ALGUNOS PROBLEMAS DE ÁLGEBRA PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD. ESPAÑA 2022

Los problemas que con mayor frecuencia se plantean en este bloque de ÁLGEBRA (en todos los distritos universitarios) son:
1) Problemas relacionados con álgebra de matrices y determinantes: ecuaciones matriciales y cálculo de la matriz inversa (hay que manejar con soltura las propiedades de los determinantes; y conocer la fórmula para el cálculo de la inversa).
2) Problemas de sistemas lineales: discusión y solución. (Teorema de Rouché).
3) Planteamiento y resolución de problemas de sistemas con enunciado.

He seleccionado los ejercicios que, aparentemente, presentaban mayor dificultad o resultaban algo novedosos.

1. Andalucía, ordinaria 2022

EJERCICIO 6. (2,5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$, donde $m \geq 0$.

a) ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A? **(1 punto)**

b) Para $m = 4$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX = 12I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. **(1,5 puntos)**

Solución:

a) La matriz A tendrá inversa cuando su determinante sea distinto de 0: $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{vmatrix} = m\left(m^2-1\right) - \sqrt{m}\cdot\left(m\sqrt{m}-\sqrt{m}\right) + \sqrt{m}\cdot\left(\sqrt{m}-m\sqrt{m}\right) = m\cdot(m-1)^2 .$$

Luego, $|A| = 0$ si $m = 0$ o $m = 1$.

Por tanto, la matriz A tendrá inversa cuando $m \neq 0$ y $m \neq 1$.

b) Para $m = 4$ la matriz A tiene inversa: $A^{-1} = \dfrac{\left(A_{ij}\right)^t}{|A|}$, donde $\left(A_{ij}\right)^t$ es la traspuesta de la matriz adjunta de A.

Para $m = 4$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix};\ |A| = 36;\ \left(A_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix};\ \text{y}\ A^{-1} = \frac{\left(A_{ij}\right)^t}{36} = \frac{1}{36}\cdot\begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, de

$AX = 12I \to$ (multiplicando por A^{-1} por la izquierda) $\Rightarrow X = A^{-1}\cdot 12I = 12A^{-1}$

Por tanto, $X = \dfrac{12}{36}\cdot\begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Andalucía, extraordinaria 2022

EJERCICIO 6. (2,5 puntos)

Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2.$

a) Calcula: $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}$ **(1 punto)** b) Calcula: $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$ **(1,5 puntos)**

Solución:
a) Se aplicarán las siguientes propiedades de los determinantes:
(1) Si se intercambian entre sí dos filas de un determinante, su valor es el mismo cambiado de signo.
(2) Un determinante no varía si a una fila se le suma o resta otra fila cualquiera, elemento a elemento.
(3) Si los elementos de una fila se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por ese mismo número; esto permite "sacar factor" común de una fila o columna. Esto es: $\det(k\cdot F1, F2, ..., Fn) = k\cdot\det(F1, F2, ..., Fn)$.
(4) El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta: $|A| = |A^t|$.

a) $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}$ = (intercambiando $F2$ por $F3$) = $-\begin{vmatrix} a & c & b \\ -3p & -3r & -3q \\ 2x & 2z & 2y \end{vmatrix}$ =

(intercambiando $C2$ por $C3$) = $+\begin{vmatrix} a & b & c \\ -3p & -3q & -3r \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$ = (se extrae el factor –3 de $F2$ y el

factor 2 de $F3$) = $(-3)\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} a & c & b \\ p & r & q \\ x & z & y \end{vmatrix} = -6\cdot(-2) = 12$.

b) $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$ = (se extrae el factor –2 de $C3$) = $-2\cdot\begin{vmatrix} x & a-3p & a \\ y & b-3q & b \\ z & c-3r & c \end{vmatrix}$ =

(a $C2$ se le resta $C3$) = $-2\cdot\begin{vmatrix} x & -3p & a \\ y & -3q & b \\ z & -3r & c \end{vmatrix}$ = (se extrae el factor –3 de $C2$) =

= $-2\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix}$ = (intercambiando $C1$ por $C3$) = $-(-2)\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$ =

= (el determinante obtenido es el de la traspuesta del dado) = $-(-2)\cdot(-3)\cdot(-2) = 12$.

3. Aragón, ordinaria 2022

5) Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial $A\,X - 2\,I = A^2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (1 punto) Analiza el rango de la matriz $A - mB$, según los valores de $m \in \mathbb{R}$, siendo A la matriz del apartado anterior y

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución:

a) La matriz dada tiene inversa, pues su determinante $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Su inversa es $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$, donde $(A_{ij})^t$ es la traspuesta de la matriz adjunta de A.

La matriz de los adjuntos es: $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(Se recomienda comprobar que $A \cdot A^{-1} = I$).

Por tanto, como

$$AX - 2I = A^2 \Leftrightarrow AX = A^2 + 2I \Rightarrow X = A^{-1}\left(A^2 + 2I\right) \Rightarrow X = A^{-1}A^2 + 2A^{-1}I \Rightarrow$$
$$X = A + 2A^{-1}.$$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.

La matriz $A - mB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1+m & 0 \\ -m & 0 & 1-m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$.

Su determinante vale

$$|A - mB| = \begin{vmatrix} 1 & -1+m & 0 \\ -m & 0 & 1-m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = -m \cdot (1-m) - (-1+m) \cdot (-m-1+m) = m^2 - 1.$$

Su valor es 0 si $m = \pm 1$.

Por tanto:

- Si $m \neq \pm 1$, el rango de $A - mB$ será 3.

- Si $m = 1 \to A - mB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

El rango de esta matriz es 2, pues el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

- Si $m = -1 \to A - mB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

El rango de esta matriz es 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

4. Aragón, ordinaria 2022

6)

a) (1 punto) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = -2$, calcula justificadamente

$$\begin{vmatrix} -a+2 & -c+2 & -b+2 \\ x/2 & z/2 & y/2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

b) (1 punto) Comprueba que la matriz B es invertible y calcula su inversa, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución:

a) Se aplicarán las siguientes propiedades de los determinantes:

(1) Si se intercambian entre sí dos filas de un determinante, su valor es el mismo cambiado de signo.

(2) Un determinante no varía si a una fila se le suma o resta otra fila cualquiera, elemento a elemento.

(3) Si los elementos de una fila se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por ese mismo número; esto permite "sacar factor" común de una fila o columna. Esto es: $\det(k\cdot F1, F2, ..., Fn) = k \cdot \det(F1, F2, ..., Fn)$

Por tanto:

$\begin{vmatrix} -a+2 & -c+2 & -b+2 \\ x/2 & z/2 & y/2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -a+2 & -c+2 & -b+2 \\ x & z & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = (se extraen los factores 1/2 de $F2$

y 3 de $F3$) $\overset{F1-2F3}{=} \frac{3}{2}\cdot \begin{vmatrix} -a & -c & -b \\ x & z & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = (se intercambian filas: $F1$ por $F3$) =

$= -\frac{3}{2}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & z & y \\ -a & -c & -b \end{vmatrix}$ = (se extrae el factor -1 de $F3$; y después se intercambian las columnas 2ª y 3ª) =

$$= \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-2) = 3.$$

b) La matriz *B* es invertible, pues su determinante es distinto de 0:

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1+3) - 2\cdot 5 = -4.$$

Su inversa es $B^{-1} = \frac{(B_{ij})^t}{|B|}$, donde $(B_{ij})^t$ es la traspuesta de la matriz adjunta de *B*.

La matriz de los adjuntos es: $(B_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -5 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{(B_{ij})^t}{-4} = -\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -5 & -3 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(Se recomienda comprobar que $B\cdot B^{-1} = I$).

5. Aragón, extraordinaria 2022

5) Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix}.$$

a) (1 punto) Determina el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que se verifique $A^2 = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) (1 punto) Calcula, para $k = 0$, la matriz B^n con $B = 2A - I$, siendo I la matriz identidad de orden 2, y $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k & k^2+2k \\ -2-k & k^2+k+1 \end{pmatrix}$.

Si se desea que $A^2 = 3I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-k & k^2+2k \\ -2-k & k^2+k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow k = -2.$

b) Para *k* = 0, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = 2A - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Con esto:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix};\ B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se hace la conjetura $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2n & 1 \end{pmatrix}$, que es válida para *n* = 1 (y para *n* = 2 y 3).

Hay que comprobar que también se cumple para el siguiente, para *n* + 1.
En efecto:

$$B^{n+1} = B\cdot B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2-2n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2(n+1) & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, es cierto que $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2n & 1 \end{pmatrix}$.

6. Asturias, ordinaria 2022

BLOQUE 1.A Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.

(b) **(1 punto)** Para a = 1 ¿existe P^{-1}? En caso afirmativo calcúlala.

(c) **(0.5 puntos)** Calcula, en caso de que exista, los valores de a tal que $\det(P) = \det(P^{-1})$.

Solución:

a) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.

$$|P| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & a \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -a - 2 + (-1) \cdot (-4) = -a + 2 .$$

El determinante de P vale 0 cuando a = 2.

Por tanto:

- si $a \neq 2$, el rango de P será 3, pues P es de orden 3 con determinante distinto de 0.
- si a = 2, el rango de P será 2, pues P siempre tiene un menor de orden 2 no nulo. Por ejemplo, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$.

b) Para a = 1, como $|P| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, se deduce que la matriz P tiene inversa.

Su inversa es $P^{-1} = \dfrac{(P_{ij})^t}{|P|}$, donde $(P_{ij})^t$ es la traspuesta de la matriz adjunta de P.

La matriz de los adjuntos es: $(P_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \dfrac{(P_{ij})^t}{1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(Se recomienda comprobar que $P \cdot P^{-1} = I$).

c) Como $P \cdot P^{-1} = I \Rightarrow |P \cdot P^{-1}| = |I| = 1$.

Por otra parte, $|P \cdot P^{-1}| = |P||P^{-1}| \Rightarrow (-a+2)|P^{-1}| = 1 \Rightarrow |P^{-1}| = \dfrac{1}{-a+2}$.

Si se desea que $|P| = |P^{-1}| \Rightarrow -a + 2 = \dfrac{1}{-a+2} \Rightarrow (-a+2)^2 = 1 \Rightarrow a = 1$ o a = 3.

7. Asturias, extraordinaria 2022

BLOQUE 1.B Dado $m \in \mathbb{R}$, se considera el sistema lineal $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & -1 \\ 3x & + & 3y & + & 2z & = & m \end{array}\right\}$

(a) **(1.75 puntos)** Discute el sistema según los valores de m y resuélvelo en los casos en los que sea posible.

(b) **(0.75 puntos)** Estudia si es posible encontrar una solución en la que z = 3.

Solución:

a) Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada,

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & m \end{array}\right) = M .$$

Si r(A) = r(M) = 3 $\to$ sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 $\to$ sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) $\to$ sistema incompatible: no tiene solución.

El determinante de A vale,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - (-1) - 3 = 0$$ $\to$ (puede observarse que $F3 = F1 + F2$).

El menor $|M_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & m \end{vmatrix} = 2\cdot(2m+3) - (m+3) - 3 = 3m$ $\to$ se anula si $m = 0$.

Con esto:

- Si $m \neq 0$, r(A) = 2 y r(M) = 3 $\to$ sistema incompatible.
- Si $m = 0$, r(A) = 2 = r(M) $\to$ sistema compatible indeterminado.

En este caso, el sistema resultante es $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+2y+z=-1 \\ 3x+3y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+2y+z=-1 \end{cases}$ $\to$ La tercera ecuación puede eliminarse, pues es la suma de las dos primeras.

Se resuelve como sigue:

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+2y+z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=1-z \\ x+2y=-1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-2E1 \end{matrix} \begin{cases} 2x+y=1-z \\ -3x=-3+z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} E1+E2 \\ \end{matrix} \begin{cases} -x+y=-2 \\ -3x=-3+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2+x \\ z=3-3x \end{cases} \Leftrightarrow (x=t) \to \begin{cases} x=t \\ y=-2+t \\ z=3-3t \end{cases}.$$

b) Si se desea que $z = 3 \Rightarrow 3 = 3-3t \Rightarrow t = 0$. Luego $\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \\ z=3 \end{cases}$.

8. Baleares, ordinaria 2022

2. Considerau el sistema d'equacions lineals depenent del paràmetre a,

$$\left.\begin{array}{ll} 3x-2y & =4 \\ ay & =-3 \\ ax+3z & =0 \end{array}\right\}$$

(a) Discutiu el sistema segons el paràmetre a. (4 punts)

(b) Per al valor del paràmetre a per al qual el sistema té solució, resoleu-lo. (6 punts)

Solución:

(a) El sistema dado puede resolverse por sustitución.

$$\left\{\begin{array}{ll} 3x-2y & =4 \\ ay & =-3 \\ ax & +3z=0 \end{array}\right. \rightarrow \text{despejando } y \text{ en la segunda ecuación } E2 \rightarrow \left\{\begin{array}{ll} 3x-2y & =4 \\ y=\dfrac{-3}{a} & \\ ax & +3z=0 \end{array}\right.,$$

solución que tiene sentido solo cuando $a \neq 0$.

(b) Sustituyendo en $E1$: $\left\{\begin{array}{l} 3x+\dfrac{6}{a} = 4 \Rightarrow x=\dfrac{4a-6}{3} \\ y=\dfrac{-3}{a}\uparrow \\ ax \quad +3z=0 \end{array}\right.$.

Sustituyendo el valor de x en $E3$: $\left\{\begin{array}{l} 3x+\dfrac{6}{a} = 4 \Rightarrow x=\dfrac{4a-6}{3a} \\ y=\dfrac{-3}{a}\uparrow \\ a\dfrac{4a-6}{3a}+3z=0 \Rightarrow z=\dfrac{6-4a}{9} \end{array}\right.$.

Por tanto, la solución para cualquier valor de $a \neq 0$ es: $\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{4a-6}{3} \\ y=\dfrac{-3}{a} \\ z=\dfrac{6a-4a^2}{9} \end{array}\right.$.

9. Baleares, extraordinaria 2022

2. Durant un any, certa empresa ven 21000 vehicles de tres models A, B i C, al preu de 10000, 15000 i 20000 euros, respectivament. El total de les vendes és de 332 milions d'euros. S'ha observat que també s'han venut 21000 vehicles comptant només els del model B i λ vegades els del model A.

   (a) Plantejau un sistema d'equacions amb les condicions del problema, en funció del nombre de vehicles venuts de cada model. (3 punts)

   (b) Calculau el nombre de vehicles venuts de cada model, suposant $\lambda = 3$. (3 punts)

   (c) Determinau si existeix algun valor del paràmetre λ per al qual l'anterior situació no es pugui donar. (4 punts)

Solución:

(a) Si se han vendido x, y, z vehículos de los modelos A, B y C, respectivamente, se cumplen las siguientes ecuaciones:

Vehículos: $x+y+z=21000$.

Importe total: $10000x+15000y+20000z=332000000 \Leftrightarrow 10x+15y+20z=332000$.

Vehículos de los modelos A y B: $\lambda x+y=21000$.

Se forma el sistema: $\begin{cases} x+y+z=21000 \\ 10x+15y+20z=332000 \\ \lambda x+y=21000 \end{cases}$.

(b) Si $\lambda = 3$, queda el sistema: $\begin{cases} x+y+z=21000 \\ 10x+15y+20z=332000 \\ 3x+y=21000 \end{cases}$.

Puede resolverse aplicando transformaciones de Gauss.

$$\begin{cases} x+y+z=21000 \\ 10x+15y+20z=332000 \\ 3x+y=21000 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-10E1 \\ E3-3E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=21000 \\ 5y+10z=122000 \\ -2y-3z=-42000 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ 5E3+2E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=21000 \\ 5y+10z=122000 \\ 5z=34000 \end{cases} \Rightarrow \text{(sustituyendo los valores de } z \text{ en } E2 \text{ y de } z \text{ e } y \text{ en } E1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+y+z=21000 \Rightarrow x+10800+6800=21000 \Rightarrow x=3400 \\ 5y+10\cdot 6800=122000 \Rightarrow y=10800 \\ z=6800 \uparrow \end{cases}$$

(c) La matriz de coeficientes del sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 15 & 20 \\ \lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Su determinante vale $-10+5\lambda$.

Por tanto, para $\lambda = 2$ el determinante vale 0 y el rango de la matriz de coeficientes es 2.

Como la matriz ampliada, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 21000 \\ 10 & 15 & 20 & 332000 \\ \lambda & 1 & 0 & 21000 \end{array}\right)$, tiene rango 3, pues el menor

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 21000 \\ 15 & 20 & 332000 \\ 1 & 0 & 21000 \end{vmatrix} = -17000 \neq 0$, se deduce que si $\lambda = 2$ el sistema es incompatible.

10. Canarias, ordinaria 2022

2A. Averigua qué dos matrices de dimensiones $3x3$, X e Y, verifican las siguientes condiciones:

- La suma de ambas matrices X e Y da como resultado la matriz I_3 (siendo I_3 la matriz identidad $3x3$)
- Siendo $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -7 \\ 14 & -12 & 0 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix}$, la matriz traspuesta de A es el resultado de realizar la resta del doble de la matriz X y cinco veces la matriz Y

2.5 ptos

Solución:

Si las matrices son $X_{3\times3} = (x_{ij})$ e $Y_{3\times3} = (y_{ij})$, para que $X_{3\times3} + Y_{3\times3} = I_{3\times3}$, debe cumplirse:

- $x_{ii} + y_{ii} = 1 \to y_{ii} = 1 - x_{ii}$;
- $x_{ij} = -y_{ij}$.

Esto es: $X_{3\times3} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$; $Y_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1-x_{11} & -x_{12} & -x_{13} \\ -x_{21} & 1-x_{22} & -x_{23} \\ -x_{31} & -x_{32} & 1-x_{33} \end{pmatrix}$.

Si $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -7 \\ 14 & -12 & 0 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 9 & 14 & 0 \\ 0 & -12 & -7 \\ -7 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Si se desea que $2X_{3\times3} - 5Y_{3\times3} = A^t$, entonces:

$$2\cdot\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} - 5\cdot\begin{pmatrix} 1-x_{11} & -x_{12} & -x_{13} \\ -x_{21} & 1-x_{22} & -x_{23} \\ -x_{31} & -x_{32} & 1-x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 14 & 0 \\ 0 & -12 & -7 \\ -7 & 0 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{llll} 7x_{11} - 5 = 9; & 7x_{12} = 14; & 7x_{13} = 0; & \\ 7x_{21} = 0; & 7x_{22} - 5 = -12; & 7x_{23} = -7; & \Rightarrow \\ 7x_{31} = -7; & 7x_{32} = 0; & 7x_{33} - 5 = -5. & \end{array} \quad \begin{array}{lll} x_{11} = 2; & x_{12} = 2; & x_{13} = 0; \\ x_{21} = 0; & x_{22} = -1; & x_{23} = -1; \\ x_{31} = -1; & x_{32} = 0; & x_{33} = 0. \end{array}$$

Por tanto, las matrices pedidas son:

$$X_{3\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; Y_{3\times3} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Canarias, ordinaria 2022

2B. Dado el siguiente sistema de ecuaciones con un parámetro $\boldsymbol{k}$:

$$\left.\begin{array}{r} kx - y - z = 1 \\ x + ky + 2kz = k \\ x + y + z = -1 \end{array}\right\}$$

a) Discute la resolución del sistema de ecuaciones, según los valores que pueda tomar el parámetro $\boldsymbol{k}$ — 1.5 ptos

b) Resuelve el sistema para $\boldsymbol{k = 1}$ — 1 pto

Solución:

a) Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada,

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} k & -1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 2k & k \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = M .$$

Si r(A) = r(M) = 3 $\rightarrow$ sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 $\rightarrow$ sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) $\rightarrow$ sistema incompatible: no tiene solución.

El determinante de A vale,

$$|A| = \begin{vmatrix} k & -1 & -1 \\ 1 & k & 2k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k\cdot(-k) - (-1)\cdot(1-2k) - (1-k) = -k^2 - k \rightarrow |A| = 0 \text{ si } k = 0 \text{ o } k = -1.$$

Con esto:

- Si $k \neq 0$ y -1, r(A) = 3 y r(M) = 3 $\rightarrow$ sistema compatible determinado.
- Si $k = 0$, r(A) = 2.

En este caso, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = M$ $\Rightarrow$ r(M) =2. (Observa que la columna de términos independientes es la opuesta de la de los coeficientes de la incógnita y).
Por tanto, si $k = 0$ el sistema es compatible indeterminado.

- Si $k = -1$, r(A) = 2.

En este caso, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = M$ $\Rightarrow$ r(M) =2. (Observa que la columna de términos independientes es la opuesta de la columna de coeficientes de la incógnita x).
Por tanto, si $k = -1$ el sistema también es compatible indeterminado.

b) Para $k = 1$ el sistema es compatible determinado. Puede resolverse aplicando Gauss.

$$\left\{\begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + y + z = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \\ E2 + E1 \\ E3 + E1 \end{array}\left\{\begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 - y - 2 = 1 \Rightarrow y = -3 \\ 0 + z = 2 \Rightarrow z = 2 \uparrow \\ x = 0 \uparrow \end{array}\right. .$$

La solución es: $x = 0$; $y = -3$; $z = 2$.

12. Cantabria, ordinaria 2022

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

A. [0,5 PUNTOS] Compruebe que las matrices A y B son regulares.

B. [0,5 PUNTOS] Calcule las matrices inversas de A y B.

C. [0,75 PUNTOS] Despeje X en la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$ en donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

D. [0,75 PUNTOS] Calcule X.

Solución:

A) Una matriz es regular cuando su determinaste es distinto de 0.

En este caso:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2) - 3\cdot(-1) = -1 \text{ y } |B| = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1\cdot 2 - (-3)\cdot 1 = 1.$$

Luego, ambas matrices son regulares. En consecuencias, son invertibles.

B) La inversa de A es $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$, siendo $(A_{ij})^t$ la traspuesta de la adjunta de A.

La matriz de los adjuntos es:

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -1\cdot\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

La inversa de B es $B^{-1} = \dfrac{(B_{ij})^t}{|B|}$.

$$(B_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

C) $AXB = A^t - 3B \Rightarrow A^{-1}(AXB)B^{-1} = A^{-1}\left(A^t - 3B\right)B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}\left(A^t - 3B\right)B^{-1}$.

D) $$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 28 & 38 \\ -18 & -23 \end{pmatrix}.$$

13. Castilla La Mancha, ordinaria 2022

1. *a*) **[1,5 puntos]** Encuentra todas las matrices X que conmutan con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

es decir, que verifican que $AX = XA$.

b) **[1 punto]** ¿Existe alguna matriz simétrica que conmute con A y cuyo determinante valga 4?

Solución:

a) Si $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, para que $AX = XA$, debe cumplirse que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & -b \\ 2c+d & -d \end{pmatrix}.$$

Igualando los elementos de cada producto:

$$\begin{cases} 2a = 2a+b \\ 2b = -b \\ a-c = 2c+d \\ b-d = -d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 0 \\ c = (a-d)/3 \\ d = d \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Los valores de a y d son arbitrarios; $c = \dfrac{a-d}{3}$.

Por tanto, las matrices X son de la forma: $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \dfrac{a-d}{3} & d \end{pmatrix}$.

b) Todas las matrices en las $a = d$ son simétricas y conmutan con A. Esto es, las matrices $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Su determinante $|X| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2 = 4$ cuando $a = \pm 2$.

Las matrices son: $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

14. Castilla La Mancha, ordinaria 2022

6. *a*) **[1,5 puntos]** Estudia el rango de la matriz M en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, siendo

$$M = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}.$$

b) **[1 punto]** Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + my = 1$, $\pi_2 \equiv 2x + y = m$ y $\pi_3 \equiv 4x + y + mz = 2$. Estudia su posición relativa según los valores de m. Puedes utilizar los resultados obtenidos en el apartado anterior.

Solución:

a) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.

En $M = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}$ se pueden considerar menores de orden 3.

$$|M_1| = \begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & m \end{vmatrix} = m\cdot(2-2m) \to |M_1| = 0 \text{ si } m = 0 \text{ o } m = 1.$$

$$|M_2| = \begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(2-m) - m\cdot(4-4m) - 2 = 4m^2 - 6m + 2$$

$\to |M_2| = 0$ si $m = 1$ o $m = 1/2$.

Con esto:

- Si $m \neq 1$, r(M) = 3 $\to$ el menor $|M_1| \neq 0$.
- Si $m = 1$, r(M) = 2 $\to$ los menores de orden 3 valen 0; pero el menor de orden 2, $|M_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Observa:

- si $m = 0$, $|M_1| = 0$, pero $|M_2| \neq 0$ $\to$ el rango de M es 3;
- si $m = 1/2$, $|M_2| = 0$, pero $|M_1| \neq 0$ $\to$ el rango de M es 3,

b) Los planos dados generan el sistema $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ 2x + y = m \\ 4x + y + mz = 2 \end{cases}$. Discutiendo este sistema puede determinarse la posición de los planos dados.

La matriz ampliada del sistema coincide con la matriz M estudiada en a); mientras que los elementos del de M_1 son los de la matriz de coeficientes.

Por tanto:

- Si $m \neq 0$ y 1, r(M_1) = r(M) = 3 $\to$ sistema compatible determinado: los tres planos se cortan en un punto.
- Si $m = 1$, r(M_1) = r(M) = 2 $\to$ sistema compatible indeterminado: los tres planos se cortan en una recta. Observa que en este caso π_1 y π_2 son el mismo plano.
- Si $m = 0$, r(M_1) = 2 y r(M) = 3 $\to$ sistema incompatible: los tres planos no tienen ningún punto en común; se cortan dos a dos.

15. Castilla–León, ordinaria 2022

E1.- (Álgebra)

Dado el sistema $\begin{cases} 2x + 2my - z = 0 \\ x + 2y + mz = 0 \\ x - my + mz = 0 \end{cases}$

a) Discuta el sistema el sistema según los distintos valores de m. **(1 punto)**

b) Resuelva el sistema si $m = -2$. **(1 punto)**

Solución:

a) Se trata de un sistema homogéneo; por tanto, siempre tiene solución, para cualquier valor de *m*: al menos la trivial.

Si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de 0, $|A| \neq 0$, la solución será única; cuando $|A| = 0$, el sistema tendrá infinitas soluciones.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2m & -1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & -m & m \end{vmatrix} = 2\left(2m + m^2\right) - 1\cdot\left(-m - 2\right) = 2m^2 + 5m + 2.$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2m^2 + 5m + 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4} = \begin{cases} -2 \\ -1/2 \end{cases}.$$

Por lo tanto:

- Si $m \neq -2$ y $-1/2$ el sistema tiene solución única: $x = 0; y = 0; z = 0$.
- Si $m = -2$ o $m = -1/2$ el sistema es compatible indeterminado: tiene infinitas soluciones.

b) Para $m = -2$ el sistema queda: $\begin{cases} 2x - 4y - z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y - z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \to$ trasponiendo una incógnita a los segundos miembros, $\begin{cases} 2x - 4y = z \\ x + 2y = 2z \end{cases}$, puede resolverse por reducción:

$$\begin{cases} 2x - 4y = z \\ x + 2y = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1 - 2E2 \\ 2E2 + E1 \end{matrix} \begin{cases} -8y = -3z \\ 4x = 5z \end{cases} \Rightarrow (z = t) \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{4}t \\ y = \dfrac{3}{8}t \\ z = t \end{cases}.$$

16. Castilla–León, extraordinaria 2022

E2.- (Álgebra)

a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, hállese la matriz X tal que $AX+B=C$. **(1,2 puntos)**

b) Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, explíquese cuales de los productos MN, MP, NP pueden calcularse, y calcúlense cuando se pueda. **(0,8 puntos)**

Solución:

a) Como $|A|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$, se deduce que la matriz A es invertible. Por tanto:

$$AX+B=C\Rightarrow AX=C-B\Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}(C-B)\Rightarrow X=A^{-1}(C-B).$$

La inversa de A es $A^{-1}=\dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$, donde $(A_{ij})^t$ es la traspuesta de la matriz adjunta de A.

Esta matriz adjunta es: $(A_{ij})=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Luego,

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

b) El producto de matrices puede hacerse cuando el número de columnas de la matriz de la izquierda, A, es igual al número de filas de la otra matriz, B. La matriz producto, P, tiene el mismo número de filas que A y el mismo número de columnas que B.

En esquema: $A_{n\times m}\cdot B_{m\times p}=P_{n\times p}$.

Por tanto:

- MN no puede hacerse.
- MP si puede hacerse: $MP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
- NP no puede hacerse.

17. Cataluña, ordinaria 2022

1. Siguin les matrius $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ i $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que $C^3 = I_2$, en què I_2 és la matriu identitat d'ordre 2, i deduïu que la matriu C és invertible i que $C^{-1} = C^2$. Calculeu C^{2022}.
[1,5 punts]

b) Resoleu l'equació matricial $C \cdot X = A - 2I_2$.
[1 punt]

Solución:

a) Si $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$C^3 = C^2 \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow \text{Efectivamente, } C^2 = C^{-1}.$$

Como $C^{2022} = C^{3 \cdot 674} = \left(C^3\right)^{674} \Rightarrow C^{2022} = I^{674} = I$.

La ecuación matricial

$$A^2 X = A - 3I \Leftrightarrow \left(A^2\right)^{-1}\left(A^2 X\right) = \left(A^2\right)^{-1}(A - 3I) \Rightarrow X = \left(A^2\right)^{-1}(A - 3I).$$

b) $CX = A - 2I_2 \Rightarrow X = C^{-1}(A - 2I_2) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \Rightarrow$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

18. Cataluña, extraordinaria 2022

3. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{pmatrix}$, que depèn del paràmetre a.

a) Calculeu el rang de la matriu A per als diferents valors del paràmetre a.
[1,25 punts]

b) Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, resoleu l'equació matricial següent: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
[1,25 punts]

Solución:

a) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \left(45 - 12a^2\right) - a(18a - 21a) + 3 \cdot \left(8a^2 - 35\right) = 15a^2 - 60 = 15\left(a^2 - 4\right)$$

$\rightarrow$ se anula si $a = \pm 2$.

Por tanto:

- Si $a \neq \pm 2$, el rango de la matriz A es 3.
- Si $a = -2$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$, con $|A| = 0$.

Como el menor $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, el rango de A será 2.

- Si $a = 2$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, con $|A| = 0$.

Como el menor $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, el rango de A será 2.

b) La ecuación matricial $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, en la que se observa que la matriz inicial es la correspondiente para $a = 2$, es equivalente a un sistema homogéneo con infinitas soluciones, pues $|A| = 0$.

El sistema es: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases} \Rightarrow (E3 = 2E2 - E1) \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$ → trasponiendo una incógnita a los segundos miembros, $\begin{cases} x + 2y = -3z \\ 4x + 5y = -6z \end{cases}$.

Puede resolverse por reducción:

$$\begin{cases} x + 2y = -3z \\ 4x + 5y = -6z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 5E1 - 2E2 \\ E2 - 4E1 \end{matrix} \begin{cases} -3x = -3z \\ -3y = 6z \end{cases} \Rightarrow (z = t) \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}.$$

19. Comunidad Valenciana, ordinaria 2022

Problema 2. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinar:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro real m. (4 puntos)

b) La matriz inversa de A en el caso $m = 2$. (4 puntos)

c) El número real m para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8. (2 puntos)

Solución:

a) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo: coincide con el número de filas o de columnas linealmente independientes.

Su determinante,

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{vmatrix} = m\cdot\left(m^2-2m\right)+(m-1)\cdot\left(-4m^2\right) = m^2\cdot(2-3m).$$

Este determinante vale 0 cuando $m = 0$ o $m = \frac{2}{3}$.

Con esto:

- Si $m \neq 0$ y $m \neq \frac{2}{3}$, como $|A| \neq 0 \Rightarrow$ rango (A) = 3.
- Si $m = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango (A) = 1.
- Si $m = \frac{2}{3}$, $A = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -2/3 & 4/9 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \to$ el menor de orden 2, $\begin{vmatrix} 2/3 & 0 \\ -2/3 & 4/9 \end{vmatrix} = \frac{8}{27} \neq 0$. Por lo tanto, rango ($A$) = 2.

b) Si $m = 2$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -16 \neq 0$. Luego, la matriz es invertible.

Su inversa es $A^{-1} = \frac{\left(A_{ij}\right)^t}{|A|}$; donde $\left(A_{ij}\right) = Adj\left(A\right)$ es la matriz de los adjuntos.

La matriz de los adjuntos es $\left(A_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -16 \\ 4 & 2 & -8 \\ -4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{16}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -6 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix}$.

c) El determinante de la matriz $2A$ es: $|2A| = 2^3|A|$.

Si se desea que $|2A| = 2^3|A| = -8 \Rightarrow |A| = -1 \Rightarrow m^2\cdot(2-3m) = -1 \Rightarrow 3m^3-2m^2-1=0$.

Como una solución de esa ecuación es m = 1 (solución que se encuentra probando entre los divisores del término independiente 1) $\Rightarrow$ $3m^3-2m^2-1=0 \Leftrightarrow (m-1)\cdot(3m^2+m+1)=0$.

El segundo factor, que se encuentra dividiendo $3m^3-2m^2-1$ entre m – 1, no tiene raíces reales; por tanto, el valor de m buscado es m = 1.

20. Comunidad Valenciana, extraordinaria 2022

Problema 2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$:

a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (4 puntos)

b) Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4. (3 puntos)

c) Calcular $\det(A^{-50})$ cuando $a^2-b^2\neq 0$. (3 puntos)

Solución:

a) Si la inversa de $A=\begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$ es $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, debe cumplirse que $A\cdot A^{-1}=I$.

$$\begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+b & -a-b+1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=1 \end{cases} \Rightarrow a=1; b=0.$$

b) Si a = 1 y b = 0 $\Rightarrow$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Luego:

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^2=A\cdot A^3=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Si $A=\begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$.

Como $|A^n|=|A|^n \Rightarrow |A^{-50}|=\left(a^2-b^2\right)^{-50}=\dfrac{1}{\left(a^2-b^2\right)^{50}}$, con $a^2-b^2\neq 0$.

21. Extremadura, ordinaria 2022

2. Dadas las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcular la matriz X cuadrada de orden 3 que cumple $M \cdot X - N = 2X$. (2 puntos)

Solución:

La ecuación matricial $M \cdot X - N = 2X \Leftrightarrow M \cdot X - 2I \cdot X = N \Leftrightarrow (M-2I) \cdot X = N$.

Como $M - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa, pues $|M-2I| = 1$, se tendrá que $X = (M-2I)^{-1} \cdot N$.

Cálculo de $(M-2I)^{-1}$.

La matriz de los adjuntos de $(M-2I)$ es $Adj(M-2I) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto, $(M-2I)^{-1} = \dfrac{(Adj(M-2I))^t}{|M-2I|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Luego, $X = (M-2I)^{-1} \cdot N \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

22. Galicia, extraordinaria 2022

2. Números y Álgebra

Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema $\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1, \\ (m-3)y + (m^2-m)z = 1, \\ x + m^2z = 0. \end{cases}$

Solución:

Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada,

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m-3 & m & 1 \\ 0 & m-3 & m^2-m & 1 \\ 1 & 0 & m^2 & 0 \end{array}\right) = M.$$

Si r(A) = r(M) = 3 → sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 → sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) → sistema incompatible: no tiene solución.

El determinante de A vale,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 1 & 0 & m^2 \end{vmatrix} = (m-3)\cdot m^2 - (m-3)(-m^2+m) - m\cdot(m-3) = 2(m-3)\cdot(m^2-m).$$

→ $|A| = 0$ si $m = 3$, $m = 0$ o $m = 1$.

Con esto:

- Si $m \neq 3$, 0 y 1, r(A) = 3 y r(M) = 3 → sistema compatible determinado.
- Si $m = 3$, r(A) = 2.

En este caso, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right) = M$.

Como el menor $|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -9-3 = -12 \neq 0 \Rightarrow$ r(M) =3.

Por tanto, si $m = 3$ el sistema es incompatible.

- Si $m = 0$, r(A) = 2.

En este caso, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = M$.

Como la columna de términos independientes es proporcional a la columna 2ª, de coeficientes de la incógnita y, el rango de M es 2.
Por tanto, si $m = 0$ el sistema es compatible indeterminado.

- Si $m = 1$, r(A) = 2.

En este caso, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = M \Rightarrow$ r(M) = 2. La matriz ampliada solo tiene dos columnas linealmente independientes.
Por tanto, si $m = 1$ el sistema también será compatible indeterminado.

23. Galicia, extraordinaria 2022

1. Números y Álgebra

a) Obtenga la matriz antisimétrica A de orden 2×2 tal que $a_{12} = 1$. Luego, calcule su inversa en caso de que exista. **Nota**: a_{ij} es el elemento que está en la fila i y en la columna j de A.

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$, halle los valores de b_{12} y de b_{22} sabiendo que B no tiene inversa y que $\det(A^{-1}B + A) = -1$.

Solución:

- Una matriz A es simétrica cuando es igual a su traspuesta: $A = A^t$.
- Una matriz A es antisimétrica cuando $A = -A^t$.

a) En este caso, la matriz antisimétrica será: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Existe su inversa, pues $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

La matriz $A^{-1} = \dfrac{\left(Adj(A)\right)^T}{|A|}$, siendo $Adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix}$.

Si B no tiene inversa su determinante debe valer 0; luego $b_{12} = 0$.

Con esto,

$$A^{-1}B + A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1-b_{22} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si se desea que $|A^{-1}B + A| = -1$, entonces:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1-b_{22} \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 - b_{22} = -1 \Rightarrow b_{22} = 2.$$

24. La Rioja, ordinaria 2022

6.– (2 puntos) Determina los valores de los parámetros a, b y c para los que $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} 2ax + by + z &= 3c, \\ 3x - 2by - 2cz &= a, \\ 5ax - 2y + cz &= -4b. \end{cases}$$

Solución:

Si $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ es solución del sistema $\begin{cases} 2ax + by + z = 3c \\ 3x - 2by - 2cz = a \\ 5ax - 2y + cz = -4b \end{cases}$, entonces, al sustituir x por 1, y por 2 y z por 3, se verifica que: $\begin{cases} 2a + 2b + 3 = 3c \\ 3 - 4b - 6c = a \\ 5a - 4 + 3c = -4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b - 3c = -3 \\ a + 4b + 6c = 3 \\ 5a + 4b + 3c = 4 \end{cases}$.

El segundo sistema puede resolverse por Gauss.

$$\begin{cases} 2a + 2b - 3c = -3 \\ a + 4b + 6c = 3 \\ 5a + 4b + 3c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2 + 2E1 \\ E3 + E1 \end{matrix} \begin{cases} 2a + 2b - 3c = -3 \\ 5a + 8b = -3 \\ 7a + 6b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 5E3 - 7E2 \end{matrix} \begin{cases} 2a + 2b - 3c = -3 \\ 5a + 8b = -3 \\ -26b = 26 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2 - 2 - 3c = -3 \Rightarrow c = 1 \\ 5a - 8 = -3 \Rightarrow a = 1 \uparrow \\ b = -1 \uparrow \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}.$$

25. La Rioja, extraordinaria 2022

4.– (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x + y + z &= 2, \\ x + 2y + az &= 8, \\ 2x - y - z &= 1, \\ x - y + z &= -2. \end{cases}$$

Solución:

El sistema dado puede transformarse como sigue:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + az = 8 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2 - E1 \\ E3 - 2E1 \\ E4 - E1 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + (a-1)z = 6 \\ -3y - 3z = -3 \\ -2y = -4 \to y = 2 \end{cases}.$$

Sustituyendo el valor $y = 2$ en las tres primeras ecuaciones se tiene:

$$\begin{cases} x + 2 - 1 = 2 \\ 2 + (a-1)\cdot(-1) = 6 \\ -6 - 3z = -3 \to z = -1 \uparrow \\ y = 2 \uparrow \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ a = -3 \\ z = -1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

El sistema es compatible cuando $a = -3$. En ese caso, su solución es $(x, y, z) = (1, 2, -1)$.

26. La Rioja, extraordinaria 2022

5.– (2 puntos) Calcula sin desarrollar el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 2 & a & b+c \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix}.$$

Justifica en cada paso la propiedad de determinante que has utilizado.

Solución:

Aplicando las propiedades de los determinantes, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 2 & b & c+a \\ 2 & a & b+c \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & b & b+c+a \\ 2 & a & a+b+c \\ 2 & c & c+a+b \end{vmatrix} = (a+b+c)\cdot\begin{vmatrix} 2 & b & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$, por tener dos columnas proporcionales.

Se aplican las propiedades siguientes:

1. Un determinante no varía si a una fila (o columna) se le suma o resta otra fila (columna) cualquiera, elemento a elemento. En este caso, a la tercera columna se le ha sumado la segunda
2. Si los elementos de una fila (columna) están multiplicados por un mismo número, ese factor común puede extraerse de esa fila (columna).
Esto es: $\det(k\cdot F1, F2, ..., Fn) = k\cdot\det(F1, F2, ..., Fn)$.
En este caso se extrae el factor $a + b + c$ de la tercera columna.
3. Si un determinante tiene dos filas (columnas) proporcionales su valor es 0.

27. Madrid, ordinaria 2022

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real m:

$$\begin{cases} x-2my+z &= 1 \\ mx+2y-z &= -1 \\ x-y+z &= 1 \end{cases}.$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función de los valores de m.

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para el valor $m=\dfrac{1}{2}$.

Solución:

a) Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2m & 1 & 1 \\ m & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)=M$$

Si rango de A = rango de M = 3 → sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 → sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) > r(M) → sistema incompatible: no tiene solución

Nota: En este caso podría observarse que la columna de términos independientes es igual a la columna de coeficientes de la incógnita z, lo que implica que el rango de M será el mismo que el de A. Por tanto, el sistema será siempre compatible.

El determinante de A vale

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1-(-2m)(m+1)+(-m-2)=2m^2+m-1.$$

Se anula si $m = -1$ o $m = 1/2$ (soluciones de la ecuación de 2º grado asociada).
Con esto:

- Si $m \neq -1$ y $1/2 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.

- Si $m = -1$, se tendrá:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};\quad M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puede verse que en ambos casos la segunda fila es la opuesta de la primera: $F2 = -F1$. Por tanto, ambas matrices tienen rango 2, pues $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$.

En este caso, el sistema será compatible indeterminado.

- Si $m = 1/2$, se tendrá:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1/2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};\quad M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \text{se observa que } F1 = F3.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 2 \end{vmatrix} = 5/2 \neq 0 \to$ r(A) = r(M) = 2 → sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.

b) Para m = 1/2 el sistema queda: $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x/2 + 2y - z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 - z \\ \dfrac{x}{2} + 2y = -1 + z \end{cases}$ → (se resuelve por Gauss, por reducción) $\begin{cases} x - y = 1 - z \\ \dfrac{x}{2} + 2y = -1 + z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1 - 2E2 \\ E2 + 2E1 \end{matrix} \begin{cases} -5y = 3 - 3z \\ \dfrac{5}{2}x = 1 - z \end{cases} \Rightarrow (z = t) \to \begin{cases} x = \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{5}t \\ y = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{5}t \\ z = t \end{cases}$.

28. Madrid, ordinaria 2022

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tres primos, Pablo, Alejandro y Alicia, se van a repartir un premio de 9450 euros de forma directamente proporcional a sus edades. La suma de las edades de Pablo y Alejandro excede en tres años al doble de la edad de Alicia. Además, la edad de los tres primos juntos es de 45 años. Sabiendo que en el reparto del premio Pablo recibe 420 euros más que Alicia, calcule las edades de los tres primos y el dinero que recibe cada uno por el premio.

Solución:
Sean x, y, z las edades de Pablo, Alejandro y Alicia, respectivamente.
Con los datos del enunciado se obtiene:

$x + y + z = 45 \to$ la edad de los tres primos juntos es de 45 años;

$x + y = 3 + 2z \to$ La suma de las edades de Pablo y Alejandro …;

Como se reparten 9450 € directamente proporcional a sus edades, y entre todos suman 45 años, a cada año le corresponden $\dfrac{9450}{45} = 210$ €. Esto permite plantear la tercera ecuación.

$210x = 420 + 210z \to$ Pablo recibe 420 € más que Alicia.

Se obtiene el sistema: $\begin{cases} x + y + z = 45 \\ x + y = 3 + 2z \\ 210x = 420 + 210z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 45 \\ x + y - 2z = 3 \\ x - z = 2 \end{cases}$.

Aplicando el método de Gauss:

$$\begin{cases} x + y + z = 45 \\ x + y - 2z = 3 \\ x - z = 2 \end{cases} \Rightarrow E2 - E1 \begin{cases} x + y + z = 45 \\ -3z = -42 \Rightarrow z = 14 \\ x - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 45 \\ z = 14 \downarrow \\ x - 14 = 2 \Rightarrow x = 16 \end{cases} \Rightarrow y = 15.$$

Por tanto:

Pablo tiene 16 años y recibe 16 · 210 = 3360 €.
Alejandro tiene 15 años y recibe 15 · 210 = 3150 €.
Alicia tiene 14 años y recibe 14 · 210 = 2940 €.

29. Madrid, extraordinaria 2022

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una estantería de una biblioteca hay ensayos, novelas y biografías. Tres de cada dieciséis libros de la estantería son ensayos. Las biografías junto con la tercera parte de los ensayos exceden en dos a las novelas. Si retiráramos la mitad de los ensayos y la quinta parte de las novelas quedarían ciento cinco libros. Calcule el número de libros de cada clase que hay en la estantería.

Solución:

Sean *x*, *y*, *z* el número de ensayos, novelas y biografía, respectivamente. El total de libros en la biblioteca será $x+y+z$.

Con los datos del enunciado se obtiene:

$\frac{3}{16}(x+y+z)=x \rightarrow$ 3 de cada 16 libros son ensayos;

$z+\frac{1}{3}x=y+2 \rightarrow$ las biografias junto con la tercera parte …;

Si se retiran la mitad de los ensayos, queda la otra mitad: $\frac{1}{2}x$; si se retira la quinta parte de las novelas, quedan $\frac{4}{5}y$. Con esto se plantea la tercera ecuaicón:

$\frac{1}{2}x+\frac{4}{5}y+z=105$.

Se obtiene el sistema: $\begin{cases} \frac{3}{16}(x+y+z)=x \\ z+\frac{1}{3}x=y+2 \\ \frac{1}{2}x+\frac{4}{5}y+z=105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x-3y-3z=0 \\ x-3y+3z=6 \\ 5x+8y+10z=1050 \end{cases}$.

Puede esolverse haciendo tansformaciones de Gauss:

$$\begin{cases} 13x-3y-3z=0 \\ x-3y+3z=6 \\ 5x+8y+10z=1050 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 13E2-E1 \\ E3-5E2 \end{matrix} \begin{cases} 13x-3y-3z=0 \\ -36y+42z=78 \\ 23y-5z=1020 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ 5E2 \\ 42E3 \end{matrix} \begin{cases} 13x-3y-3z=0 \\ -180y+210z=390 \\ 966y-210z=42840 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ E3+E2 \end{matrix} \begin{cases} 13x-3y-3z=0 \\ -180y+210z=390 \\ 786y=43230 \end{cases} \rightarrow \text{despejando y sustituyendo: } y = 55;\ z = 49;\ x = 24.$$

Por tanto, en la biblioteca hay 24 ensayos, 55 novelas y 49 biografías.

30. Madrid, extraordinaria 2022

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran las matrices reales

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) (1 punto) Calcule para qué valores del parámetro k tiene inversa la matriz AB. Calcule la matriz inversa de AB para $k=1$.

b) (1 punto) Calcule BA y discuta su rango en función del valor del parámetro real k.

c) (0.5 puntos) En el caso $k = 1$, escriba un sistema incompatible de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes sea BA.

Solución:

a) Si $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C=A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 2 \\ k & k-1 \end{pmatrix}$.

Tendrá inversa cuando su determinante se distinto de 0:

$$|C|=\begin{vmatrix} k & 2 \\ k & k-1 \end{vmatrix}=k^2-k-2k=k\cdot(k-3)\neq 0 \to k\neq 0 \text{ y } 3.$$

Para $k = 1$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $|C|=-2$.

Su inversa es $C^{-1}=\dfrac{(C_{ij})^t}{|C|}$; donde $(C_{ij})=Adj(C)$ es la matriz de los adjuntos.

La matriz de los adjuntos es $(C_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1}=-\dfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

b) $D=B\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+k & 0 & k-1 \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}$.

El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.

$$|D|=\begin{vmatrix} 1+k & 0 & k-1 \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix}=(1+k)\cdot(-k+1)+(k-1)\cdot(1+k)=0$$ $\Rightarrow$ el rango es menor que 3 para cualquier valor de k.

El menor $|D_1|=\begin{vmatrix} 1+k & 0 \\ 1-k & 2 \end{vmatrix}=2(k+1)\neq 0$ cuando $k\neq -1$.

El menor $|D_2|=\begin{vmatrix} -2 & k+1 \\ -1 & k \end{vmatrix}=-k+1\neq 0$ cuando $k\neq 1$.

Por tanto, para cualquier valor de k siempre hay un menor de orden 2 no nulo; luego, el rango de $B\cdot A$ es 2.

c) Para $k = 1$, $D = B{\cdot}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Haciendo que $x = 1$, $y = 2$ y $z = 0$ cumplan las dos primeras ecuaciones, pero no la tercera, se forma el sistema $\begin{cases} 2x = 2 \\ -2y + 2z = -4 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$.

Aunque no sea necesario hacer más comprobaciones, si se hacen transformaciones de Gauss en ese sistema se obtiene:

$$\begin{cases} 2x = 2 \\ -2y + 2z = -4 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ 2E3 - E2 \end{matrix} \begin{cases} 2x = 2 \\ -2y + 2z = -4 \\ 2x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3 - E1 \end{matrix} \begin{cases} 2x = 2 \\ -2y + 2z = -4 \\ 0 = 2 \end{cases} \to \text{absurdo.}$$

<u>**31**. Murcia, ordinaria 2022</u>

1: [2,5 p.] La suma de las edades de Carmela, Esperanza y Aurora es 68 años. La edad de Carmela es 5 años más que la mitad de la suma de las edades de Esperanza y Aurora. Además, dentro de 4 años la edad de Aurora será la edad que actualmente tiene Esperanza. Calcule las edades de cada una de ellas.

<u>Solución</u>:

Sean x, y, z las edades de Carmela, Esperanza y Aurora, respectivamente.

Con los datos del enunciado se obtiene:

$x + y + z = 68 \to$ la suma de sus edades esz 68;

$x = 5 + \dfrac{y+z}{2} \to$ la edad de Carmela es 5 años mas que …;

$z + 4 = y \to$ dentro de 4 años ...

Se obtiene el sistema: $\begin{cases} x + y + z = 68 \\ x = 5 + \dfrac{y+z}{2} \\ z + 4 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 68 \\ 2x - y - z = 10 \\ y - z = 4 \end{cases}$.

Puede esolverse haciendo tansformaciones de Gauss:

$$\begin{cases} x + y + z = 68 \\ 2x - y - z = 10 \\ y - z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2 + E1 \\ E3 + E1 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 68 \\ 3x = 78 \to x = 26 \\ x + 2y = 72 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 68 \\ x = 26 \downarrow \\ 26 + 2y = 72 \to y = 23 \end{cases}.$$

Sustituyendo los valores de x e y en la primera ecuación se tiene que $z = 19$.

Por tanto: Carmela tiene 26 años, Esperanza, 23 años; Aurora, 19 años.

32. Murcia, ordinaria 2022

2: Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Si I denota la matriz identidad de orden 3, compruebe que $A^3=-I$ y calcule A^{2023}.

b) **[0,5 p.]** Calcule la inversa de A.

c) **[1 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AX-B^T=A^2$, donde B^T denota la matriz traspuesta de B.

Solución:

a) Multiplicando:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ \boxed{1 \quad -4 \quad -5} \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & \boxed{4} \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-I.$$

Teniendo en cuenta este resultado,

$$A^{2023}=A^{2022}\cdot A=A^{3\cdot 674}\cdot A=\left(A^3\right)^{674}\cdot A=(-I)^{674}\cdot A=I\cdot A=A.$$

b) La matriz A es invertible, pues $|A|=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=-1\neq 0$.

Su inversa, A^{-1}, cumple que $A^{-1}\cdot A=I$.

Como $A^3=A^2\cdot A=-I\Rightarrow\left(-A^2\right)\cdot A=I\Rightarrow A^{-1}=-A^2=-\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

(Es fácil comprobar que $A^{-1}\cdot A=I$).

b) $AX-B^T=A^2\Rightarrow AX=A^2+B^T\Rightarrow A^{-1}\cdot(AX)=A^{-1}\cdot\left(A^2+B^T\right)\Rightarrow X=A^{-1}\cdot\left(A^2+B^T\right)\Rightarrow$

$$X=A^{-1}\cdot A^2+A^{-1}\cdot B^T.$$

Como $A^{-1}\cdot A^2=-A^2\cdot A^2=-A\cdot A^3=-A\cdot(-I)=A$, se

$$X=A^{-1}\cdot A^2+A^{-1}\cdot B^T\Rightarrow X=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -9 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -9 & -14 \\ 0 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

<u>**33**. Murcia, extraordinaria 2022</u>

2: Se dice que una matriz cuadrada A es idempotente si cumple que $A^2 = A$.

a) **[0,75 p.]** Si A es una matriz idempotente, calcule razonadamente A^{2022}.

b) **[0,75 p.]** Si A es una matriz idempotente y regular (o inversible), calcule razonadamente su determinante.

c) **[1 p.]** Determine para qué valores de a y b la siguiente matriz es idempotente

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

<u>Solución</u>:

a) Si $A^2 = A \Rightarrow A^3 = \left(A^2\right) \cdot A = (A) \cdot A = A^2 = A \Rightarrow A^4 = A \ \ldots \ A^{2022} = A$.

b) Si $A^2 = A \Rightarrow \left|A^2\right| = |A|$.

Como $\left|A^2\right| = |A| \cdot |A| = |A|^2$, entonces: $|A|^2 = |A|$. Si $|A| = x \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$.

Como A es regular, entonces $|A| = 1$.

c) Si $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, para que $A^2 = A$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2 & (1-a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 = a \\ (1-a)^2 = 1-a \\ b^2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \\ b = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \end{cases}.$$

34. Navarra, ordinaria 2022

P2) Calcula los valores de t para los que la matriz $A^{26}+A^{25}$ es matriz singular, siendo

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & t-1\end{pmatrix}$$ (2.5 puntos)

Solución:

Una matriz es singular cuando su determinante vale 0.

En este caso, hay que encontrar los valores de t para los que se cumple que $\left|A^{26}+A^{25}\right|=0$.

Como

$A^{26}+A^{25}=A^{25}\cdot(A+I)\Rightarrow\left|A^{26}+A^{25}\right|=\left|A^{25}\right|\cdot|A+I|=|A|^{25}\cdot|A+I|\rightarrow$ (Habría que recordar que el determinante de un producto de matrics es el producto de sus determinantes).

$$\left|A^{26}+A^{25}\right|=0\Rightarrow\left|A^{25}\right|=|A|^{25}=0 \text{ o } |A+I|=0\rightarrow|A|=0 \text{ o } |A+I|=0.$$

Como $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & t-1\end{pmatrix}\Rightarrow A+I=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & t-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & t\end{pmatrix}$.

$\rightarrow|A|=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & t-1\end{vmatrix}=1\neq 0$;

$\rightarrow|A+I|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & t\end{vmatrix}=t+1=0\Rightarrow t=-1$.

Por tanto, para que $A^{26}+A^{25}$ sea una matriz singular es necesario que $t=-1$.

35. Navarra, extraordinaria 2022

P2) Demuestra que se cumple $|A\cdot B|=0$ para toda matriz A de dimensión 3×2, siendo B la siguiente matriz:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$ (2.5 puntos)

Solución:

Si $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{pmatrix}$, $A\cdot B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b & a+2b\\ c & d & c+2d\\ e & f & e+2f\end{pmatrix}$.

En la matriz producto se observa que la tercera columna es una combiunación lineal de las dos primeras: $C3=C1+2C2$. En consecuencia, su determinante vale 0: $|A\cdot B|=0$.

36. País Vasco, ordinaria 2022

Ejercicio A1

Discute la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones lineales que sigue en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} x + y + \alpha z = \alpha, \\ 2x + \alpha y + \alpha z = 1, \\ x + \alpha y + z = 1. \end{cases}$$

Resuelve el sistema para $\alpha = -1$ y $\alpha = 1$, si es posible.

Solución:
Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & \alpha \\ 2 & \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \end{array}\right) = M .$$

Por el teorema de Rouché:
Si r(A) = r(M) = 3 $\to$ sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 $\to$ sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) $\to$ sistema incompatible: no tiene solución
El determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 2 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \left(\alpha - \alpha^2\right) - \left(2 - \alpha\right) + \alpha\left(2\alpha - \alpha\right) = 2\alpha - 2 .$$

$\to$ Se anula si $\alpha = 1$.
Por tanto:

- Si $\alpha \neq 1$, como $|A| \neq 0$, el sistema será compatible determinado: r(A) = r(M) = 3.
- Si $\alpha = 1$, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = M$.

(Hay tres columnas repetidas; para el cálculo del rango puede prescindirse de dos de ellas).

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ rango de A = rango de M = 2.

Por tanto, si $\alpha = 1$, el sistema será compatible determinado.

En este caso, el sistema será $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z \\ 2x + y = 1 - z \end{cases}$.

Directamente se observa que $x = 0 \to$ (haciendo $z = t$) $\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$.

→ Para α = −1 es sisterma es compatible determinado:

$$\begin{cases} x+y-z=-1 \\ 2x-y-z=1 \\ x-y+z=1 \end{cases} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Puede resolverse por la regla de Cramer.

La solución será:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2-2+0}{-4} = 0;\quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2+3-1}{-4} = -1;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0-1+1}{-2} = 0.$$

<u>**37**. País Vasco, extraordinaria 2022</u>

Ejercicio B1

Calcula de manera razonada, aplicando las propedads adecuadas, el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

sabiendo que

$$\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6.$$

<u>Solución</u>:

a) Se aplicarán las siguientes propiedades de los determinantes:

(1) Si se intercambian entre sí dos filas de un determinante, su valor es el mismo cambiado de signo.

(2) Un determinante no varía si a una fila se le suma o resta otra fila cualquiera, elemento a elemento.

(3) Si los elementos de una fila se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por ese mismo número; esto permite "sacar factor" común de una fila o columna. Esto es: $\det(k \cdot F1, F2, ..., Fn) = k \cdot \det(F1, F2, ..., Fn)$.

Por (3):

$$\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow 2 \cdot \begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ x & y & z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow \begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ x & y & z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 3.$$

Por (2):

$$\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ x & y & z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ F3-F2 \end{array}\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow \begin{array}{r} F1-F3 \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 3.$$

Por (1):

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow \begin{array}{r} \\ F3 \\ F2 \end{array}\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -3.$$