que $\vec{v}_r = k\cdot\vec{v}_\pi$ es necesario que m = 4.



b) El vector característico del plano π_2, perpendicular a π y π_1, debe ser perpendicular a $\vec{v}_\pi$ = (1, 1, 1) y $\vec{v}_{\pi1}$ = (1, –1, 1), vectores característicos de π y π_1, respectivamente. Por tanto, $\vec{v}_{\pi2} = \vec{v}_\pi \times \vec{v}_{\pi1}$.

$$\vec{v}_{\pi2} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 0, -2).$$



Luego, $\pi_2 \equiv 2x - 2z = d$.

Como debe pasar por el punto (1, 2, 3) $\Rightarrow$ $2\cdot1 - 2\cdot3 = d \Rightarrow d = -4$. Por tanto, el plano buscado es $\pi_2 \equiv 2x - 2z = -4 \Leftrightarrow \pi_2 \equiv x - z = -2$.

16. Castilla y León, extraordinaria 2022

E4.- (Geometría)

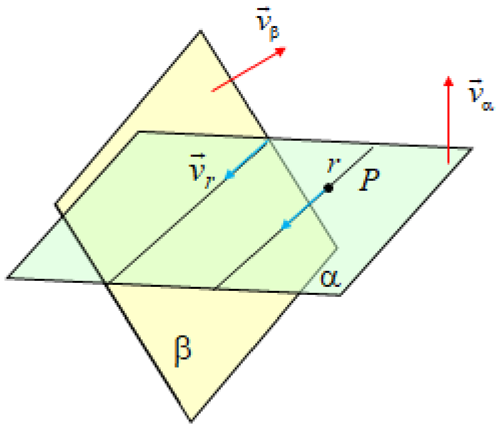
a) Encuéntrense las ecuaciones de la recta que está contenida en el plano $\alpha \equiv x - y = 0$, es paralela al plano $\beta \equiv 2x - 3y + z = 4$ y pasa por el punto P = (1, 1, 3). **(1 punto)**

b) Hállese la ecuación del plano que es paralelo a $r \equiv x - 1 = y + 2 = \frac{z-1}{2}$ y pasa por los puntos A = (0, 3, 1) y B = (-2, 1, -1). **(1 punto)**

Solución:

a) El vector de dirección de la recta buscada debe ser debe ser perpendicular a $\vec{v}_\alpha = (1, -1, 0)$ y $\vec{v}_\beta = (2, -3, 1)$, vectores característicos de los planos α y β, respectivamente. Por tanto, $\vec{v}_r = \vec{v}_\alpha \times \vec{v}_\beta$.

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, -1) \equiv (1, 1, 1).$$



Como la recta debe contener al punto $P = (1, 1, 3)$, sus ecuaciones paramétricas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}.$$

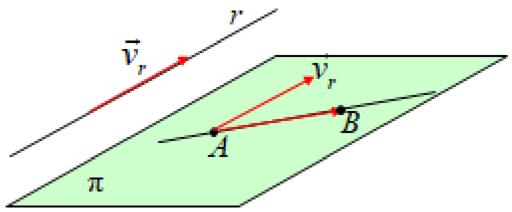
b) El plano pedido está determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{v}_r$, y por el punto A.

$\overrightarrow{AB} = (-2, 1, -1) - (0, 3, 1) = (-2, -2, -2) \equiv (1, 1, 1)$; $\vec{v}_r = (1, 1, 2)$.

Su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-3 & 1 & 1 \\ z-1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x - (y-3) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - y + 3 = 0.$$



17. Cataluña, ordinaria 2022

5. Siguin els punts $A = (0, 0, 1)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (-1, -1, 1)$ i $D = (1, 0, 1)$.

   a) Comproveu que tres d'aquests punts estan alineats. Determineu quins són els tres punts i calculeu l'equació contínua i l'equació paramètrica de la recta que defineixen.
   [1,25 punts]

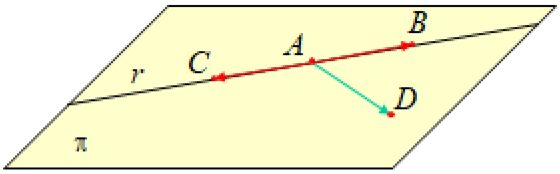
   b) Calculeu l'equació general o cartesiana del pla que determinen els quatre punts.
   [1,25 punts]

Solución:

a) Si $A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 1)$, $C(-1, -1, 1)$ y $D(1, 0, 1)$, entonces:

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) - (0, 0, 1) = (1, 1, 0)$;

$\overrightarrow{AC} = (-1, -1, 1) - (0, 0, 1) = (-1, -1, 0)$.



Como puede observarse, $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$. Por tanto, los puntos A, B y C está alineados.

La recta que definen es: $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$.

b) El vector $\overrightarrow{AD} = (1, 0, 1) - (0, 0, 1) = (1, 0, 0)$; luego, D no está alineado con A y B. Por tanto, los puntos A, B y D determinan un plano de ecuación:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ z-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -(z-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv z = 1.$$

18. Cataluña, extraordinaria 2022

1. El mástil que sostiene la lona de la carpa de un circo se sitúa perpendicularmente sobre el plano de un suelo cuya ecuación es π: $x - z = 6$. Se sabe que la cúpula de la carpa (el punto más elevado por el que pasa el mástil) está en el punto de coordenadas $P = (30, 1, 0)$.

   a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que contiene el mástil.
   [1 punto]

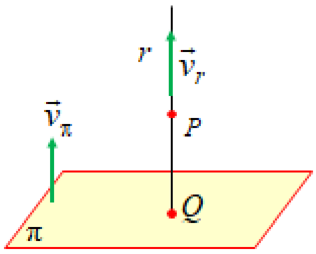
   b) Calcule las coordenadas del punto de contacto del mástil con el suelo, y la longitud del mástil.
   [1,5 puntos]

Solución:

a) La recta que contiene al mástil es perpendicular al plano $\pi: x - z = 6$ y pasa por el punto $P = (30, 1, 0)$.

Por tanto, su vector de dirección es el normal al plano:

$\vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (1, 0, -1)$.



Sus ecuaciones paramétricas serán: $r: \begin{cases} x = 30 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases}$.

b) El punto de contacto del mástil con el suelo es el de corte de la recta r con el plano π. Se encuentra sustituyendo las ecuaciones de en π:

$\pi: 30 + \lambda - (-\lambda) = 6 \Rightarrow 2\lambda = -24 \Rightarrow \lambda = -12$.

Por tanto, $Q = (18, 1, 12)$.
Su longitud es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ} = (18, 1, 12) - (30, 1, 0) = (-12, 0, 12)$.

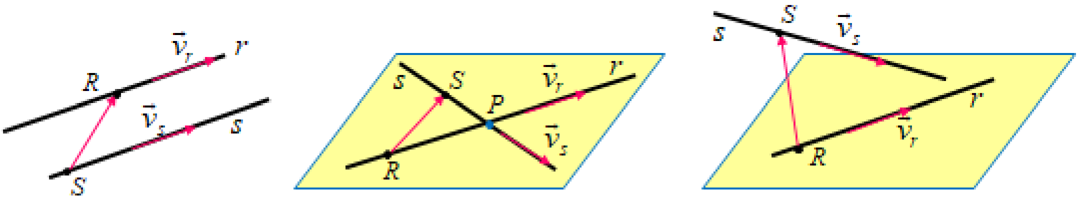
$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(-12)^2 + 12^2} = 12\sqrt{2}.$$

<u>**19**. Comunidad Valenciana, ordinaria 2022</u>

Problema 3. Dadas las rectas $r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$.

a) Indicar justificadamente la posición relativa de r y s. (5 puntos)
b) Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s. (5 puntos)

<u>Solución</u>:
a) La posición relativa de dos rectas se determina estudiando la relación de dependencia lineal de tres vectores: los de dirección de cada recta y cualquier vector determinado por dos puntos arbitrarios, uno de r y otro de s. Esto es: $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{RS}$, siendo $R \in r$ y $S \in s$.



Obteniéndose:
- Rectas paralelas → los vectores de dirección son paralelos: $\vec{v}_r = k \cdot \vec{v}_s$.
- Si, además, $\vec{v}_r = \overrightarrow{RS}$, las rectas coinciden.
- Las rectas se cortan (son secantes) → los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{RS}$ son linealmente dependientes, pues los tres están en el mismo plano.
- Las rectas se cruzan → los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{RS}$ son linealmente independientes, pues los tres vectores no están en el mismo plano.

En este caso, las rectas son:

$$r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases} \Rightarrow (z = t) \to r: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = t \end{cases} \to \vec{v}_r = (1, -3, 1);\ R = (-1, 2, 0).$$

$$s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases} \Rightarrow (z = h) \to r: \begin{cases} x = 4 - 5h \\ y = -3 + 4h \\ z = h \end{cases} \to\ \to \vec{v}_s = (-5, 4, 1);\ S = (4, -3, 0).$$

$$\overrightarrow{RS} = (4, -3, 0) - (-1, 2, 0) = (5, -5, 0).$$

Como $\left[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{RS}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ 5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 5 - 15 + 5 = -5 \neq 0 \Rightarrow$ las rectas se cruzan.

b)) La recta pedida se obtiene por intersección de los planos π_r, que contiene a r y pasa por el origen, y π_s, que contiene a s y pasa por el origen.
Plano π_r:
Determinado por $O(0, 0, 0)$ y por los vectores $\overrightarrow{OR} = (-1, 2, 0)$ y $\vec{v}_r = (1, -3, 1)$; el punto $R(-1, 2, 0)$ pertenece a la recta r.

Su ecuación es:

$$\pi_r: \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ y & 2 & -3 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_r : 2x + y + z = 0 .$$

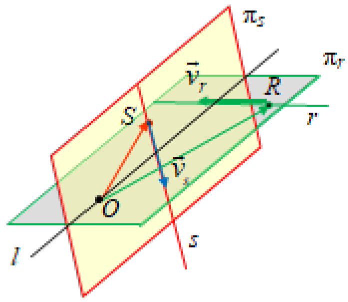
Plano π_s:

Determinado por $O(0, 0, 0)$ y por los vectores $\overrightarrow{OS}$ = (4, –3, 0) y $\vec{v}_s$ = (–5, 4, 1); el punto S(4, –3, 0) pertenece a la recta s.

Su ecuación es:

$$\pi_s: \begin{vmatrix} x & 4 & -5 \\ y & -3 & 4 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_s : 3x + 4y - z = 0 .$$

Por tanto, $l : \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases}$.



20. Comunidad Valenciana, extraordinaria 2022

Problema 4. Dados los puntos $A = (2,1,-2)$ y $B = (3,2,3)$, y el plano π definido por $2x + 2y + z = 3$, obtener:

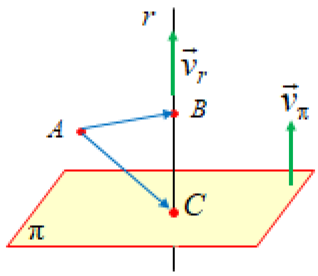
a) El punto de corte C entre el plano π y la recta perpendicular a π que pasa por B. (5 puntos)

b) El área del triángulo cuyos vértices son A, B y C. (5 puntos)

Solución:

a) La recta r, perpendicular al plano $\pi : 2x + 2y + z = 3$, que pasa por el punto B = (3, 2, 3), tiene de vector de dirección el característico del plano: $\vec{v}_r = \vec{v}_\pi$ = (2, 2, 1).

Por tanto, sus ecuaciones paramétricas serán: $r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$.



El punto de corte de la recta con el plano se encuentra sustituyendo las ecuaciones de r en en π:

$$\pi : 2\cdot(3 + 2\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + (3 + \lambda) = 3 \Rightarrow 9\lambda = -10 \Rightarrow \lambda = -\frac{10}{9} .$$

Por tanto, $C = \left(3 - \frac{20}{9}, 2 - \frac{20}{9}, 3 - \frac{10}{9}\right) = \left(\frac{7}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{17}{9}\right)$.

b) La superficie del triángulo de vértices ABC es $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$.

$\overrightarrow{AB}$ = (3, 2, 3) – (2, 1, –2) = (1, 1, 5); $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{7}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{17}{9}\right) - (2,1,-2) = \left(-\frac{11}{9}, -\frac{11}{9}, \frac{35}{9}\right)$.

Como $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & 5 \\ -11/9 & -11/9 & 35/9 \end{vmatrix} = (10, 10, 0) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$.

Luego, la superficie del triángulo será: $S = 5\sqrt{2}$ u^2.

21. Extremadura, ordinaria 2022

3. Dados el plano π de ecuación $x+2y-z=0$ y r la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} y-2x=1 \\ x-\ \ z=0. \end{cases}$

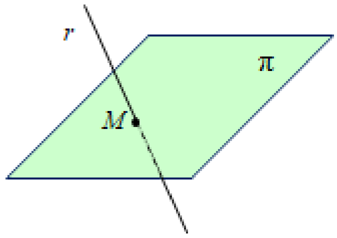
a) Hallar el punto de intersección del plano π y la recta r. (1 punto)

b) Calcular la distancia del origen a la recta r. (1 punto)

Solución:

a) El punto de intersección se encuentra sustituyendo las ecuaciones de en π.
Expresando r en paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} y-2x=1 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow (x=t) \to r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=1+2t \\ z=t \end{cases}$$, se tiene:

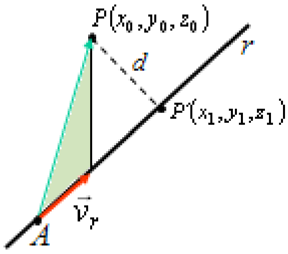


$$\pi \equiv t+2(1+2t)-t=0 \Rightarrow 4t=-2 \Rightarrow t=-\frac{1}{2}.$$

Para $t = 1$, $M=\left(-\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)$.

b) La distancia de un punto P a una recta r es:

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|},\ \text{ siendo } A\in r.$$



En este caso:

$A = (0, 1, 0)$, $P = (0, 0, 0)$, $\overrightarrow{AP} = (0, -1, 0)$, $\vec{v}_r = (1, 2, 1)$.

El producto vectorial vale:

$$\overrightarrow{AP}\times\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1,\ 0,\ 1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}_r\right| = \sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

El módulo de $\vec{v}_r$: $\left|\vec{v}_r\right| = \sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$.

Luego, $d(P,r)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

22. Extremadura, extraordinaria 2022

3. Dados los puntos $A=(0,0,2)$ y $B=(1,1,0)$ y la recta $r:\begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}$. (2 puntos)

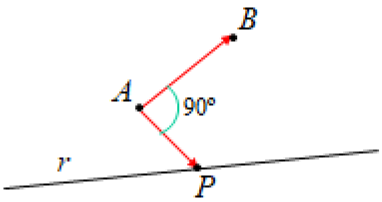
Calcular un punto $P\in r$ para que el triángulo ABP tenga un ángulo recto en el punto A.

Solución:

Expresando *r* en paramétricas:

$$r:\begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases} \Rightarrow (y=t) \to r:\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=t \end{cases}.$$

Un punto genérico de *r* es $P=(1,\ t,\ t)$.



El triángulo *ABP* tendrá un ángulo recto en *A* cuando los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AP}$ sean perpendiculares; para ello su producto escalar debe ser 0.

$\overrightarrow{AB}$ = (1, 1, 0) – (0, 0, 2) = (1, 1, –2); $\overrightarrow{AP} = (1,\ t,\ t)-(0,\ 0,\ 2)=(1,\ t,\ t-2)$;

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=0 \Rightarrow (1,\ t,\ t-2)\cdot(1,\ 1,\ -2)=1+t-2t+4=0 \Rightarrow t=5$.

Por tanto, *P* = (1, 5, 5).

23. Galicia, ordinaria 2022

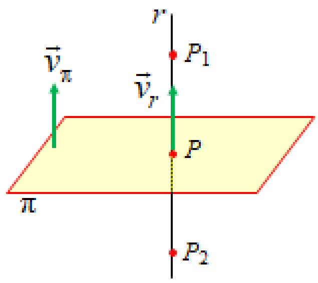
5. Geometría

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $P(1,-1,0)$ y es perpendicular a la recta $r:\begin{cases} x = 1+\lambda, \\ y = -1, \\ z = 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

b) Calcule los dos puntos de la recta $r:\begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \lambda, \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$, cuya distancia al plano $\pi: x-1=0$ es igual a 2.

Solución:

a) El vector característico (normal) del plano pedido debe ser el de dirección de la recta: $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (1, 0, 0)$.



Por tanto, su ecuación será:

$$\pi: 1\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z + d = 0 \Rightarrow \pi: x + d = 0.$$

Como el punto $P(1, -1, 0) \in \pi$, entonces, sustituyendo,

$$\pi: 1 + d = 0 \Rightarrow d = -1.$$

Por tanto, el plano pedido es $\pi: x - 1 = 0$.

b) La distancia de un punto a un plano viene dada por la expresión:

$$d\left(P(x_0, y_0, z_0), \pi: ax+by+cz+d=0\right) = \left|\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$

Como la recta tiene por ecuaciones,

$r:\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, entonces, un punto genérico de ella es $P(\lambda, \lambda, \lambda)$.

Se desea que $d(P, \pi) = 2$, siendo $\pi: x - 1 = 0$.

Por tanto,

$$d(P,\pi) = \left|\frac{\lambda - 1}{\sqrt{1}}\right| = 2 \Rightarrow |\lambda - 1| = 2 \Rightarrow \lambda = -1 \text{ o } \lambda = 3.$$

Para $\lambda = -1 \Rightarrow P_1 = (-1, -1, -1)$.

Para $\lambda = 3 \Rightarrow P_2 = (3, 3, 3)$.

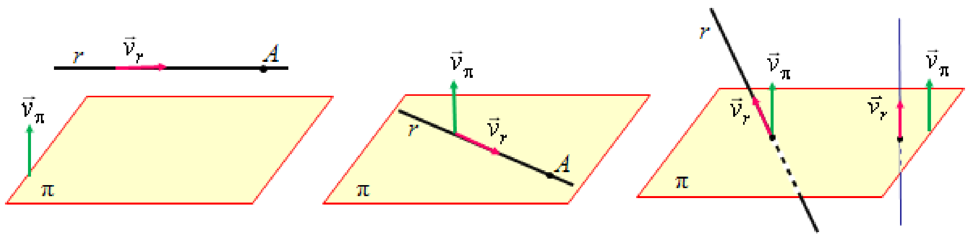
24. Galicia, extraordinaria 2022

6. Geometría

Estudie la posición relativa de la recta $r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3}$ y el plano $\pi: ax + 4y + 3az + 2 = 0$ en función de los parámetros k y a. Luego, si es posible, diga cuándo r es perpendicular a π.

Solución:

Las posiciones relativas de una recta y un plano se hallan estudiando la situación de los vectores de dirección de la recta, $\vec{v}_r$, y el normal al plano, $\vec{v}_\pi$.



- La recta es paralela al plano $\to$ El vector de dirección de la recta es perpendicular al vector característico del plano. Por tanto, $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = 0$. Además, si $A \in r \Rightarrow A \notin \pi$.
- La recta está contenida en el plano $\to$ También $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = 0$. Además, si $A \in r \Rightarrow A \in \pi$.
- La recta corta al plano $\to$ Los vectores $\vec{v}_\pi$ y $\vec{v}_r$ no son perpendiculares. Por tanto,

$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi \neq 0$. (Un caso particularmente interesante se da cuando la recta es perpendicular al plano: debe cumplirse que $\vec{v}_r = k\cdot\vec{v}_\pi$).

En este caso:

$$r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{k} = \frac{z}{3} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, k, 3);\ \pi: ax+4y+3az+2=0 \Rightarrow \vec{v}_\pi = (a, 4, 3a).$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = (1, k, 3)\cdot(a, 4, 3a) = a+4k+9a = 10a+4k.$$

Con esto:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = 0 \text{ cuando } 10a+4k=0 \Rightarrow k = -\frac{5}{2}a.$$

Luego:

- si $k = -\frac{5}{2}a$ se tendrá que la recta es paralela o está contenida en el plano;
- si $k \neq -\frac{5}{2}a$ la recta y el plano se cortan en un solo punto.

$\to$ Estará contenida en el plano si el punto $A = (-1, 1, 0) \in r$ también pertenece a π.
Para ello, $a\cdot(-1)+4\cdot1+3a\cdot0z+2=0 \Rightarrow a=6$.

Por tanto:

- si $a = 6 \Rightarrow k=-15$: la recta está contenida en el plano;
- si $a \neq 6$ y $k = -\frac{5}{2}a$ la recta será paralela al plano.

- La recta es perpendicular al plano: debe cumplirse que $\vec{v}_r = k\cdot\vec{v}_\pi$. Esto significa que:

$$\frac{1}{a} = \frac{k}{4} = \frac{3}{3a} \Rightarrow ak = 4.$$

La recta es perpendicular al plano cuando $ak = 4$.
(Por ejemplo, si $a = 2$ y $k = 2$, los vectores son $\vec{v}_r = (1, 2, 3)$ y $\vec{v}_\pi = (2, 4, 6)$, que son proporcionales; uno es doble que el otro).

25. La Rioja, ordinaria 2022

8.– (2 puntos) Determina los valores de los parámetros a, y b para que el plano π contenga a la recta r, donde:

$$\pi \equiv ax + y + z = b, \qquad r \equiv \begin{cases} x + y + z & = 1, \\ -x - 2y + z & = 0. \end{cases}$$

Solución:

La manera más inmediata de determinar cada una de estas posiciones es estudiar el sistema asociado, que es: $\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases} \\ \pi \equiv ax + y + z = b \end{cases}$.

- Si el sistema es incompatible, la recta es paralela al plano.
- Si el sistema es compatible indeterminado, la recta está contenida en el plano.
- Si el sistema es compatible determinado, la recta corta (atraviesa) al plano. El punto de corte de una recta y un plano es la solución del sistema.

(También puede estudiarse vectorialmente, como se ha hecho en el problema anterior).

Las matrices, de coeficientes y ampliada del sistema, son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & b \end{array}\right) = M$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 1 + a - 1 + 2a = 3a - 3.$$

Este determinante vale 0 si $a = 1$.

Por tanto:

- Si $a \neq 1 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado: la recta corta al plano, independientemente del valor que tome b.
- Si $a = 1$ se tendrá: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right) = M$.

El rango de A es 2, pues $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Como el menor de M, $|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = b + 2b - 3 = 3b - 3$, el rango de M es 2 si b =1; será 3, si $b \neq 1$.

Luego:

- Si a = 1 y b = 1, el sistema es compatible indeterminado: la recta está contenida en el plano.
- Si a = 1, pero $b \neq 1$, el sistema es incompatible: la recta será paralela al plano.

26. Madrid, ordinaria 2022

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Con un dispositivo láser situado en el punto $P(1,1,1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases}$.

a) (0.5 puntos) Calcule un vector director de r y la posición de la partícula cuando su trayectoria incide con el plano $z = 0$.

b) (1.25 puntos) Calcule la posición más próxima de la partícula al dispositivo láser.

c) (0.75 puntos) Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x + y = 2$ y la recta r.

Solución:

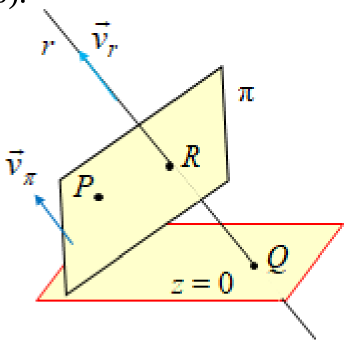
a) Ecuaciones paramétricas de *r*.

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} y = -10 + 2x \\ z = 90 + x \end{cases} \Rightarrow (x = t) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -10 + 2t \\ z = 90 + t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 2, 1).$$

Corte con el plano $z = 0$:

Si $90 + t = 0 \Rightarrow t = -90$.

Por tanto, la posición de la partícula cuando $z = 0$ es $Q(-90, -190, 0)$.



b) Es el punto de corte del plano perpendicular a *r* que pasa por *P* con la recta.

El plano perpendicular a *r* tiene por vector característico $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (1, 2, 1)$.

Su ecuación será:

$$\pi \equiv x + 2y + z + d = 0.$$

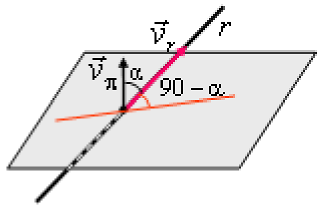
Por pasa por $P(1, 1, 1) \Rightarrow 1 + 2 + 1 + d = 0 \Rightarrow d = -4$.

Luego, $\pi \equiv x + 2y + z - 4 = 0$.

La intersección de π con *r* se obtiene sustituyendo las ecuaciones de *r* en π:

$$t + 2(-1 + 2t) + (90 + t) - 4 = 0 \Rightarrow 6t + 66 = 0 \Rightarrow t = -6.$$

Por tanto, $R(-11, -32, 79)$.



c) El ángulo que forma una recta con un plano es el complementario del que determinan los vectores $\vec{v}_r$, de dirección de la recta, con $\vec{v}_\pi$, normal al plano.

Por tanto, el seno del ángulo (*r*, π),

$$\sin(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|}.$$

Como $\pi' \equiv x + y = 2 \to \vec{v}_{\pi'} = (2, 1, -1)$.

Luego: $\sin(\vec{v}_{\pi'}, \vec{v}_r) = \dfrac{(1,\ 1,\ 0) \cdot (1,\ 2,\ 1)}{\sqrt{1+1} \cdot \sqrt{1+4+1}} = \dfrac{1+2}{\sqrt{12}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ ángulo(*r*, π´) = 60º.

27. Madrid, ordinaria 2022

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$, la recta $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases}$ y el punto $P(0, 1, 0)$.

a) (0.5 puntos) Verifique que la recta r_1 está contenida en el plano π y que el punto P pertenece al mismo plano.

b) (0.75 puntos) Halle una ecuación de la recta contenida en el plano π que pase por P y sea perpendicular a r_1.

c) (1.25 puntos) Calcule una ecuación de la recta, r_2, que pase por P y sea paralela a r_1. Halle el área de un cuadrado que tenga dos de sus lados sobre las rectas r_1 y r_2.

Solución:

a) La recta está contenida en el plano si un punto genérico de ella cumple la ecuación del plano.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow R = (1 + \lambda, 1 - \lambda, -1) \in r.$$

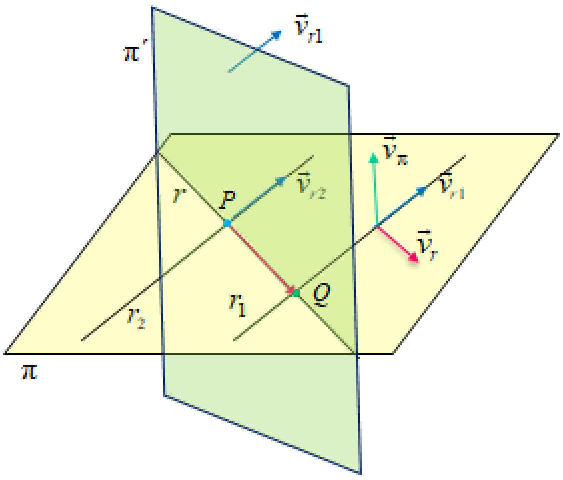
Sustituyendo R en $\pi \equiv x + y + z = 1$, como $1 + \lambda + 1 - \lambda - 1 = 1 \Rightarrow r_1 \subset \pi$.

También $P(0, 1, 0) \in \pi$, pues cumple su ecuación: $0 + 1 + 0 = 1$.

b) El vector de dirección de dicha recta debe ser perpendicular a $\vec{v}_\pi = (1, 1, 1)$ y a $\vec{v}_{r1} = (1, -1, 0)$.

Por tanto,

$$\vec{v}_r = \vec{v}_\pi \times \vec{v}_{r1} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1,\ 1,\ -2).$$



Si pasa por $P(0, 1, 0)$, su ecuación será:

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}.$$

c) La recta r_2, paralela a r_1, tiene por vector de dirección el mismo, $\vec{v}_{r1} = (1, -1, 0)$; si pasa por P, su ecuación será: $r_2 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$.

El lado del cuadrado es la distancia entre ambas rectas; que es la distancia de cualquier punto de r_1 a su paralela r_2. Para hallar esta distancia puede calcularse un plano π´, perpendicular a de r_1 y determinar su punto de corte Q.

$$\vec{v}_{\pi'} = \vec{v}_{r1} = (1, -1, 0) \Rightarrow \pi' \equiv x - y + d = 0;$$

Por pasar po $P(0, 1, 0) \Rightarrow 0 - 1 + d = 0 \Rightarrow d = 1$.

Luego, $\pi' \equiv x - y + 1 = 0$.

Corte con r_1: $\pi' \equiv 1 + \lambda - (1 - \lambda) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$.

Por tanto, $Q(1+\lambda, 1-\lambda, -1) \Rightarrow Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1\right)$.

El lado del cuadrado, $l = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \to \ PQ = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1\right) - (0,1,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$.

Su área será: $l^2 = \left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 = \frac{3}{2}$ u^2.

28. Madrid, extraordinaria 22

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi \equiv z = x$ y los puntos $A(0,-1,0)$ y $B(0,1,0)$ pertenecientes al plano π.

a) (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices contiguos de un cuadrado con vértices $\{A, B, C, D\}$ que se encuentra en el plano π, encuentre los posibles puntos C y D.

b) (1.25 puntos) Si los puntos A y B son vértices opuestos de un cuadrado que se encuentra en el plano π, determine los otros dos vértices del mismo.

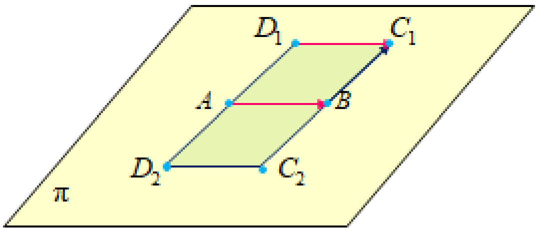
Solución:

a) La situación gráfica se muestra en la figura adjunta.

El lado AB es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ = (0, 1, 0) – (0, –1, 0) = (0, 2, 0) → $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2$.

Los puntos del plano $\pi \equiv z = x$ son de la forma $P(x, y, x)$.

Si $C(x, y, x)$ es otro vértice del cuadrado,



entonces: $\overrightarrow{BC} = (x, y, x) - (0,1,0) = (x, y-1, x)$;

cumpliéndose que: $\overrightarrow{BC}$ es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y $\left|\overrightarrow{BC}\right| = 2$.

$\overrightarrow{BC}$ perpendicular a $\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow$
$(x, y-1, x)\cdot(0,2,0) = 0 \Rightarrow 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1$.

Si y = 1, $\overrightarrow{BC} = (x, 0, x)$; luego $\left|\overrightarrow{BC}\right| = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + x^2} = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Por tanto, hay dos soluciones: $C_1\left(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}\right)$ y $C_2\left(-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2}\right)$.

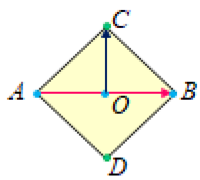
Para $C_1\left(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}\right) \Rightarrow D_1\left(\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}\right)$, pues:

$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}\right) - (0,2,0) = \left(\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}\right)$.

Para $C_2\left(-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2}\right) \Rightarrow D_2\left(-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2}\right)$, pues:

$\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{AB} = \left(-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2}\right) - (0,2,0) = \left(-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2}\right)$

b) Si los puntos A y B son vértices opuestos, entonces, en su punto medio O(0, 0, 0), se cortan sus diagonales.



Por tanto, si $C(x, y, x)$ es otro vértice del cuadrado, entonces,

$\overrightarrow{OC} = (x, y, x)$ debe ser perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y $\left|\overrightarrow{OC}\right| = 1$.

$\overrightarrow{OC}$ perpendicular a $\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow (x, y, x)\cdot(0,2,0) = 0 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0$.

Si y = 0, $\overrightarrow{OC} = (x, 0, x)$; luego $\left|\overrightarrow{OC}\right| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + x^2} = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Por tanto, hay dos soluciones: $C_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $C_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Con $D_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $D_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. (Los vértices se han cambiado).

<u>**29**. Madrid, extraordinaria 2022</u>

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 5+2t, \\ z = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

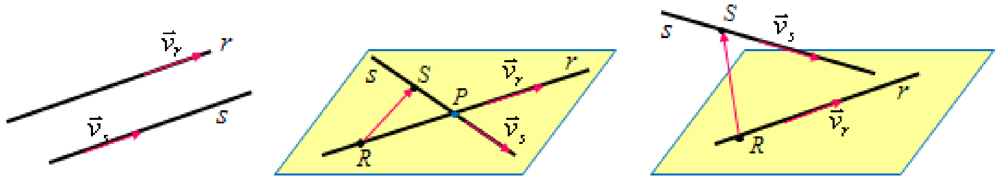
a) (1.5 puntos) Estudie la posición relativa de las rectas dadas y calcule la distancia entre ellas.

b) (0.5 puntos) Determine una ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s.

c) (0.5 puntos) Sean P y Q los puntos de las rectas r y s, respectivamente, que están contenidos en el plano de ecuación $z=0$. Calcular una ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q.

<u>Solución</u>:

Hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{RS}$, siendo R $\in$ r y S $\in$ s.



Obteniéndose:

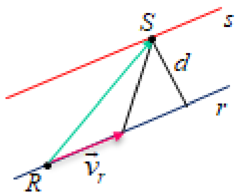
- Rectas paralelas $\to$ los vectores de dirección son paralelos: $\vec{v}_r = k\cdot\vec{v}_s$.
- Si, además, $\vec{v}_r = \overrightarrow{RS}$ las rectas coinciden.
- Las rectas se cortan (son secantes) $\to$ los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{RS}$ son linealmente dependientes, pues los tres están en el mismo plano.
- Las rectas se cruzan $\to$ los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{RS}$ son linealmente independientes, pues los tres vectores no están en el mismo plano.

En este caso:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+2=0 \\ y-2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \underset{E2+E1}{} \begin{cases} x+y+2=0 \\ -x-2z-1=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-1-2h \\ y=-1+2h \to \\ z=h \end{cases}$$

$R = (-1, -1, 0)$; $\vec{v}_r = (-2, 2, 1)$.

$$s \equiv \begin{cases} x=2-2t \\ y=5+2t \to S = (2, 5, 0);\ \vec{v}_s = (-2, 2, 1). \\ z=t \end{cases}$$



Es obvio que las rectas son paralelas: $\vec{v}_r = \vec{v}_s = (-2, 2, 1)$.

La distancia entre ellas viene dada por $d(r,s)=d(S,r)=\frac{\left|\overrightarrow{RS}\times\vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}$,

donde $\overrightarrow{RS} = (2, 5, 0) - (-1, -1, 0) = (3, 6, 0)$.

El producto vectorial vale:

$$\overrightarrow{RS}\times\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 3 & 6 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (6, -3,\ 18) \Rightarrow \left|\overrightarrow{RS}\times\vec{v}_r\right| = \sqrt{6^2+(-3)^2+18^2} = \sqrt{369}$$

El módulo de $\vec{v}_r$: $|\vec{v}_r| = \sqrt{(-2)^2+2^2+1^2} = \sqrt{9} = 3$.

Luego, $d(r,s) = \dfrac{\sqrt{369}}{3} = \sqrt{41}$

b) El plano que contiene a las rectas r y s viene determinado por el punto $R = (-1, -1, 0)$ y los vectores $\vec{v}_r = (-2, 2, 1)$ y $\overrightarrow{RS} = (3, 6, 0)$.

Sus ecuaciones son: $\pi \equiv \begin{cases} x = -1-2h+3t \\ y = -1+2h+6t \\ z = h \end{cases}$.

c) Para $z = 0$, los puntos P y Q de r y s, respectivamente, son $P = (-1, -1, 0)$ y $Q = (2, 5, 0)$.

Como $\overrightarrow{PQ} = (2, 5, 0) - (-1, -1, 0) = (3, 6, 0)$, la recta pedida será $p \equiv \begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = 5+6\lambda \\ z = 0 \end{cases}$.

30. Murcia, ordinaria 2022

5: Considere las siguientes rectas:

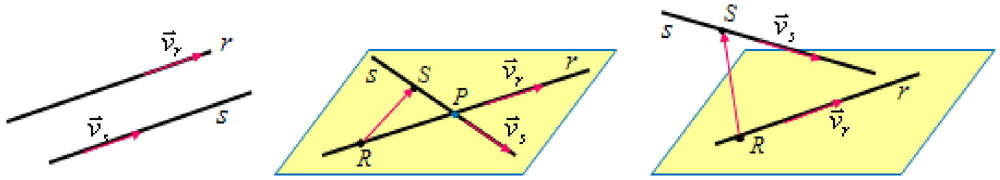
$$r: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{0} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **[1,5 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule la ecuación del plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

Solución:

a) Hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{RS}$, siendo $R \in r$ y $S \in s$.



Obteniéndose:

- Rectas paralelas → los vectores de dirección son paralelos: $\vec{v}_r = k \cdot \vec{v}_s$.
- Si, además, $\vec{v}_r = \overrightarrow{RS}$ las rectas coinciden.
- Las rectas se cortan (son secantes) → los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{RS}$ son linealmente dependientes, pues los tres están en el mismo plano.
- Las rectas se cruzan → los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{RS}$ son linealmente independientes, pues los tres vectores no están en el mismo plano.

En este caso:

$$r: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{0} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -2 + h \\ y = 3 + h \\ z = 0 \end{cases} \to R = (-2, 3, 0);\ \vec{v}_r = (-1, 1, 0).$$

$$s: \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \to S = (0, 1, 0);\ \vec{v}_s = (1, 0, 1).$$

$$\overrightarrow{RS} = (0, 1, 0) - (-2, 3, 0) = (2, -2, 0).$$

Como $\left[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{RS}\right] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0 \Rightarrow$ los vectores son linealmente dependientes: las recta r y s se cortan, pues no son paralelas, al no serlo $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$.

b) El ángulo que forman dos rectas es el que determinan sus vectores de dirección.

$$\cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} = \frac{|(-1,\ 1,\ 0) \cdot (1,\ 0,\ 1)|}{\sqrt{1+1} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{|-1|}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ángulo}(r, s) = 60^\circ.$$

31. Murcia, ordinaria 2022

6: Considere los puntos $A = (1, -1, 2)$ y $B = (3, 5, 2)$.

a) **[1,5 p.]** Determine la ecuación del plano π perpendicular al segmento AB y que pasa por el punto medio de dicho segmento.

b) **[1 p.]** Calcule la distancia del punto A al plano π.

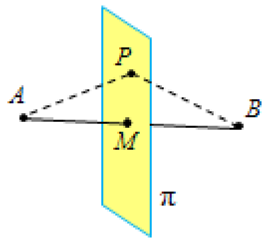
Solución:

a) Es el plano mediador del segmento de extremos *A* y *B*.

Dados dos puntos *A* y *B*, el plano mediador del segmento *AB* es el plano perpendicular al segmento y que contiene a su punto medio *M*.

Todos los puntos del plano mediador están a la misma distancia de los extremos del segmento. Esto es, si el punto $P(x, y, z)$ pertenece al plano mediador π, se cumple que $d(P, A) = d(P, B)$.

La ecuación del plano mediador se halla fácilmente si se tiene en cuenta que su vector director es ***AB*** y que contiene al punto *M*.



En este caso, como $A = (1, -1, 2)$ y $B = (3, 5, 2)$, el plano mediador del segmento *AB* tiene por vector normal a $\vec{v}_\pi = \overrightarrow{AB} = (3, 5, 2) - (1, -1, 2) = (2, 6, 0)$.

Por tanto, su ecuación será: $\pi : 2x + 6y + d = 0$.

Como contiene al punto $M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{-1+5}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (2, 2, 2)$, debe cumplirse que

$$2 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + d = 0 \Rightarrow d = -16.$$

Luego, el plano mediador es $\pi : 2x + 6y - 16 = 0 \Leftrightarrow \pi : x + 3y - 8 = 0$.

b) La distancia del punto *A* al plano π es:

$$d(A, \pi) = d(A, M) = \sqrt{(2-1)^2 + (2+1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{10}.$$

32. Murcia, extraordinaria 2022

6: Considere las rectas r y s dadas por

$$r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x+2z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Compruebe que las rectas son coplanarias (es decir, están contenidas en un mismo plano) y calcule la ecuación del plano que las contiene.

b) **[1 p.]** Calcule la distancia de la recta r al plano $\pi: x-y+2z=3$.

Solución:

a) Las rectas r y s serán coplanarias si los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{RS}$ son linealmente dependientes, siendo $R \in r$ y $S \in s$ y $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ sus vectores de dirección.

En este caso:

$$r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow R = (1, 0, 0);\ \vec{v}_r = (-1, 1, 1).$$

$$s: \begin{cases} x+2z=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \to S = (1, 0, 0);\ \vec{v}_s = (-2, 0, 1).$$

$$\overrightarrow{RS} = (1, 0, 0) - (1, 0, 0) = (0, 0, 0).$$

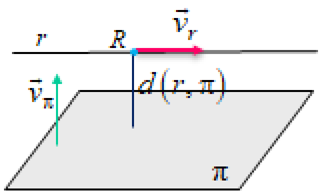
No es necesario comprobar la dependencia lineal de los tres vectores, pues los punto R y S coinciden. Las rectas se cortan en el punto (1, 0, 0).

Las ecuaciones paramétricas del plano que terminan son:

$$\pi': \begin{cases} x = 1-t-2h \\ y = \quad t \\ z = \quad t+h \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -2 \\ y & 1 & 0 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi': x-y+2z-1=0.$$

b) La recta r es paralela al plano $\pi: x-y+2z=3$, pues el vector normal a π, $\vec{v}_\pi = (1, -1, 2)$ es perpendicular a $\vec{v}_r = (-1, 1, 1)$: su producto escalar vale 0:

$$\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r = (1, -1, 2) \cdot (-1, 1, 1) = -1 - 1 + 2 = 0.$$



Por tanto, $d(r, \pi) = d(R, \pi) = \dfrac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$.

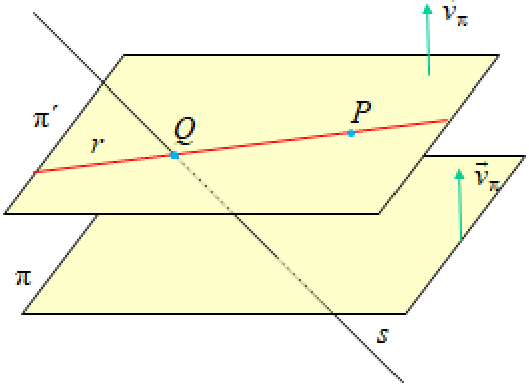
33. Navarra, ordinaria 2022

P4) Calcula la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P \equiv (1,2,-1)$, es paralela al plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ y corta a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 3x - y - z - 3 = 0 \end{cases}$$ (2.5 puntos)

Solución:

La recta pedida estará en el plano π', paralelo a π y que pasa por P.
Si corta a la recta r, lo hará en el punto de corte de esa recta con el plano π'.



El plano π', paralelo a $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ será:

$\pi' \equiv 2x - y + z + d = 0$.

Por pasar por $P \equiv (1, 2, -1) \Rightarrow 2 - 2 - 1 + d = 0 \Rightarrow d = 1$.

Luego, $\pi' \equiv 2x - y + z + 1 = 0$

El punto de corte, Q, de la recta s y el plano π' viene dado por la solución del sistema:

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 3x - y - z - 3 = 0 \end{cases} \to \text{puede resolverse aplicando Gauss.} \\ \pi' \equiv 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 2 = 0 \\ 3x - y - z - 3 = 0 \end{cases} \\ \pi' \equiv 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -2 \\ 3x - y - z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2 - 3E1 \\ E3 - 2E1 \end{matrix} \begin{cases} x - y + 2z = -2 \\ 2y - 7z = 9 \\ y - 3z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ 2E3 - E2 \end{matrix} \begin{cases} x - y + 2z = -2 \\ 2y - 7z = 9 \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -6 \\ z = -3 \end{cases}$$. Por tanto, $Q \equiv (-2, -6, -3)$.

El vector de dirección de la recta que pasa por P y Q es:

$\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (-2, -6, -3) - (1, 2, -1) = (-3, -8, -2)$.

La ecuación continua es:

$$s \equiv \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z+1}{-2}.$$

34. Navarra, extraordinaria 2022

P4) Encuentra los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y + z - 6 = 0 \\ x - y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$ que son centro de una esfera de radio 3, tangente al plano $\pi \equiv 2x + 2y - z - 7 = 0$. (2.5 puntos)

Solución:

Ecuaciones paramétricas de r:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - y + z - 6 = 0 \\ x - y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$r \equiv \begin{matrix} E1 - E2 \\ 3E2 - E1 \end{matrix} \begin{cases} 2x - 2z + 2 = 0 \\ -2y + 8z - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + z \\ y = -9 + 4z \end{cases} \to (z = t) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -9 + 4t \\ z = t \end{cases}.$$

Un punto genérico de r es de la forma,

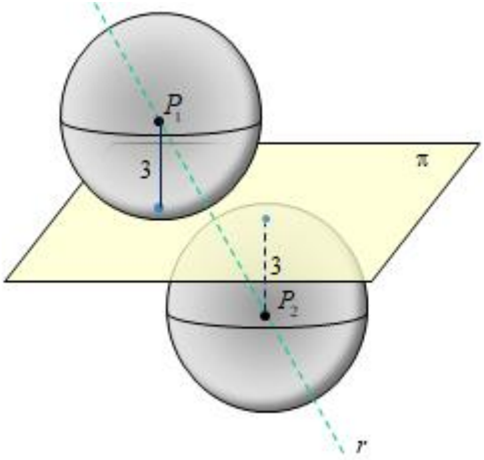
$P = (-1 + t, -9 + 4t, t)$.

El punto P es centro de una esfera de radio 3 y tangente al plano $\pi \equiv 2x + 2y - z - 7 = 0$ cuando

$d(P, \pi) = 3 \Rightarrow$

$$d(P, \pi) = \frac{|2\cdot(-1 + t) + 2\cdot(-9 + 4t) - t - 7|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 3 \Rightarrow$$

$$\frac{|9t - 27|}{3} = 3 \Rightarrow \begin{cases} 9t - 27 = 9 \Rightarrow t = 4 \\ 9t - 27 = -9 \Rightarrow t = 2 \end{cases}.$$



Para $t = 4$, $P_1 = (3, 7, 4)$; para $t = 2$, $P_2 = (1, -1, 2)$.

35. País Vasco, ordinaria 2022

Ejercicio A2

Se consideran la recta r cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \\ z = 0; \end{cases}$$

y el plano $\pi \equiv x+y+z-2 = 0$. Calcula las coordenadas de un punto P perteneciente a la recta r tal que la distancia de P al plano π sea igual que la distancia de P al origen de coordenadas. ¿Es único dicho punto? Contesta razonadamente.

Solución:

Un punto genérico de la recta $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}$ es de la forma, $P = (t, 2t, 0)$.

El plano $\pi \equiv x+y+z-2=0$.

Se desea que $d(P,\pi) = d(P,O)$, siendo O = (0, 0, 0).

Por tanto:

$$d(P,\pi) = \frac{|t+2t+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \sqrt{t^2+(2t)^2+0^2} = d(P,O) \Rightarrow$$

$$\frac{|3t-2|}{\sqrt{3}} = \sqrt{5t^2} \Rightarrow \begin{cases} 3t-2 = t\sqrt{15} \\ 3t-2 = -t\sqrt{15} \end{cases}.$$

- La ecuación $3t-2 = t\sqrt{15} \Rightarrow 9t^2-12t+4 = 15t^2 \Rightarrow 6t^2+12t-4=0 \Rightarrow$

$$t = \frac{-12 \pm \sqrt{144+96}}{12} = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{3}.$$

Si $t = \frac{-3-\sqrt{15}}{3}$ se obtiene el punto $P_1 = \left(\frac{-3-\sqrt{15}}{3}, \frac{-6-2\sqrt{15}}{3}, 0 \right)$.

Si $t = \frac{-3+\sqrt{15}}{3}$ se obtiene el punto $P_2 = \left(\frac{-3+\sqrt{15}}{3}, \frac{-6+2\sqrt{15}}{3}, 0 \right)$.

- La ecuación $3t-2 = -t\sqrt{15} \Rightarrow 9t^2-12t+4 = 15t^2 \Rightarrow 6t^2+12t-4=0$, tiene las mismas soluciones.

36. País Vasco, ordinaria 2022

Ejercicio B2

Sean el punto $P = (1, 2, a)$, donde $a \neq 0$, y el plano $\pi \equiv x + y + 2z = 3$. Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto al plano π.

Solución:

El punto $Q = (x_0, y_0, z_0)$ será el simétrico de P respecto de un plano π si cumple:

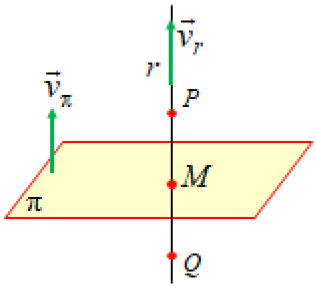
1) Ambos puntos, $P = (1, 2, a)$ y Q, estarán en la recta r, perpendicular a π por P.

2) El punto M (corte de la recta y el plano), debe ser el punto medio entre P y Q.

Como $\pi \equiv x + y + 2z = 3 \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (1, 1, 2) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = a + 2\lambda \end{cases}$.

Corte de la recta r con plano π:

$$(1 + \lambda) + (2 + \lambda) + 2 \cdot (a + 2\lambda) = 3 \Rightarrow 2a + 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{a}{3}.$$



Por tanto, $M = \left(\frac{3-a}{3}, \frac{6-a}{3}, \frac{a}{3}\right)$.

Punto medio de P y Q: $\left(\frac{1+x_0}{2}, \frac{2+y_0}{2}, \frac{a+z_0}{2}\right)$.

Como $\left(\frac{3-a}{3}, \frac{6-a}{3}, \frac{a}{3}\right) = \left(\frac{1+x_0}{2}, \frac{2+y_0}{2}, \frac{a+z_0}{2}\right) \Rightarrow$

$$\frac{3-a}{3} = \frac{1+x_0}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{3-2a}{3};\ \frac{6-a}{3} = \frac{2+y_0}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{6-2a}{3};\ \frac{a}{3} = \frac{a+z_0}{2} \Rightarrow z_0 = -\frac{a}{3}.$$

Por tanto, $Q = \left(\frac{3-2a}{3}, \frac{6-2a}{3}, -\frac{a}{3}\right)$.

37. País Vasco, extraordinaria 2022

Ejercicio B2

Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

¿Existe algún valor de s tal que el punto $(-3, s, s)$ pertenezca a la recta? Razona la respuesta.

Solución:

Ecuaciones paramétricas de r:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$r \equiv \begin{matrix} E1+E2 \\ 3E2-E1 \end{matrix} \begin{cases} 4x + 3z = 0 \\ -4y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -\dfrac{3}{4}z \\ y = \dfrac{5}{4}z \end{cases} \to (z = 4t) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -3t \\ y = 5t \\ z = 4t \end{cases}.$$

El punto (–3, s, s) pertenece a r cuando cumple su ecuación: $r \equiv \begin{cases} -3 = -3t \\ s = 5t \\ s = 4t \end{cases}$.

Esto implica que $5t = 4t \Rightarrow t = 0$; pero si $t = 0$, entonces $x = 0 \neq -3$.

Por tanto, en ningún caso el punto (–3, s, s) $\in r$.