ALGUNOS PROBLEMAS DE GEOMETRÍA PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE EBAU–EvAU–PEBAU… DE 2021

En este bloque de GEOMETRÍA se resuelven 42 ejercicios. He buscado la mayor diversidad entre todos los propuestos en la Pruebas de "Selectividad" de las 17 Comunidades españolas. El lecto atento (profesor o estudiante) descubrirá que hay algo de casi todo: que la mayoría de los conceptos presentes en el currículo del Geometría aparecen en esta selección. No obstante, hay algunos problemas que se presentan con mayor frecuencia; entre ellos:
1) Determinación de la ecuación de una recta o de un plano en sus diferentes formas.
2) Cálculo del punto simétrico respecto de un plano.
3) Aplicaciones del producto escalar, vectorial y mixto: distancias; ángulos entre rectas y planos; perpendicularidad; áreas y volúmenes.
4) Problemas de dependencia lineal y posiciones relativas de rectas y planos. Perpendicularidad recta/plano.

1. Andalucía, ordinaria 2021
EJERCICIO 7 (2,5 puntos)
Consideradas las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0 \\ -3x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}.$$

a) Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $P(1,0,-5)$. (1,5 puntos)
b) Calcula el seno del ángulo que forma la recta r con el plano $\pi \equiv -2x + y + 2z = 0$. (1 punto)

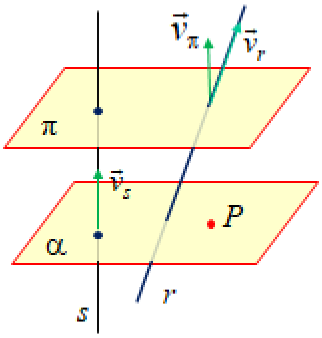
Solución:

a) El plano α, perpendicular a s, tiene por vector característico $\vec{v}_\alpha = \vec{v}_s = (-2, 1, 2)$.

Su ecuación será: $\alpha \equiv -2x + y + 2z = d$.

Como pasa por $P(1, 0, -5)$: $-2\cdot1 + 0 + 2\cdot(-5) = d \Rightarrow d = -12$.

Por lo tanto, su ecuación es $\alpha \equiv -2x + y + 2z = -12$.



b) Vector de dirección de r:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_{\pi 1} \times \vec{v}_{\pi 2} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{u}_1 - 7\vec{u}_2 - 5\vec{u}_3 = (-8, -7, -5).$$

El seno del ángulo que forma la recta r con el plano $\pi \equiv -2x + y + 2z = 0$ es igual al coseno del ángulo que forman $\vec{v}_r = (-8, -7, -5)$ y $\vec{v}_\pi = (-2, 1, 2)$. Se obtiene mediante el producto escalar:

$$\cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|} = \frac{(-2,\ 1,\ 2)\cdot(-8,\ -7,\ -5)}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{64+49+25}} = \frac{1}{3\sqrt{138}}.$$

2. Andalucía, extraordinaria 2021

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

La recta perpendicular desde el punto $A(1,1,0)$ a un cierto plano π corta a éste en el punto $B\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

a) Calcula la ecuación del plano π. **(1.5 puntos)**

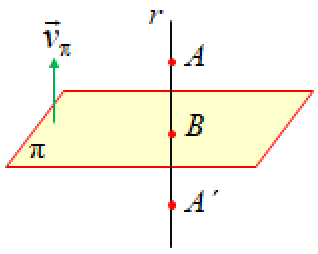
b) Halla la distancia del punto A a su simétrico respecto a π. **(1 punto)**

Solución:

Sea el plano $\pi \equiv ax+by+cz+d=0$.

Su vector característico viene dado por

$\overrightarrow{AB}$ = (1, 1/2, 1/2) – (1, 1, 0) = (0, –1/2, 1/2).



Luego, su ecuación será: $\pi \equiv -\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z+d=0$.

Como debe contener a B: $\pi \equiv -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+d=0 \Rightarrow d=0$.

Por tanto, $\pi \equiv -\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0 \Rightarrow \pi \equiv y-z=0$.

b) La distancia de A a su simétrico respecto a π es el doble que la distancia de A a π.

$$d(A,A')=2d(A,\pi)=2\cdot\left|\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\right|=\sqrt{2}.$$

También es el doble que la distancia entre A y B:

$$d(A,B)=\sqrt{(1-1)^2+(1-(1/2))^2+(0,-1/2)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Luego, $d(A,A')=2d(A,B)=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.

3. Aragón, ordinaria 2021

8) Calcule la ecuación implícita de la recta (como intersección de dos planos) que pasa por el punto $A=(0,1,1)$ y es paralela a los planos: π_1 que contiene los puntos B_1, B_2, B_3, y $\pi_2 \equiv x+2z=1$, siendo:

$$B_1=(-1,0,2),\ B_2=(1,3,1),\ B_3=(2,-1,0).$$

Solución:

El plano π_1 que contiene a los puntos B_1, B_2 y B_3 está determinado por el punto B_1 (o cualquiera de los otros dos) y por los vectores $\overrightarrow{B_1B_2}$ y $\overrightarrow{B_1B_3}$:

$\overrightarrow{B_1B_2}$ = (1, 3, 1) – (–1, 0, 2) = (2, 3, –1); $\overrightarrow{B_1B_3}$ = (2, –1, 0) – (–1, 0, 2) = (3, –1, –2).

Luego:

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} x=-1+2t+3h \\ y= \quad 3t-h \\ z=2-t-2h \end{cases} \to \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 3 \\ y & 3 & -1 \\ z-2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv -7(x+1)+y-11(z-2)=0 \Rightarrow$$

$$\pi_1 \equiv 7x-y+11z-15=0.$$

La recta pedida viene dada por la intersección de los planos paralelos a π_1 y π_2 que contienen al punto A = (0, 1, 1).

Plano paralelo a π_1 que contiene al punto A = (0, 1, 1):

$$\pi'_1 \equiv 7(x-0)-(y-1)+11(z-1)=0 \Rightarrow \pi'_1 \equiv 7x-y+11z-10=0.$$

Plano paralelo a π_2 que contiene al punto A = (0, 1, 1):

$$\pi'_2 \equiv (x-0)+2(z-1)=0 \Rightarrow \pi'_2 \equiv x+2z-2=0.$$

La ecuación implícita de la recta pedida será:

$$r \equiv \begin{cases} 7x-y+11z-10=0 \\ x+2z-2=0 \end{cases}.$$

4. Aragón, ordinaria 2021

9) Sean los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{u_1} = (-1,1,1), \quad \overrightarrow{u_2} = (0,3,1), \quad \overrightarrow{u_3} = (1,-2,0), \quad \overrightarrow{u_4} = (-2,0,1)$$

a) (1 punto) Compruebe si los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo:

$$\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}, \quad \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3}, \quad \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{u_4}.$$

b) (1 punto) Calcule las siguientes expresiones:

$$(2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}) \cdot (2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}), \qquad (\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}) \times (\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}),$$

siendo $\cdot$ y $\times$ los productos escalar y vectorial de dos vectores respectivamente.

Solución:

a) Los vectores considerados son:

$\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}$ = 2 · (–1, 1, 1) – (0, 3, 1) = (–2, –1, 1);

$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3}$ = (–1, 1, 1) + (1, –2, 0) = (0, –1, 1);

$\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{u_4}$ = (–2, 0, 1).

Estos vectores serán linealmente dependientes si el determinante correspondiente vale 0; en caso contrario serán linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 2 = 2$, entonces los vectores son linealmente independientes.

b) Producto escalar:

$\left(2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}\right) \cdot \left(2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}\right)$ = (–2, –1, 1) · (–2, –1, 1) = $(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 = 6$.

El vector $\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}$ = (–2, 0, 1) – (–1, 1, 1) = (–1, –1, 0).

Por tanto, el producto vectorial $\left(\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}\right) \times \left(\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}\right)$ = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ = (0, 0, 0).

Nota: este resultado se podría haber escrito directamente, pues por definición, el producto vectorial de un vector por sí mismo es el vector nulo.

Recuerda que el valor del módulo del producto vectorial vale: $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot |\sin(\vec{v}, \vec{w})|$. En este caso, $\sin(\vec{v}, \vec{v}) = \sin 0 = 0$.

5. Aragón, extraordinaria 2021

8) Calcule la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, −2, 0) y es perpendicular al plano determinado por los puntos (1, 0, 1), (3, 1, 0) y (2, −1, 1). Exprésela como intersección de dos planos.

Solución:

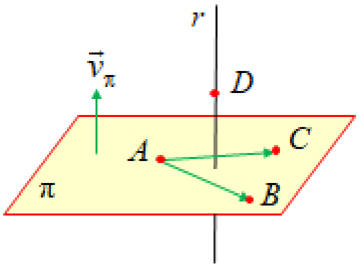
El plano que pasa por los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(3, 1, 0)$ y $C(2, -1, 1)$ está determinado por cualquiera de esos puntos, por ejemplo (1, 0, 1), y por los vectores:

$\overrightarrow{AB} = (3, 1, 0) - (1, 0, 1) = (2, 1, -1)$ y $\overrightarrow{AC} = (2, -1, 1) - (1, 0, 1) = (1, -1, 0)$.

Luego:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z-1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -(x-1) - y - 3(z-1) = 0 \Rightarrow$$

$\pi \equiv x + y + 3z - 4 = 0$.



Las rectas perpendiculares a π tienen la dirección definida por el vector normal del plano π: $\vec{v}_\pi = (1, 1, 3)$.

Como pasa por el punto $D(1, -2, 0)$, sus ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = \quad 3t \end{cases}$.

Eliminando t (se despeja en la primera ecuación y se sustituye en las otras dos) se obtiene la expresión pedida:

$$r \equiv \begin{cases} t = x - 1 \\ y = -2 + t \\ z = \quad 3t \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} t = x - 1 \\ y = -2 + (x-1) \\ z = \quad 3(x-1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} y = -3 + x \\ z = 3x - 3 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0 \end{cases}.$$

6. Asturias, ordinaria 2021

Bloque 3.A Dadas las rectas $r : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = z$ y $s : \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$

a) Comprueba que las rectas se cruzan. (0.75 puntos)

b) Obtenga el plano π que contiene a s y es paralelo a la recta r. Halla la distancia entre el punto $P = (-1, 1, 0)$ de la recta r y el plano π (1.25 puntos)

c) Calcula la distancia entre las rectas. (0.5 puntos)

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de ambas rectas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1+3t \\ y = 1-2t \\ z = t \end{cases} \to \vec{v}_r = (3, -2, 1);\ R = (-1, 1, 0).$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -1-2y \\ y = y \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1-2h \\ y = h \\ z = 1 \end{cases} \to \vec{v}_s = (-2, 1, 0);\ S = (-1, 0, 1).$$

Para determinar su posición relativa hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores:

$$\vec{v}_r = (3, -2, 1);\ \vec{v}_s = (-2, 1, 0) \text{ y } \overrightarrow{RS} = (-1, 0, 1) - (-1, 1, 0) = (0, -1, 1).$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3-4+2 \neq 0$, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas r y s se cruzan.

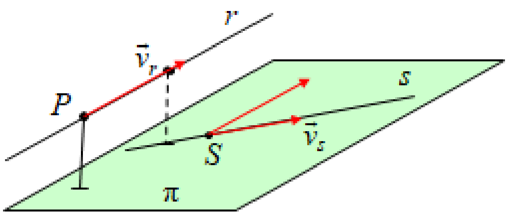
b) El plano pedido viene determinado por la recta s y el vector $\vec{v}_r = (3, -2, 1)$.

Sus ecuaciones paramétricas serán: $\pi \equiv \begin{cases} x = -1-2h+3t \\ y = h-2t \\ z = 1+t \end{cases} \to$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & -2 & 3 \\ y & 1 & -2 \\ z-1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv (x+1) + 2y + (z-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + 2y + z = 0.$$

La distancia de $P = (-1, 1, 0)$ a π es:

$$d(P, \pi) = \left| \frac{-1+2}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$



c) Como la recta r es paralela al plano que contiene a s y $P \in r$, la distancia entre ambas rectas es la misma que la distancia de P a π.

7. Asturias, ordinaria 2021

Bloque 3.B Dados los puntos $A(1,1,0)$ y $B(0,0,2)$ y la recta $r:\begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1+\lambda \\ z &= 1+\lambda \end{cases}$ Halla:

a) Un punto $C \in r$ de forma que el triángulo ABC sea rectángulo con el ángulo recto en B. (1.25 puntos)

b) El plano π que pasa por A y B y es paralelo a r. (1.25 puntos)

Solución:

a) Un punto genérico $C \in r$ es $C = (1, 1 + \lambda, 1 + \lambda)$.

El triángulo ABC es rectángulo en B si el producto escalar $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$.

Como

$\overrightarrow{AB} = (0, 0, 2) - (1, 1, 0) = (-1, -1, 2)$ y

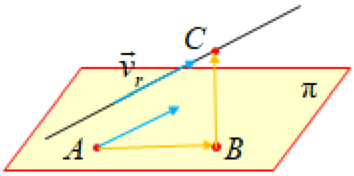
$\overrightarrow{BC} = (1, 1 + \lambda, 1 + \lambda) - (0, 0, 2) = (1, 1 + \lambda, -1 + \lambda)$

se tiene que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = (-1, -1, 2) \cdot (1, 1 + \lambda, -1 + \lambda) = -1 - 1 - \lambda - 2 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 4$.

Luego, $C = (1, 5, 5)$.

b) El plano pedido viene determinado por el punto A, y los vectores

$\vec{v}_r = (0, 1, 1)$ y $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 2)$.



Sus ecuaciones paramétricas serán: $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 \quad -\mu \\ y = 1 + \lambda - \mu \\ z = \quad \lambda + 2\mu \end{cases} \to$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 3(x-1) - (y-1) + z = 0 \Rightarrow \pi \equiv 3x - y + z - 2 = 0.$$

8. Asturias, extraordinaria 2021

Bloque 3.A

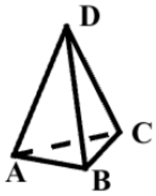
Sea el tetraedro de la figura formado por $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,6)$ y $D(\alpha,3,1)$. Calcula:

a) El área del triángulo limitado por los puntos A, B y C. (0.5 puntos)

b) La ecuación del plano π que pasa por los puntos A, B y C. (0.75 puntos)

c) El valor de α para que el vector $\overrightarrow{AD}$ sea perpendicular al plano π anterior. (0.75 puntos)

d) Para $\alpha = 5$, el punto D' simétrico de D respecto al plano π. (0.5 puntos)



Solución:

a) El área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C* viene dada por $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

En este caso:

$\overrightarrow{AB}$ = (0, 2, 0) – (3, 0, 0) = (–3, 2, 0); $\overrightarrow{AC}$ = (0, 0, 6) – (3, 0, 0) = (–3, 0, 6).

Como:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (12,\ 18,\ 6) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{144+324+36} = \sqrt{504} = 6\sqrt{14}$$

Luego, la superficie del triángulo será: $S = \frac{6\sqrt{14}}{2} = 3\sqrt{14}$.

b) El plano pedido viene determinado por el punto *A* y los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ = (–3, 0, 6).

Sus ecuaciones paramétricas son: $\pi \equiv \begin{cases} x = 3 - 3\lambda - 3\mu \\ y = \quad 2\lambda \\ z = \qquad 6\mu \end{cases} \rightarrow$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & -3 & -3 \\ y & 2 & 0 \\ z & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 12(x-3)+18y+6z=0 \Rightarrow \pi \equiv 2x+3y+z-6=0.$$

c) $\overrightarrow{AD}$ = (α, 3, 1) – (3, 0, 0) = (α – 3, 3, 1).

El vector $\overrightarrow{AD}$ será perpendicular al plano π si es paralelo a su vector característico, $\vec{v}_\pi$ = (2, 3, 1).

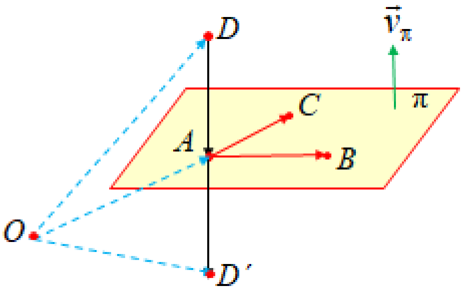
$\overrightarrow{AD}$ es paralelo a $\vec{v}_\pi$ cuando sus coordenadas son proporcionales: $\frac{\alpha-3}{2} = \frac{3}{3} = \frac{1}{1} \Rightarrow \alpha = 5$.

d) Para α = 5, $\overrightarrow{AD}$ = (2, 3, 1) → $\overrightarrow{DA}$ = (–2, –3, –1)

Si *D´* es el simétrico de *D* respecto del plano π, como $\overrightarrow{AD}$ es perpendicular al plano, se tendrá que:

$\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{DA}$ = (5, 3, 1) + 2 · (–2, –3, –1) ⇒

$\overrightarrow{OD'}$ = (1, –3, –1) → *D´* = (1, –3, –1).



9. Asturias, extraordinaria 2021

Bloque 3.B Sean el punto $P(1,0,1)$ y la recta $r:\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ Calcula:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r. (0.75 puntos)

b) La distancia de r a P y el punto $Q \in r$ donde se alcanza dicha distancia. (1 punto)

c) La ecuación del plano π que contiene a r y está a la misma distancia de P que r. (0.75 puntos)

Solución:

a) $r:\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$ → Despejando *z* en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera:

$$r:\begin{cases} y=0 \\ z=-x \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=-t \end{cases}.$$

b) Para calcular la distancia de *P* a *r* se halla el plano α que contiene a *P* y es perpendicular a *r*.

Su vector característico será $\vec{v}_\alpha$ = (1, 0, –1).

Luego: $\alpha: x-z=d$; y como contiene a *P*(1, 0, 1) se tendrá que 1 – 1 = *d* ⇒ *d* = 0.

Por tanto,

$$\alpha: x-z=0.$$

El punto de corte del plano y la recta se encuentra sustituyendo las ecuaciones de la recta en la del plano:

$t+t=0 \Rightarrow t=0$ → *Q* = (0, 0, 0).

Con esto, la distancia de *P* a *r* es igual a la distancia de *P* a *Q*:

$$d(P,r)=d(P,Q)=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

c) Si el plano π contiene a *r* y está a la misma distancia del punto *P*, entonces, su vector característico será

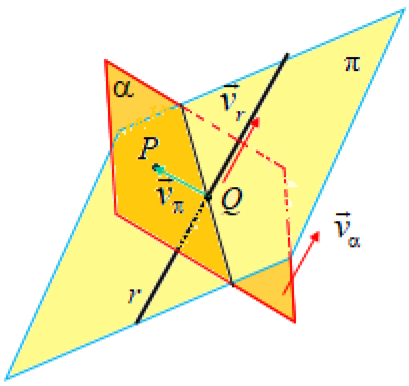
$\vec{v}_\pi=\overrightarrow{QP}$ = (1, 0, 1).

Y su ecuación:

$\pi: x+z=d$.

Como contiene a *Q*(0, 0, 0) ⇒ *d* = 0.

Por lo tanto, $\pi: x+z=0$.



10. Baleares, ordinaria 2021

5. Considera els punts,

$$A = (5, a, 7), \quad B = (3, -1, 7), \quad C = (6, 5, 4).$$

(a) Determina el valor del paràmetre a per al qual els punts A, B i C formen un triangle rectangle, amb l'angle recte al punt B. (3 punts)

(b) Per al valor de $a = -2$, calcula l'àrea del triangle de vèrtexs A, B i C. (3 punts)

(c) Per al valor de $a = 5$, calcula l'angle format pels vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. (4 punts)

Solución:

(a) El triángulo ABC es rectángulo en B si el producto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Como

$\overrightarrow{AB}$ = (3, –1, 7) – (5, a, 7) = (–2, –1 – a, 0) y $\overrightarrow{BC}$ = (6, 5, 4) – (3, –1, 7) = (3, 6, –3),

se tiene que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ = (–2, –1 – a, 0) · (3, 6, –3) = –6 –6 – 6a = 0 ⇒ a = –2.

(b) El área del triángulo de vértices A, B y C viene dada por $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right|$

Si a = –2, $\overrightarrow{AB}$ = (–2, 1, 0).

Con esto,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix} = (-3, \ -6, \ -15) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{9+36+225} = \sqrt{270} = 3\sqrt{30}$$

Luego, la superficie del triángulo será: $S = \dfrac{3\sqrt{30}}{2}$.

(c) Si a = 5, A = (5, 5, 7) → $\overrightarrow{AB}$ = (–2, –6, 0); $\overrightarrow{AC}$ = (6, 5, 4) – (5, 5, 7) = (1, 0, –3).

Aplicando el producto escalar:

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(-2,-6,0) \cdot (1,0,-3)}{\sqrt{(-2)^2+(-6)^2+0^2} \cdot \sqrt{1^2+0^2+(-3)^2}} = \frac{-2}{\sqrt{400}} = -\frac{1}{10}.$$

Por tanto, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arccos\left(\dfrac{-1}{10}\right) = 95{,}74^{\circ}$.

11. Canarias, ordinaria 2021

3B. Dadas las ecuaciones de los planos

$$\pi_1: 2x + 3y - z = 9 \quad \text{y} \quad \pi_2: \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -2 - \lambda + 2\mu \\ z = 3 + 3\lambda - \mu \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación de la recta paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(1,-1,0)$ y $B(-1,-3,2)$ 1.25 ptos

b) Calcular el ángulo formado por los planos π_1 y π_2 1.25 ptos

Solución:

a) Un vector normal al plano $\pi_1: 2x+3y-z=9$ es $\vec{v}_{\pi 1} = (2, 3, -1)$.

Ecuación cartesiana de π_2.

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y+2 & -1 & 2 \\ z-3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2: -5(x-1)+4(y+2)+3(z-3)=0 \Rightarrow$$

$$\pi_2: -5x+4y+3z+4=0 \to \vec{v}_{\pi 2} = (-5, 4, 3).$$

La recta paralela a los planos dados tiene como vector d dirección $\vec{v}_r = \vec{v}_{\pi 1} \times \vec{v}_{\pi 2}$

$$\vec{v}_r = \vec{v}_{\pi 1} \times \vec{v}_{\pi 2} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (13, \ -1, \ 23).$$

El punto medio de $A(1, -1, 0)$ y $B(-1, -3, 2)$ es $M\left(\frac{1-1}{2}, \frac{-1-3}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \to M(0, -2, 1)$.

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta pedida son: $r: \begin{cases} x = 13t \\ y = -2-t \\ z = 1+23t \end{cases}$.

b) el ángulo que forman dos planos es el que forman sus vectores normales. Se determina mediante el producto escalar.

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \cos(\vec{v}_{\pi 1}, v_{\pi 2}) = \frac{\overrightarrow{v_{\pi 1}} \cdot \overrightarrow{v_{\pi 2}}}{|\overrightarrow{v_{\pi 1}}| |\overrightarrow{v_{\pi 2}}|} = \frac{(2,3,-1)\cdot(-5,4,3)}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2} \cdot \sqrt{(-5)^2+4^2+3^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{-1}{\sqrt{700}} \approx -0,0378.$$

Por tanto, $(\pi_1, \pi_2) = \arccos(-0,0378) = 92,17^{\circ}$.

12. Canarias, extraordinaria 2021

3B. Dado el plano $\pi: -x + 3y + 2z + 5 = 0$

y las rectas secantes $r: \frac{x-5}{2} = y + 2 = 1 - z$ y $s: \frac{x+1}{6} = \frac{y}{-2} = z$

a) Sea A el punto de intersección de las rectas r y s. 1.5 ptos

Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y que pasa por A.

b) Calcular el ángulo que forman las rectas r y s. 1 pto

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de las rectas dadas son:

$$r: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \to \vec{v}_r = (2, 1, -1); \quad s: \begin{cases} x = -1 + 6h \\ y = -2h \\ z = h \end{cases} \to \vec{v}_s = (6, -2, 1);$$

El punto de corte se halla resolviendo el sistema que forman, que se obtiene igualando las ecuaciones respectivas:

$$r \equiv s \Rightarrow \begin{cases} 5 + 2t = -1 + 6h \\ -2 + t = -2h \\ 1 - t = h \end{cases} \text{(Resolviendo)} \to \begin{matrix} \\ \\ E3 + E2 \end{matrix} \begin{cases} 5 + 2t = -1 + 6h \\ -2 + t = -2h \\ -1 = -h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ h = 1 \end{cases}.$$

Luego, $A = (5, -2, 1)$.

El vector de dirección de la recta (p), perpendicular al plano π, viene dado por el vector característico del plano:

$\vec{v}_\pi = \vec{v}_p = (-1, 3, 2)$.

Luego, la recta pedida viene dada por: $p: \begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$.

b) El ángulo que forman las rectas r y s es el determinado por sus vectores de dirección: $\vec{v}_r = (2, 1, -1)$ y $\vec{v}_s = (6, -2, 1)$.

Aplicando el producto escalar:

$$\cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \frac{(2,\ 1,\ -1)\cdot(6,\ -2,\ 1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{12 - 2 - 1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{41}} = \frac{9}{\sqrt{246}} \approx 0,5738 \Rightarrow$$

ángulo (r, s) = arccos 0,5738 = 55º.

13. Cantabria, ordinaria 2021

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Se dispara un misil en línea recta desde el punto $A = (1, 2, 8)$ hacia la posición de la base enemiga $B = (3, 4, 0)$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta que contiene la trayectoria del misil.

2) [0.5 PUNTOS] Calcula el punto en el que el misil cruza el plano $z = 4$.

3) [0.5 PUNTOS] Calcula la distancia que recorre el misil desde que se lanza hasta que impacta en B.

4) [1 PUNTO] Calcula un vector perpendicular a los vectores $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AB}$.

Solución:

1) La recta pedida viene determinada por el punto $A(1, 2, 8)$ y el vector $\overrightarrow{AB} = (3, 4, 0) - (1, 2, 8) = (2, 2, -8) \equiv (1, 1, -4)$.

Sus ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 8 - 4t \end{cases}$.

2) Sustituyendo las ecuaciones de r en el plano $\pi \equiv z = 4$ se tiene:

$8 - 4t = 4 \Rightarrow t = 1$.

Luego, sustituyendo $t = 1$ en r, se tiene que el misil cruza el plano $z = 4$ en el punto $P(2, 3, 4)$.

3) Es la distancia entre los puntos A y B.

$$d(A, B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-8)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

4) Se obtiene multiplicando vectorialmente los vectores dados:

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -4)$ y $\overrightarrow{OB} = (3, 4, 0)$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (16, \ -12, \ 1).$$

14. Cantabria, ordinaria 2021

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]
Considera el plano $\Pi = 2x + 3y - 4z = 10$ y los puntos $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 3, 3)$.

1) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

2) [0.25 PUNTOS] Halla el vector normal del plano Π.

3) [0.75 PUNTOS] Determina la posición relativa del plano Π, y la recta que pasa por los puntos A y B.

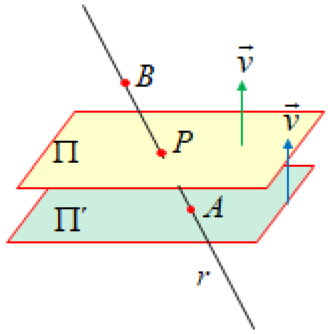
4) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano paralelo a Π que contiene al punto A.

Solución:

1) La recta pedida viene determinada por el punto $A = (1, 2, 1)$ y el vector $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB} = (2, 3, 3) - (1, 2, 1) = (1, 1, 2)$.

Luego, sus ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.



2) El plano vector normal del plano $\prod \equiv 2x + 3y - 4z = 10$ es $\vec{v} = (2, 3, -4)$. Sus coordenadas son los coeficientes de las variables de la ecuación del plano.

3) Sustituyendo las ecuaciones de la recta en la del plano:

$\prod \equiv 2(1+t) + 3(2+t) - 4(1+2t) = 10 \Rightarrow -3t + 4 = 10 \Rightarrow t = -2$.

Esto significa que la recta y el plano se cortan cuando $t = -2$, en el punto $P(-1, 0, -3)$.

4) El plano pedido es: $\prod' \equiv 2(x-1) + 3(y-2) - 4(z-1) = 0 \Rightarrow \prod' \equiv 2x + 3y - 4z = 4$.

15. Castilla La Mancha, ordinaria 2021

4. a) [**1,25 puntos**] Sea el punto $P(1,0,1)$ y la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Calcula razonadamente la distancia del punto P a la recta r.

b) [**1,25 puntos**] Sean las rectas $s \equiv \begin{cases} x = 0 & +2\lambda \\ y = 1 & -2\cdot a \cdot \lambda \\ z = 0 & +2\lambda \end{cases}$ y $t \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. Calcula razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que las dos rectas sean paralelas.

Solución:

a) Para calcular la distancia de P a r se halla el plano π que contiene a P y es perpendicular a r.

$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1+t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}.$$

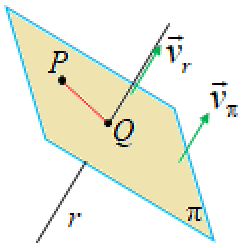
Su vector característico será el de dirección de la recta: $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (1, 1, -1)$.

Luego: $\pi \equiv x + y - z = d$; y como contiene a $P(1, 0, 1)$ se tendrá que $1 - 1 = d \Rightarrow d = 0$.

Por tanto,

$$\pi \equiv x + y - z = 0.$$

El punto de corte del plano y la recta se encuentra sustituyendo las ecuaciones de la recta en la del plano:



$$-1+t+t-(1-t) = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3} \to \text{Sustituyendo en } r\text{: } Q = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Con esto, la distancia de P a r es igual a la distancia de P a Q:

$$d(P,r) = d(P,Q) = \sqrt{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{3}}.$$

b) Las rectas r y t serán paralelas cuando lo sean sus vectores de dirección:

$\vec{v}_s = (2, -2a, 2)$; $\vec{v}_t = (a, -1, 1)$;

Son paralelos cuando sus componentes son proporcionales:

$$\frac{2}{a} = \frac{-2a}{-1} = \frac{2}{1} \Rightarrow a = 1.$$

16. Castilla La Mancha, ordinaria 2021

5. Sean los puntos $A(0,0,1)$, $B(2,1,0)$, $C(1,1,1)$ y $D(1,1,2)$.

- [**1,25 puntos**] Calcula razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.
- [**1,25 punto**] Calcula razonadamente la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C, y la de la recta perpendicular a este plano y que pasa por el punto D.

Solución:

- El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan. En este caso, los vectores: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$, siendo *A*, *B*, *C* y *D* los puntos dados.

$\overrightarrow{AB}$ = (2, 1, 0) – (0, 0, 1) = (2, 1, –1); $\overrightarrow{AC}$ = (1, 1, 1) – (0, 0, 1) = (1, 1, 0);

$\overrightarrow{AD}$ = (1, 1, 2) – (0, 0, 1) = (1, 1, 1).

Luego,

$$V_T = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right]\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\left|2-1\right| = \frac{1}{6}.$$

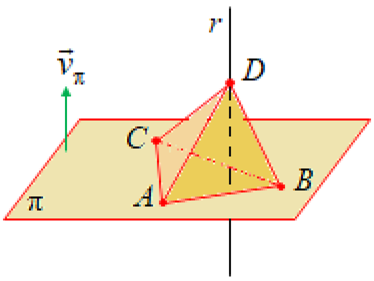
- El plano queda determinado por el punto *A* y por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Sus ecuaciones serán:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + \mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \to \pi \equiv \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - y + z - 1 = 0.$$

La recta perpendicular a π que pasa por *D* tiene como vector de dirección el normal del plano: $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r$ = (1, –1, 1).

Sus ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$.



17. Castilla La Mancha, extraordinaria 2021

4. Sean los planos $\pi_1 \equiv a\cdot x + y + 2\cdot z = 3$ y $\pi_2 \equiv 2\cdot x - y + a\cdot z = 0$.

a) [**1 punto**] Determina razonadamente el valor de a para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.

b) [**1,5 puntos**] Para $a = 1$ calcula la distancia del punto $P(2,0,1)$ al plano π_1.

Solución:

a) Los planos dados serán perpendiculares cuando lo sean sus vectores característicos, $\vec{v}_{\pi 1}$ y $\vec{v}_{\pi 2}$. Esto significa que su producto escalar debe ser 0: $\vec{v}_{\pi 1}\cdot\vec{v}_{\pi 2} = 0$.

Como $\vec{v}_{\pi 1}$ = (*a*, 1, 2) y $\vec{v}_{\pi 2}$ = (2, –1, *a*), entonces:

$$\vec{v}_{\pi 1}\cdot\vec{v}_{\pi 2} = (a,\ 1,\ 2)\cdot(2,\ -1,\ a) = 2a - 1 + 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}.$$

b) Para *a* = 1, $\pi_1 \equiv x + y + 2z - 3 = 0$.

Luego, la distancia de *P*(2, 0, 1) a π_1 viene dada por:

$$d(P,\ \pi_1) = \frac{2 + 0 + 2\cdot 1 - 3}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

18. Castilla y León, ordinaria 2021

E3.- (Geometría)

a) Hallar la recta perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ que pasa por el punto $A = (0,0,0)$. **(0,8 puntos)**

b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos $P = (1,1,1)$ y $Q = (1,3,-1)$ son simétricos. **(1,2 puntos)**

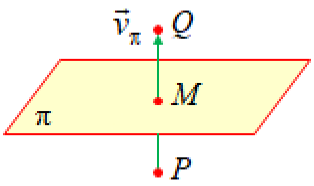
Solución:

a) La recta perpendicular a π que pasa por $A = (0, 0, 0)$ tiene como vector de dirección el normal del plano: $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (1, 1, 1)$.

Sus ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$.

b) El vector normal del plano será plano pedido viene determinado

$\overrightarrow{PQ} = (1, 3, -1) - (1, 1, 1) = (0, 2, -2)$.



El punto medio de P y Q es uno de sus puntos:

$$M = \left(\frac{1+1}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = (1, 2, 0).$$

Su ecuación será

$$\pi \equiv 0\cdot(x-1) + 2\cdot(y-2) - 2\cdot(z-0) = 0 \Rightarrow \pi \equiv y - z - 2 = 0.$$

19. Castilla y León, extraordinaria 2021

E4.- (Geometría)

Dada la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$

a) Calcular el plano π_1 que pasa por $A = (1,2,3)$ y es perpendicular a la recta r. **(0,5 puntos)**

b) Calcular el plano π_2 que pasa por $B = (-1,1,-1)$ y contiene a la recta r. **(1,5 puntos)**

Solución:

a) $r \equiv x-1=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \to \vec{v}_r = (1, -1, 2)$; $R = (1, 2, 1) \in r$.

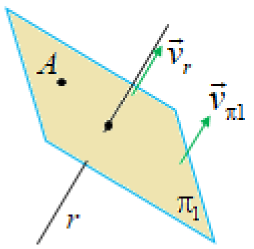
El vector característico de π_1 será el de dirección de la recta:

$\vec{v}_{\pi 1} = \vec{v}_r = (1, -1, 2)$.

Luego: $\pi_1 \equiv x - y + 2z = d$; y como pasa por $A = (1, 2, 3)$ se tendrá que $1 - 2 + 6 = d \Rightarrow d = 5$.

Por tanto,

$\pi_1 \equiv x - y + 2z - 5 = 0$.

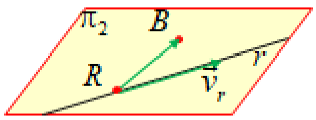


b) El plano queda determinado por el punto R y por los vectores

$\vec{v}_r = (1, -1, 2)$ y $\overrightarrow{RB} = (-1, 1, -1) - (1, 2, 1) = (-2, -1, -2)$.

Sus ecuaciones son:

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} x=1+\lambda-2\mu \\ y=2-\lambda-\mu \\ z=1+2\lambda-2\mu \end{cases} \to \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ y-2 & -1 & -1 \\ z-1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$



$$\pi_2 \equiv 4(x-1) - 2(y-2) - 3(z-1) = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv 4x - 2y - 3z + 3 = 0.$$

20. <u>Cataluña, ordinaria 2021</u>

3. Considere el punto $P=(-1, 3, 1)$, el plano $\pi: x=y$ y la recta $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z-2$.

a) Encuentre las coordenadas del punto P' simétrico a P respecto del plano π.
[1,25 puntos]

b) De todos los planos que contienen la recta r, encuentre la ecuación cartesiana del que es perpendicular al plano π.
[1,25 puntos]

<u>Solución</u>:

a) Sea $P' = (x_0, y_0, z_0)$ el simétrico de $P = (-1, 3, 1)$ respecto de π.

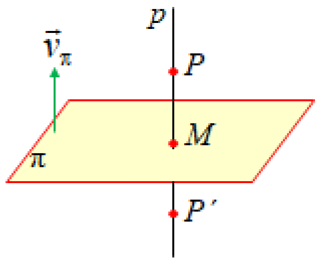
Ambos puntos, P y P' estarán en la recta p, perpendicular a π por P. Además, si M es el punto de corte de la recta y el plano, M debe ser el punto medio entre P y P'.

Como $\pi: x=y \Rightarrow \pi: x-y=0 \rightarrow \vec{v}_\pi = (1, -1, 0)$, se deduce que $p: \begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=1 \end{cases}$.

Corte de la recta p con plano π:

$(-1+\lambda)-(3-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=2$

Por tanto, $M = (1, 1, 1)$.



Punto medio de P y P': $\left(\frac{-1+x_0}{2}, \frac{3+y_0}{2}, \frac{1+z_0}{2}\right)$

Como $M = (1, 1, 1) = \left(\frac{-1+x_0}{2}, \frac{3+y_0}{2}, \frac{1+z_0}{2}\right) \Rightarrow$

$1=\frac{-1+x_0}{2} \Rightarrow x_0=3$; $1=\frac{3+y_0}{2} \Rightarrow y_0=-1$; $1=\frac{1+z_0}{2} \Rightarrow z_0=1$.

Por tanto, $P' = (3, -1, 1)$.

b) La recta $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z-2 \Leftrightarrow r: \begin{cases} 3(x-1)=2y \\ y=3(z-2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} 3x-2y-3=0 \\ y-3z+6=0 \end{cases}$.

Luego, la expresión del haz de planos que contiene a r será:

$3x-2y-3+k(y-3z+6)=0 \rightarrow 3x+(k-2)y-3kz+6k-3=0$.

El vector característico de estos planos, que depende de k, será: $\vec{v}=(3, k-2, -3k)$.

Para que el plano buscado sea perpendicular a π debe cumplirse que $\vec{v}\cdot\vec{v}_\pi=0$.

Por tanto:

$(3, k-2, -3k)\cdot(1, -1, 0)=3-k+2=0 \Rightarrow k=5$.

El plano buscado será: $3x+3y-15z+27=0 \Rightarrow x+y-5z+9=0$.

21. Cataluña, extraordinaria 2021

3. En $\mathbb{R}^3$ es donen els punts $A = (3, 1, 1)$, $B = (0, 0, 1)$, $C = (4, 1, 2)$ i $D = (1, 1, t)$, en què t és un valor real.

a) Per a quin valor de t els quatre punts són coplanaris?
[1 punt]

b) Trobeu el valor de t per tal que el tetraedre (irregular) que formen els quatre punts tingui un volum de $5u^3$.
[1,5 punts]

NOTA: El volum d'un tetraedre definit pels vectors $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$ i $\boldsymbol{v_3}$ és igual a un sisè del valor absolut del determinant de la matriu formada per tots tres vectors,

$$V = \frac{1}{6}\left|\det(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3})\right|.$$

Solución:

a) Los cuatro puntos estarán en el mismo plano cuando los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes: el determinante asociado valdrá 0.

$\overrightarrow{AB} = (0, 0, 1) - (3, 1, 1) = (-3, -1, 0)$;

$\overrightarrow{AC} = (4, 1, 2) - (3, 1, 1) = (1, 0, 1)$;

$\overrightarrow{AD} = (1, 1, t) - (3, 1, 1) = (-2, 0, t-1)$.

Luego, $\begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t-1+2=0 \Rightarrow t=-1$.

b) El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan.

Luego,

$$V_T = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right]\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & t-1 \end{matrix}\right\| = 5 \Rightarrow \frac{1}{6}|t+1| = 5 \Rightarrow \begin{cases} t+1=30 \to t=29 \\ t+1=-30 \to t=-31 \end{cases}.$$

22. Comunidad Valenciana, ordinaria 2021

Problema 5. Dados el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

a) Calculad la distancia del punto P al plano π. (2 puntos)
b) Calculad el punto P' que es simétrico del punto P respecto del plano π. (5 puntos)
c) Calculad la ecuación del plano π' que pasa por P' y es paralelo a π. (3 puntos)

Solución:

a) La distancia de un punto a un plano viene dada por la expresión:

$$d\left(P(x_0, y_0, z_0), \pi: ax+by+cz+d=0\right) = \left|\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|.$$

En este caso, $d\left(P(1,2,3), \pi \equiv 3x+2y+z+4=0\right) = \left|\frac{3+4+3+4}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}\right| = \left|\frac{14}{\sqrt{14}}\right| = \sqrt{14}$.

b) Sea $P' = (x_0, y_0, z_0)$ el simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto de π.
Ambos puntos, P y P' estarán en la recta p, perpendicular a π por P. Además, si M es el punto de corte de la recta y el plano, M debe ser el punto medio entre P y P'.

Como $\pi \equiv 3x+2y+z+4=0 \to \vec{v}_\pi = (3, 2, 1)$, se deduce que $p: \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = 2+2\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases}$.

Corte de la recta p con plano π:

$3\cdot(1 + 3\lambda) + 2\cdot(2 + 2\lambda) + 3 + \lambda + 4 = 0 \Rightarrow 14\lambda + 14 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$.

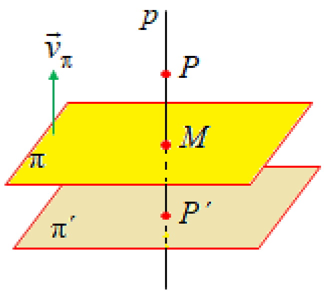
Por tanto, $M = (-2, 0, 2)$.

Punto medio de P y P': $\left(\frac{1+x_0}{2}, \frac{2+y_0}{2}, \frac{3+z_0}{2}\right)$

Como $M = (-2, 0, 2) = \left(\frac{1+x_0}{2}, \frac{2+y_0}{2}, \frac{3+z_0}{2}\right) \Rightarrow$

$-2 = \frac{1+x_0}{2} \Rightarrow x_0 = -5$; $0 = \frac{2+y_0}{2} \Rightarrow y_0 = -2$;

$2 = \frac{3+z_0}{2} \Rightarrow z_0 = 1$.



Por tanto, $P' = (-5, -2, 1)$.

c) El vector característico de ambos planos es el mismo: $\vec{v}_{\pi'} = \vec{v}_\pi = (3, 2, 1)$.

Por tanto, $\pi' \equiv 3x+2y+z+d=0$. Como debe pasar por $P' = (-5, -2, 1)$, entonces:

$\pi' \equiv 3\cdot(-5)+2\cdot(-2)+1+d=0 \Rightarrow d=18$.

Luego,

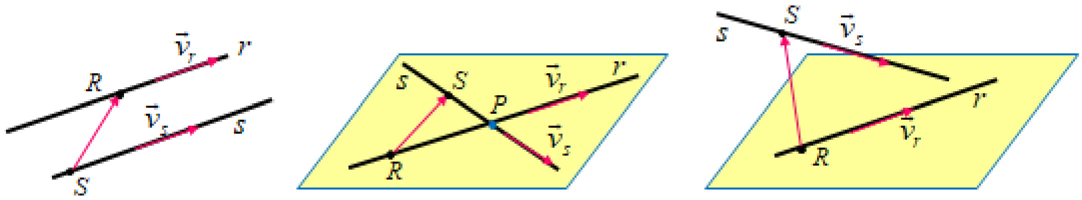
$\pi' \equiv 3x+2y+z+18=0$.

23. Comunidad Valenciana, extraordinaria 2021

Problema 2. Se dan las rectas $r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$, s: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi: x+my+z=2$ que depende del parámetro real m. Obtened:

a) La posición relativa de las rectas r y s. (4 puntos)
b) El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π. (3 puntos)
c) Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m=2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2,2,2)$. (3 puntos)

Solución:
a) La posición relativa de dos rectas se determina estudiando la relación de dependencia lineal de tres vectores: los de dirección de cada recta y cualquier vector determinado por dos puntos arbitrarios, uno de r y otro de s. Esto es: $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{RS}$, siendo $R \in r$ y $S \in s$.



Obteniéndose:
- Rectas paralelas → los vectores de dirección son paralelos: $\vec{v}_r = k \cdot \vec{v}_s$.
- Si, además, $\vec{v}_r = \overrightarrow{RS}$, las rectas coinciden.
- Las rectas se cortan (son secantes) → los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{RS}$ son linealmente dependientes, pues los tres están en el mismo plano.
- Las rectas se cruzan → los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{RS}$ son linealmente independientes, pues los tres vectores no están en el mismo plano.

Las rectas son:

$$r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} y=1-x \\ z=-1+2x \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=-1+2t \end{cases} \to \vec{v}_r = (1, -1, 2);\ R = (0, 1, -1).$$

$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2} \Rightarrow s: \begin{cases} x=1+h \\ y=-h \\ z=2h \end{cases} \to \vec{v}_s = (1, -1, 2);\ S = (1,0,0).$$

$\overrightarrow{RS} = (1, 0, 0) - (0, 1, -1) = (1, -1, 1)$.

Como $\vec{v}_r = \vec{v}_s \neq \overrightarrow{RS}$, las rectas son paralelas.

b) La recta $r: \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=-1+2t \end{cases}$ está contenida en el plano $\pi: x+my+z=2$ cuando dos puntos de r pertenezcan al plano.

El punto $R = (0, 1, -1) \in \pi$ si $m-1=2 \Rightarrow m=3$.
El punto $R' = (1, 0, 1) \in r$, también es de π, pues $1 + 1 = 2$.
Por tanto, $m = 3$.

c) Para $m = 2$, $\pi: x+2y+z=2$.

Cortan a los ejes de coordenadas en los puntos: $A(2, 0, 0)$; $B(0, 1, 0)$ y $C(0, 0, 2)$.
El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan. En este caso, los vectores: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AP}$.

$\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0) - (2, 0, 0) = (-2, 1, 0)$; $\overrightarrow{AC} = (0, 0, 2) - (2, 0, 0) = (-2, 0, 2)$;

$\overrightarrow{AP} = (2, 2, 2) - (2, 0, 0) = (0, 2, 2)$.

Luego,

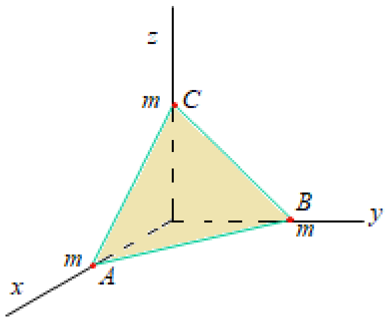
$$V_T = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AP}\right]\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}|8+4| = 2.$$

<u>**24**. Extremadura, ordinaria 2021</u>

4. Sea el plano $\Pi \equiv x + y + z = 1$. Encontrar un plano paralelo a Π tal que el triángulo formado por los puntos de corte de dicho plano con los ejes tenga área $2\sqrt{3}$. (2 puntos)

<u>Solución</u>:

Los puntos de corte del plano con los ejes cartesianos se obtienen haciendo 0 dos de sus coordenadas y determinado el valor de la otra.



En este caso, para $\Pi' \equiv x + y + z = m$, que es la ecuación de un plano paralelo a $\Pi \equiv x + y + z = 1$, los puntos de corte con los ejes son: $A(m, 0, 0)$; $B(0, m, 0)$ y $C(0, 0, m)$.
El área del triángulo que forman viene dada por "un medio del módulo del producto vectorial de dos de los vectores que lo determinan". Por ejemplo, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.
Como

$\overrightarrow{AB} = (0, m, 0) - (m, 0, 0) = (-m, m, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (0, 0, m) - (m, 0, 0) = (-m, 0, m) \Rightarrow$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -m & m & 0 \\ -m & 0 & m \end{vmatrix} = \left(m^2,\ m^2,\ m^2\right) \to \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{m^4 + m^4 + m^4} = m^2\sqrt{3}.$$

Por tanto, si $S_T = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot m^2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow m = \pm 2$.

Luego, el plano pedido puede ser cualquiera de los dos siguientes:

$\Pi_1 \equiv x + y + z = 2$; $\Pi_2 \equiv x + y + z = -2$.

25. Extremadura, extraordinaria 2021

3. Sean las rectas r y s dadas por $r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-3\lambda \\ z=1 \end{cases}$, $s:\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y-z=4 \end{cases}$.

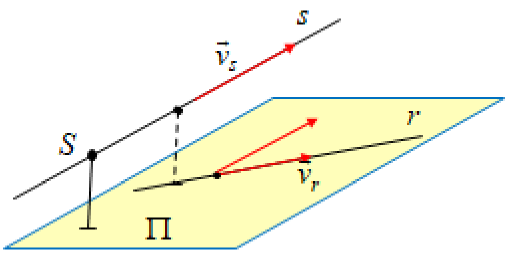
a) Obtener un plano Π que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s. (1 punto)
b) Calcular la distancia entre las dos rectas. (1 punto)

Solución:
Obtención de las ecuaciones paramétricas s:

$$s\equiv\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y-z=4 \end{cases} \to \text{ sumando ambas ecuaciones y sustituyendo:}$$

$$s\equiv \overset{E1+E2}{\begin{cases} 2x=6 \\ x-y-z=4 \end{cases}} \Rightarrow s\equiv\begin{cases} x=3 \\ y=-1-z \\ z=t \end{cases} \Rightarrow s\equiv\begin{cases} x=3 \\ y=-1-t \\ z=t \end{cases} \to \vec{v}_s = (0, -1, 1).$$

a) El plano que contiene a r y es paralelo a s viene determinado por la recta r y el vector $\vec{v}_s$ = (0, −1, 1).



Sus ecuaciones paramétricas (y cartesiana) serán:

$$\Pi\equiv\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2-3\lambda-\mu \\ z=1 \quad +\mu \end{cases} \to \pi\equiv\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-2 & -3 & -1 \\ z-1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \Pi\equiv -3(x-1)-(y-2)-(z-1)=0 \Rightarrow \Pi\equiv 3x+y+z-6=0.$$

b) La distancia entre ambas rectas será igual a la distancia del punto S = (3, −1, 0) ∈ s a Π.

$$d(r,s)=d(S,\Pi)=\left|\frac{9-1-6}{\sqrt{3^2+(-1)^2+1^2}}\right|=\frac{2}{\sqrt{11}}.$$

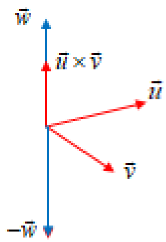
26. Extremadura, extraordinaria 2021

4. Calcular un vector de módulo 3 que sea perpendicular a los vectores $\vec{u}=(1,1,-1)$ y $\vec{v}=(2,1,0)$
(2 puntos)

Solución:
Un vector perpendicular a dos dados se obtiene haciendo su producto vectorial.
En este caso:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=(1, \ -2, \ -1).$$

El pedido será de la forma $\vec{w}=k\cdot(1, \ -2, \ -1)=(k, \ -2k, \ -k)$.



Si se quiere que su módulo sea 3, entonces:

$$|\vec{w}|=\sqrt{k^2+4k^2+k^2}=3\Rightarrow \pm k\sqrt{6}=3\Rightarrow k=\pm\frac{3}{\sqrt{6}}.$$

Por tanto, el vector pedido será: $\vec{w}=\pm\frac{3}{\sqrt{6}}(1, \ -2, \ -1)$.

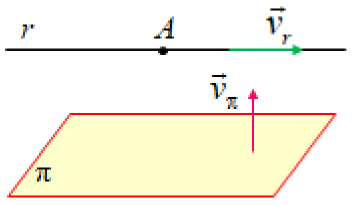
27. Galicia, ordinaria 2021

6. Geometría:

a) Halle el valor de a si el plano $\pi: ax + y + z = 0$ es paralelo a la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$.

b) Estudie la posición relativa de los planos $\pi_1: 2x + y + mz + m = 0$ y $\pi_2: (m-1)x + y + 3z = 0$ en función del parámetro m.

Solución:



a) Un plano es paralelo a una recta cuando el vector característico del plano es perpendicular al de dirección de la recta y, además, ningún punto de la recta pertenece al plano.

El vector característico del plano $\pi: ax + y + z = 0$ es $\vec{v}_\pi = (a, 1, 1)$.

El vector de dirección de la recta $\vec{v}_r = (1, 1, 1)$.

Son perpendiculares cuando $\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r = 0$: $(a, 1, 1) \cdot (1, 1, 1) = a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$.

El plano será $\pi: -2x + y + z = 0$.

Como el punto $A = (1, 1, 2) \in r$ no cumple la ecuación del plano, la recta y el plano son paralelos.

b) Los planos dados pueden ser paralelos, coincidentes o secantes.

Son paralelos (o coincidentes) cuando sus vectores característicos son paralelos: cuando sus componentes son proporcionales.

Como $\vec{v}_{\pi 1} = (2, 1, m)$ y $\vec{v}_{\pi 2} = (m-1, 1, 3)$, serán paralelos si $\vec{v}_{\pi 2} = k \cdot \vec{v}_{\pi 1}$. Esto es, si

$(m-1, 1, 3) = k \cdot (2, 1, m) \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ m = 3 \end{cases} \to$ debe cumplirse que $m = 3$.

Para $m = 3$, los planos son: $\pi_1: 2x + y + 3z + 3 = 0$ y $\pi_2: 2x + y + 3z = 0$, que efectivamente son paralelos. Puede observarse que el punto $O(0, 0, 0)$ pertenece a π_2, pero no a π_1.

Para $m \neq 3$ los planos serán secantes.

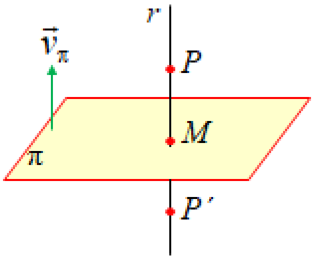
28. Galicia, extraordinaria 2021

6. Geometría:

Calcule el punto simétrico de $P(1,1,2)$ con respecto al plano $\pi: 2x - y + z + 3 = 0$.

Solución:

Sea $P'(x_0, y_0, z_0)$ el simétrico de $P(1, 1, 2)$ respecto de π.



Ambos puntos, P y P', estarán en la recta r, perpendicular a π por P. Además, si M es el punto de corte de la recta y el plano, M debe ser el punto medio entre P y P'.

Como

$$\pi: 2x - y + z + 3 = 0 \to \vec{v}_\pi = (2, -1, 1) \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}.$$

Corte de la recta r con plano π:

$$2 \cdot (1 + 2\lambda) - (1 - \lambda) + (2 + \lambda) + 3 = 0 \Rightarrow 6\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -1.$$

Por tanto, $M = (-1, 2, 1)$.

Punto medio de P y P': $\left(\dfrac{1+x_0}{2}, \dfrac{1+y_0}{2}, \dfrac{2+z_0}{2}\right)$.

Como $M = (-1, 2, 1) = \left(\dfrac{1+x_0}{2}, \dfrac{1+y_0}{2}, \dfrac{2+z_0}{2}\right) \Rightarrow$

$$-1 = \frac{1+x_0}{2} \Rightarrow x_0 = -3;\ 2 = \frac{1+y_0}{2} \Rightarrow y_0 = 3;\ 1 = \frac{2+z_0}{2} \Rightarrow z_0 = 0.$$

Por tanto, el punto buscado es $P'(-3, 3, 0)$.

29. La Rioja, ordinaria 2021

7.– (**2 puntos**) Hallar la ecuación de una recta, tal que:

a) pasa por el punto $P(0,1,1)$,

b) está contenida en el plano $\pi \equiv x+y+3z-4=0$,

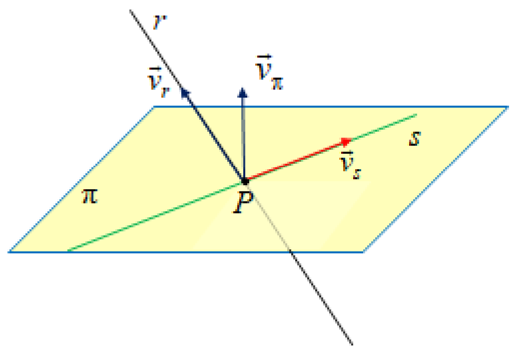
c) es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = z+3, \\ y = -z+4. \end{cases}$

Solución:

Un vector normal al plano $\pi \equiv x+y+3z-4=0$ es $\vec{v}_\pi = (1, 1, 3)$.

Si en $r \equiv \begin{cases} x = z+3 \\ y = -z+4 \end{cases}$ se hace $z = t$ se obtienen sus ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = 3+t \\ y = 4-t \\ z = t \end{cases}$.

Su vector de dirección es $\vec{v}_r = (1, -1, 1)$.



El vector de dirección de la recta *s*, contenida en π y perpendicular a *r*, debe ser perpendicular a $\vec{v}_r$ y a $\vec{v}_\pi$: se obtiene haciendo el producto vectorial $\vec{v}_r \times \vec{v}_\pi$.

Luego,

$$\vec{v}_s = \vec{v}_r \times \vec{v}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (4,\ 2,\ -2).$$

Si *s* debe pasar por *P*(0, 1, 1), su ecuación será: $s \equiv \begin{cases} x = 4h \\ y = 1+2h \\ z = 1-2h \end{cases}$.

30. La Rioja, extraordinaria 2021

8.– (2 puntos) Calcular el valor del parámetro real a para que las rectas r y s se corten y calcular este punto.

$$r \equiv \begin{cases} 4x + z &= a, \\ x + y &= 2, \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y + z &= 0, \\ x + 2z &= 2a. \end{cases}$$

Solución:

Para que las rectas r y s se corten el sistema que determinan debe ser compatible determinado.

Este sistema es: $\begin{cases} r \equiv \begin{cases} 4x + z = a \\ x + y = 2 \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2z = 2a \end{cases} \end{cases}$.

Para que tenga solución es necesario que la matriz ampliada tenga rango 3.

Esta matriz es: $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2a \end{pmatrix}$.

Para que su rango sea 3 es necesario que $|M| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ (transformando y desarrollando por la 2ª columna):

$$|M| \underset{F3-F2}{=} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2a \end{vmatrix} = 8a + 16 - 2 - a = 7a + 14 \to |M| = 0 \text{ si } a = -2.$$

Para ese valor de $a = -2$, $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, el sistema tiene solución única.

Tras las transformaciones efectuadas queda el sistema:

$\begin{cases} 4x + z = -2 \\ x + y = 2 \\ z = -2 \end{cases}$, cuya solución es $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases}$.

Por tanto, para $a = -2$ las rectas se cortan en el punto $P(0, 2, -2)$.

31. Madrid, ordinaria 2021

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} -x-y+z=0 \\ 2x+3y-z+1=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x+y-z+3=0$. Se pide:

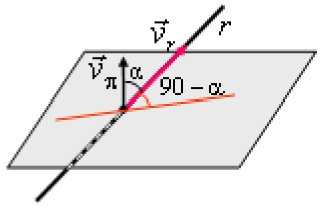
a) (0.75 puntos) Calcular el ángulo que forman r y π.

b) (1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $z-y=0$.

c) (0.75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

Solución:

a) El ángulo que forma una recta con un plano es el complementario del que determinan los vectores $\vec{v}_r$, de dirección de la recta, con $\vec{v}_\pi$, normal al plano.



Por tanto, el seno del ángulo (*r*, π),

$$\sin(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|}.$$

Ecuaciones paramétricas de *r*:

$$r \equiv \begin{cases} -x-y+z=0 \\ 2x+3y-z+1=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x+y=z \\ 2x+3y=-1+z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-t \\ z=t \end{cases} \to \vec{v}_r = (2, -1, 1).$$

Como $\pi \equiv 2x+y-z+3=0 \to \vec{v}_\pi = (2, 1, -1)$.

Luego: $\sin(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \dfrac{(2,\ 1,\ -1)\cdot(2,\ -1,\ 1)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{4-1-1}{6} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$ ángulo(*r*, π) = 19,47º.

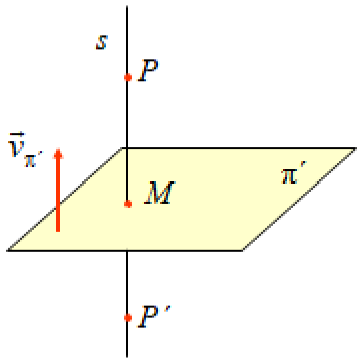
b) Punto de corte de *r* con π. Se sustituyen las ecuaciones de la recta en el plano:

$$2(1+2t)+(-1-t)-t+3=0 \Rightarrow t=-2 \to P = (-3, 1, -2).$$

Sea $P' = (x_0, y_0, z_0)$ el simétrico de *P* respecto del plano $\pi' \equiv x-y=0$.

Ambos puntos, *P* y *P*' estarán en la recta *s*, perpendicular a π´ por *P*. Además, si *M* es el punto de corte de la recta y el plano, *M* debe ser el punto medio entre *P* y *P*´.

Como $\vec{v}_{\pi'} = (1, -1, 0)$, se deduce que $s \equiv \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-2 \end{cases}$.



Corte de la recta *s* con plano π´:

$(-3 + \lambda) - (1 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 2$.

Por tanto, *M* = (−1, −1, −2).

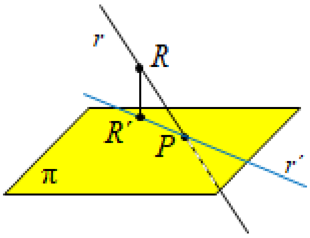
Punto medio de *P* y *P*´: $M = \left(\dfrac{-3+x_0}{2},\ \dfrac{1+y_0}{2},\ \dfrac{-2+z_0}{2}\right)$.

Como deben ser iguales, entonces

$$-1 = \frac{-3+x_0}{2} \Rightarrow x_0 = 1;\ -1 = \frac{1+y_0}{2} \Rightarrow y_0 = -3;\ -2 = \frac{-2+z_0}{2} \Rightarrow z_0 = -2.$$

Por tanto, *P*´ = (1, −3, −2).

c) La proyección ortogonal de r sobre π se obtiene proyectando dos puntos de r sobre π. Esa recta, $r´$, es la que pasa por los dos puntos proyectados. (También se podría obtener hallando el corte de π con el plano que contiene a r y es perpendicular a π).
Uno de los puntos proyectado es el de corte de π con r, $P(-3, 1, -2)$.
Otro punto de r es $R = (1, -1, 0)$. Su proyección sobre π se hace como se indicó antes:



Recta p, perpendicular a π por R: $p \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$.

Corte de p con π:

$$2(1+2t) + (-1+t) + t + 3 = 0 \Rightarrow 6t + 4 = 0 \Rightarrow t = -2/3 \rightarrow R´ = (-1/3, -5/3, 2/3).$$

El vector $\overrightarrow{PR´}$ es $(-1/3, -5/3, 2/3) - (-3, 1, -2) = (8/3, -8/3, 8/3) \equiv (1, -1, 1)$.
Por tanto, la proyección pedida, (la recta $r´$, determinada por P y $R´$), será:

$$r´ \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}.$$

<u>Observación</u>: El plano que contiene a r y es perpendicular a π es $\pi´´ \equiv y + z + 1 = 0$.

Por tanto, otra forma de dar $r´$ es: $r´ \equiv \begin{cases} y + z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$.

32. Madrid, ordinaria 2021

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los planos $\pi_1 \equiv x + y = 1$ y $\pi_2 \equiv x + z = 1$.

a) (1.5 puntos) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.

b) (0.5 puntos) Halle la recta que pasa por el punto $(0, 2, 0)$ y es perpendicular al plano π_2.

c) (0.5 puntos) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y.

Solución:

a) Los planos paralelos a $\pi_1 \equiv x + y = 1$ son de la forma $\pi \equiv x + y + d = 0$.

La distancia de un punto a un plano viene dada por la expresión:

$$d\left(P(x_0, y_0, z_0), \pi : ax + by + cz + d = 0\right) = \left|\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|.$$

En este caso, se desea que $d\left(O(0,0,0), \pi : x + y + d = 0\right) = 2$.

Luego, $\left|\dfrac{d}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right| = 2 \Rightarrow d = \pm 2\sqrt{2}$.

Los planos pedidos serán: $\pi'_1 \equiv x + y = 2\sqrt{2}$ y $\pi''_1 \equiv x + y = -2\sqrt{2}$.

b) Como $\vec{v}_{\pi 2}$ = (1, 0, 1), la recta pedida es: $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$.

c) Los puntos de corte del plano $\pi_1 \equiv x + y = 1$ con los ejes de coordenadas *x* e *y* son *P*(1, 0, 0) y *Q*(0, 1, 0).

Luego, $d\left(P, Q\right) = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

33. Madrid, extraordinaria 21

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el punto $A(1,0,-1)$, la recta $r \equiv x-1 = y+1 = \frac{z-2}{2}$ y el plano $\pi \equiv x+y-z=6$, se pide:

a) (0.75 puntos) Hallar el ángulo que forman el plano π y el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto A.

b) (0.75 puntos) Determinar la distancia entre la recta r y el plano π.

c) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por A, forma un ángulo recto con la recta r y no corta al plano π.

Solución:

a) Los planos perpendiculares a $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$ tienen como vector característico a $\vec{v}_r$ = (1, 1, 2).

Su ecuación cartesiana es $\pi' \equiv x+y+2z+d=0$.

Por pasar por $A(1, 0, -1) \Rightarrow 1-2+d=0 \Rightarrow d=1$. Luego, $\pi' \equiv x+y+2z+1=0$.

El ángulo que forman π y π' es el que forman sus vectores característicos, $\vec{v}_\pi$ = (1, 1, −1) y $\vec{v}_{\pi'}$ = (1, 1, 2). Se determina mediante el producto escalar:

$$\cos\left(v_\pi, v_{\pi'}\right) = \frac{(1,\ 1,\ -1)\cdot(1,\ 1,\ 2)}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \frac{0}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = 0.$$

Por tanto, los planos son perpendiculares.

b) El resultado anterior indica que la recta r es paralela al plano π. Por tanto, la distancia entre la recta y el plano es la de cualquier punto P de la recta al plano.

$$d(r,\pi) = d\left(P(1,-1,2), \pi \equiv x+y-z-6=0\right) = \left|\frac{1-1-2-6}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}\right| = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

c) La recta pedida, s, debe ser perpendicular, a la vez, al plano π y a la recta r. Por tanto, su dirección viene dada por el producto vectorial de $\vec{v}_r$ por $\vec{v}_\pi$.

$$\vec{v}_\pi \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2,\ -2,\ 0) \to (1, -1, 0).$$

Sus ecuaciones paramétricas son $s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -1 \end{cases}$.

34. Madrid, extraordinaria 2021

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}, \qquad s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases}$$

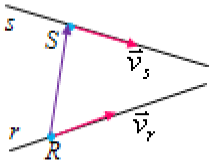
a) (1.5 puntos) Escriba una ecuación de la recta perpendicular común a r y a s.

b) (1 punto) Calcule la distancia entre r y s.

Solución:

La perpendicular común a dos rectas puede hallarse como sigue:

1) Se toman dos puntos genéricos, uno de cada una de las rectas dadas, $R \in r$ y $S \in s$, y se impone la condición de que el vector $\overrightarrow{RS}$ (o $\overrightarrow{SR}$) sea perpendicular a los de dirección de las rectas, $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$.



Se obtiene así el sistema: $\begin{cases} \overrightarrow{RS}\cdot\vec{v}_r = 0 \\ \overrightarrow{RS}\cdot\vec{v}_s = 0 \end{cases}$.

Se resuelve el sistema para obtener los puntos R y S concretos.

La recta p queda definida por el punto R (o S) y el vector $\overrightarrow{RS}$.

Para $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3} \to R = (2 + h, -1 + h, -4 - 3h)$; $\vec{v}_r = (1, 1, -3)$.

Para $s \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{matrix} \\ E2+2E1 \end{matrix}\begin{cases} x+z=2 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=t \\ y=5 \\ z=2-t \end{cases} \to$

$S = (t, 5, 2 - t)$; $\vec{v}_s = (1, 0, -1)$.

El vector $\overrightarrow{SR} = (2 + h, -1 + h, -4 - 3h) - (t, 5, 2 - t) = (2 + h - t, -6 + h, -6 - 3h + t)$.

2) Se multiplica escalarmente ($\overrightarrow{SR}\cdot\vec{v}_r = 0$, $\overrightarrow{SR}\cdot\vec{v}_s = 0$) se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{matrix} 11h-4t+14=0 \\ 4h-2t+8=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow h=\frac{2}{3} \text{ y } t=\frac{16}{3}.$$

Con esto:

$$R=\left(\frac{8}{3},\frac{-1}{3},\frac{-18}{3}\right),\ S=\left(\frac{16}{3},5,\frac{-10}{3}\right) \text{ y } \overrightarrow{RS}=\left(\frac{8}{3},\frac{16}{3},\frac{8}{3}\right)\equiv(1,\ 2,\ 1).$$

3) La recta perpendicular común, que pasa por R y lleva la dirección de $\overrightarrow{RS}$ es:

$$p:\begin{cases} x=8/3+\lambda \\ y=-1/3+2\lambda \\ z=-18/3+\lambda \end{cases}$$

b) La distancia entre ambas rectas es igual al módulo del vector $\overrightarrow{RS}$.

$$d(r,s)=\left|\overrightarrow{RS}\right|=\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{16}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\frac{8\sqrt{6}}{3}.$$

35. Murcia, ordinaria 2021

6: En este ejercicio las cuestiones a) y b) son totalmente independientes.

Considere los puntos $A=(a,4,3)$, $B=(0,0,5)$ y $C=(0,3,-1)$.

a) **[1 p.]** Calcule los valores de a para los cuales el triángulo $\widehat{ABC}$ tiene un ángulo recto en el vértice A.

b) **[1,5 p.]** Tomando el valor de $a=3$, determine la ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es paralelo a la recta dada por $\begin{cases} x-y+z = 0 \\ 2x+y = 3 \end{cases}$

Solución:

a) El triángulo ABC tiene un ángulo recto en el vértice A cuando el producto escalar $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

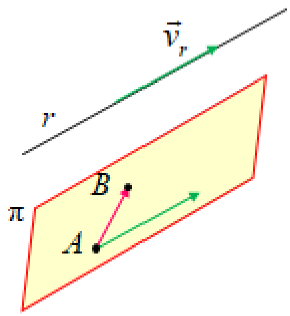
$\overrightarrow{AB}$ = (0, 0, 5) – (a, 4, 3) = (–a, –4, 2); $\overrightarrow{AC}$ = (0, 3, –1) – (a, 4, 3) = (–a, –1, –4).

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ = (–a, –4, 2) · (–a, –1, –4) = $a^2+4-8=0 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2$.

b) si a = 3, A = (3, 4, 3) y $\overrightarrow{AB}$ = (–3, –4, 2).

El plano que contiene a los puntos A y B y es paralelo a la recta $r\equiv\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ queda determinado por el punto A y los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{v}_r$.

Como $r\equiv\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow$



$$r\equiv\begin{cases} x-y+z=0 \\ y=3-2x \end{cases} \Leftrightarrow r\equiv\begin{cases} z=3-3x \\ y=3-2x \end{cases} \Leftrightarrow r\equiv\begin{cases} x=t \\ y=3-2t \\ z=3-3x \end{cases} \Rightarrow$$

$\vec{v}_r$ = (1, –2, –3).

Por tanto, la ecuación del plano es:

$$\pi\equiv\begin{cases} x=3-3\lambda+\mu \\ y=4-4\lambda-2\mu \\ z=3+2\lambda-3\mu \end{cases} \to \pi\equiv\begin{vmatrix} x-3 & -3 & 1 \\ y-4 & -4 & -2 \\ z-3 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\pi\equiv 16(x-3)-7(y-4)+10(z-3)=0 \Rightarrow \pi\equiv 16x-7y+10z-50=0.$$

36. Murcia, extraordinaria 2021

6: Los puntos $A = (2,0,0)$ y $B = (-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C se encuentra en la recta r dada por

$$r:\begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del tercer vértice C sabiendo que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por A y C.

b) **[1 p.]** Determine si el triángulo $\widehat{ABC}$ tiene un ángulo recto en A y calcule su área.

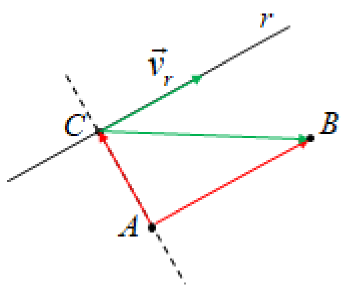
Solución:

Ecuaciones paramétricas de r:

$$r:\begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} z=11-\frac{4}{3}x \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow (x=3\lambda) \to r:\begin{cases} x=3\lambda \\ y=0 \\ z=11-4\lambda \end{cases} \to \vec{v}_r = (3,\ 0,\ -4).$$

a) Un punto genérico de r es $C = (3\lambda,\ 0,\ 11 - 4\lambda)$.

La recta r es perpendicular a la recta que pasa por A y C cuando los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\vec{v}_r$ son perpendiculares: su producto escalar debe ser 0.



$\overrightarrow{AC} = (3\lambda,\ 0,\ 11 - 4\lambda) - (2,\ 0,\ 0) = (3\lambda - 2,\ 0,\ 11 - 4\lambda)$.

$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{v}_r = (3\lambda - 2,\ 0,\ 11 - 4\lambda) \cdot (3,\ 0,\ -4) =$

$= 9\lambda - 6 - 44 + 16\lambda = 0 \Rightarrow 25\lambda - 50 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$.

Por tanto, $C = (6,\ 0,\ 3)$.

b) El triángulo ABC será rectángulo en A si $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.

$\overrightarrow{AC} = (6,\ 0,\ 3) - (2,\ 0,\ 0) = (4,\ 0,\ 3)$; $\overrightarrow{AB} = (-1,\ 12,\ 4) - (2,\ 0,\ 0) = (-3,\ 12,\ 4)$.

Como $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = (4,\ 0,\ 3) \cdot (-3,\ 12,\ 4) = -12 + 0 +12 = 0$, se deduce que el triángulo ABC es rectángulo en A.

Su área viene dada por $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

Como:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 4 & 0 & 3 \\ -3 & 12 & 4 \end{vmatrix} = (-36,\ \ -25,\ \ 48) \Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-36)^2+(-25)^2+48^2} = \sqrt{4225} = 65$$

Luego, el área del triángulo será: $S = \frac{65}{2} = 32{,}5\ \text{u}^2$.

37. Navarra, ordinaria 2021

P3) Encuentra la ecuación general del plano π que es paralelo a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ x+6y-z-7=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+2}{1}$$

y equidista de ambas. (2.5 puntos)

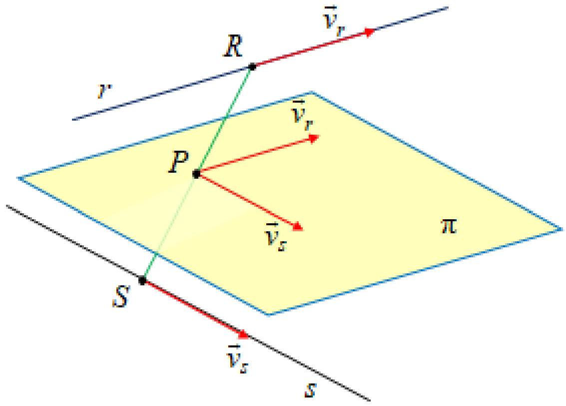
Solución:

Ecuaciones paramétricas de la recta *r*:

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ x+6y-z-7=0 \end{cases} \to r \equiv \begin{matrix} \\ E2+E1 \end{matrix}\begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ 2x+8y-4=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$r \equiv \begin{cases} (2-4y)+2y+z+3=0 \\ x=2-4y \uparrow \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} z=-5+2y \\ x=2-4y \end{cases} \to r \equiv \begin{cases} x=2-4t \\ y=t \\ z=-5+2t \end{cases}.$$

El plano pedido está determinado por los vectores de dirección de ambas rectas y por cualquier punto que equidiste de ellas.



Un punto de *r* es *R* = (2, 0, –5); su vector de dirección es $\vec{v}_r$ = (–4, 1, 2).

Un punto de *s* es *S* = (3, –2, –2); su vector de dirección es $\vec{v}_s$ = (3, 3, 1).

El punto *P*, punto medio de *R* y *S*, equidista de ambas rectas:

$$P=\left(\frac{2+3}{2},\frac{0-2}{2},\frac{-5-2}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},-1,\frac{-7}{2}\right).$$

Por tanto, la ecuación del plano es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x=5/2-4\lambda+3\mu \\ y=-1+\lambda+3\mu \\ z=-7/2+2\lambda+\mu \end{cases} \to \pi \equiv \begin{vmatrix} x-5/2 & -4 & 3 \\ y+1 & 1 & 3 \\ z+7/2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv -5\left(x-\frac{5}{2}\right)+10(y+1)-15\left(z+\frac{7}{2}\right)=0 \Rightarrow \pi \equiv -x+2y-3z-6=0\,.$$

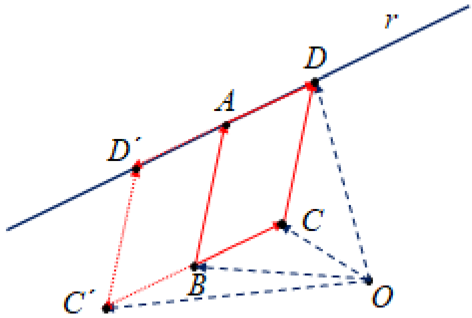
38. Navarra, ordinaria 2021

P4) Un lado de un paralelogramo está sobre la recta $r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Otro lado lo determinan los puntos $A(-1,-2,3)$ y $B(2,-2,-1)$. Calcula los otros dos vértices del paralelogramo sabiendo que su perímetro mide $16\ u$.

(2.5 puntos)

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de *r* son: $r \equiv \begin{cases} x = 1-2t \\ y = -1-t \\ z = 1+2t \end{cases}$.



Puede verse que el punto *A* pertenecen a la recta, pues para *t* = 1, *A* = (–1, –2, 3).
Por tanto, los vértices del paralelogramo *ABCD* pueden situarse como se indica en la figura.

El lado *AB*, determinado por el vector $\overrightarrow{AB}$ = (2, –2, –1) – (–1, –2, 3) = (3, 0, –4), tiene módulo $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$ u.

Como el perímetro del paralelogramo mide 16 u, entonces el lado *AD* debe medir 3 u.

Las coordenadas de *D* son: $D = (1-2t,\ -1-t,\ 1+2t) \Rightarrow$

$$\overrightarrow{AD} = (1-2t,\ -1-t,\ 1+2t) - (-1,\ -2,\ 3) = (2-2t,\ 1-t,\ -2+2t)$$

Su módulo,

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(2-2t)^2 + (1-t)^2 + (-2+2t)^2} = 3.$$

Elevando al cuadrado:

$$4-8t+4t^2+1-2t+t^2+4-8t+4t^2 = 9 \Rightarrow 9t^2-18t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = (1,\ -1,\ 1) \\ D' = (-3,\ -3,\ 5) \end{cases}.$$

Luego,

$\overrightarrow{AD}$ = (1, –1, 1) – (–1, –2, 3) = (2, 1, –2); y $\overrightarrow{AD'}$ = (–3, –3, 5) – (–1, –2, 3) = (–2, –1, 2).

Al punto *C* se llega como sigue:

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD}$ = (2, –2, –1) + (2, 1, –2) = (4, –1, –3) → *C* = (4, –1, –3).

Para el paralelogramo *ABC´D´*:

$\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD'}$ = (2, –2, –1) + (–2, –1, 2) = (0, –3, 1) → *C´* = (0, –3, 1).

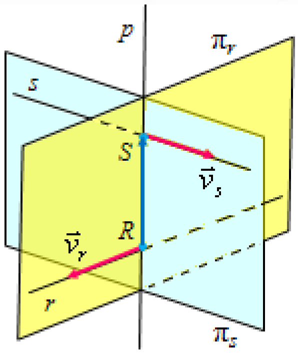
39. Navarra, extraordinaria 2021

P3) Calcula la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-6}{-1} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-2}{2}$$

(2.5 puntos)

Solución:



La perpendicular común puede obtenerse mediante la intersección de los planos π_r y π_s.

El plano π_r viene determinado por la recta r, a la que contiene, y por el vector $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$.

El plano π_s viene determinado por la recta s, a la que contiene, y por el vector $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$.

Las rectas dadas son:

$$r \equiv \begin{cases} 2y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} z=-2y \\ x=-y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases} \to \vec{v}_r = (-1, 1, -2).$$

$$s \equiv \begin{cases} x=6-\mu \\ y=6+5\mu \\ z=2+2\mu \end{cases} \to \vec{v}_s = (-1, 5, 2).$$

Luego, $\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = (12, 4, -4) \to \vec{v}_p = (3, 1, -1).$

Cálculo de π_r y π_s:

- π_r, determinado por r y $\vec{v}_r \times \vec{v}_s \Rightarrow \pi_r : \begin{cases} x=-\lambda+3h \\ y=\lambda+h \\ z=-2\lambda-h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -1 & 3 \\ y & 1 & 1 \\ z & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \pi_r$: $x-7y-4z=0$.

- π_s, determinado por s y $\vec{v}_r \times \vec{v}_s \Rightarrow \pi_s \equiv \begin{cases} x=6-\mu+3t \\ y=6+5\mu+t \\ z=2+2\mu-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-6 & -1 & 3 \\ y-6 & 5 & 1 \\ z-2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \pi_s$: $-7(x-6)+5(y-6)-16(z-2)=0 \Rightarrow \pi_s$: $-7x+5y-16z+44=0$.

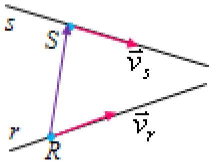
Por tanto, la perpendicular común es:

$$p \equiv \begin{cases} x-7y-4z=0 \\ -7x+5y-16z+44=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-4E1 \end{matrix} \begin{cases} x-7y-4z=0 \\ -11x+33y+44=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-7y-4z=0 \\ x=4+3y \end{cases} \Rightarrow$$

$$p \equiv \begin{cases} (4+3y)-7y-4z=0 \to z=1-y \\ x=4+3y \uparrow \end{cases} \to (\text{si } y=\lambda) \Rightarrow p \equiv \begin{cases} x=4+3\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases}.$$

En forma continua: $p \equiv \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$.

Segunda solución:
Se toman dos puntos genéricos, uno de cada una de las rectas dadas, $R \in r$ y $S \in s$, y se impone la condición de que el vector $\overrightarrow{RS}$ (o $\overrightarrow{SR}$) sea perpendicular a los de dirección de las rectas, $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$.



Se obtiene así el sistema: $\begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot \vec{v}_r = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot \vec{v}_s = 0 \end{cases}$.

Se resuelve el sistema para obtener los puntos R y S concretos.
La recta p queda definida por el punto R (o S) y el vector $\overrightarrow{RS}$.

En este caso:
$R = (-\lambda, \lambda, -2\lambda)$; $S = (6 - \mu, 6 + 5\mu, 2 + 2\mu)$
El vector $\overrightarrow{RS} = (6 - \mu + \lambda, 6 + 5\mu - \lambda, 2 + 2\mu + 2\lambda)$, que indica la dirección de la recta perpendicular común a r y s, debe ser perpendicular a los de dirección de r y s:
$\vec{v}_r = (-1, 1, -2)$ y $\vec{v}_s = (-1, 5, 2)$.

Se multiplica escalarmente ($\overrightarrow{RS} \cdot \vec{v}_r = 0$, $\overrightarrow{RS} \cdot \vec{v}_s = 0$), y se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2\mu - 6\lambda - 4 = 0 \\ 30\mu - 2\lambda + 28 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = -1,\ \mu = -1.$$

Con esto:
$R = (1, -1, 2)$; $S = (7, 1, 0)$; $\overrightarrow{RS} = (6, 2, -2) \equiv (3, 1, -1)$

Luego, la recta perpendicular común es la que pasa por R y lleva la dirección de $\overrightarrow{RS}$:

$$p \equiv \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}.$$

40. Navarra, extraordinaria 2021

P4) Halla un plano que sea tangente a la esfera de radio 3 y centro $(0,0,0)$, y que corte perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{-2}$$

Encuentra el punto de tangencia del plano con la esfera, y calcula la ecuación continua de la recta que pasa por ese punto y corta perpendicularmente a r. (2.5 puntos)

Solución:

La ecuación de la esfera es: $x^2+y^2+z^2=3^2$.

El vector característico del plano viene dado por el de dirección de la recta:

$\vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (2, 1, -2)$.

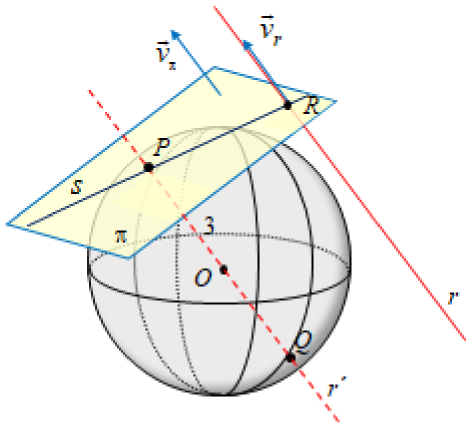
Su ecuación será:

$\pi \equiv 2x+y-2z+d=0$

Como debe estar a distancia 3 del origen, entonces:

$$d(O,\pi)=3 \to \left|\frac{d}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}\right|=3 \Rightarrow d=\pm 9.$$

Tomo $\pi \equiv 2x+y-2z-9=0$ (con la otra solución, que es $\pi' \equiv 2x+y-2z+9=0$, se puede hacer un estudio similar).



El punto de tangencia del plano encontrado con la esfera es P, punto común a la esfera y a la recta r' paralela a r por el origen.

$$r \equiv \begin{cases} x=3+2t \\ y=4+t \\ z=-4-2t \end{cases} \to r \equiv \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=-2t \end{cases}.$$

Corte de r' con la esfera:

$$x^2+y^2+z^2=9 \Rightarrow (2t)^2+t^2+(-2t)^2=9 \Rightarrow t=\pm 1.$$

Luego, $P = (2, 1, -2)$; otro punto es $Q = (-2, -1, 2)$.

La recta s, que pasa por P y es perpendicular a r, viene determinada por P y $\overrightarrow{PR}$, siendo R el punto de corte de π con r.

Sustituyendo las ecuaciones de r en π:

$$2(3+2t)+(4+t)-2(-4-2t)-9=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow R=(1, 3, -2),\ \overrightarrow{PR}=(-1, 2, 0).$$

Por tanto, la ecuación continua de s es: $s \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+2}{0}$.

Nota: Con $Q = (-2, -1, 2)$ y $\pi' \equiv 2x+y-2z+9=0$ se obtiene otra solución.

41. País Vasco, ordinaria 2021

Ejercicio B2

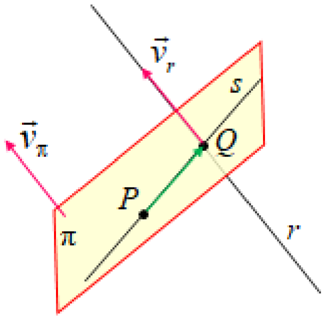
Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P = (-2,1,0)$ y corta perpendicularmente a la recta r de ecuaciones paramétricas

$$\{x = 1 - 2t,\ y = 1 + t,\ z = t\}.$$

Calcular la distancia de P al punto de corte de ambas rectas.

Solución:

La recta buscada debe estar en el plano π, perpendicular a *r* por *P*. Vendrá definida por *P* y por el punto de corte de π con *r*, *Q*.



El vector característico de π viene dado por $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (-2, 1, 1)$,

pues: $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow$ su ecuación será: $\pi \equiv -2x + y + z + d = 0$.

Como debe contener a $P = (-2, 1, 0) \to 4 + 1 + d = 0 \Rightarrow d = -5$.
Por tanto,

$$\pi \equiv -2x + y + z - 5 = 0$$

El punto de corte de π con r se obtiene sustituyendo las ecuaciones de *r* en π:

$$\pi \equiv -2(1-2t) + 1 + t + t - 5 = 0 \Rightarrow 6t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Luego, $Q = (-1, 2, 1)$.

El vector de dirección de la recta *s*, $\overrightarrow{PQ} = (-1, 2, 1) - (-2, 1, 0) = (1, 1, 1)$.

Las ecuaciones paramétricas de *s* son: $s \equiv \begin{cases} x = -2 + h \\ y = 1 + h \\ z = h \end{cases}$.

La distancia de *P* al punto de corte de ambas rectas es:

$$d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

42. País Vasco, extraordinaria 2021

Ejercicio B2

Sean los puntos $A = (0,2,1)$, $B = (1,b,0)$, $C = (-1,0,2)$ y $D = (1,1,1)$.

a) Calcular el valor de b para que A, B, C y D estén en el mismo plano.

b) El plano que contiene a los puntos A, B, C y D es perpendicular al segmento PQ y lo divide en dos partes iguales. Si $P = (1,2,-3)$, calcular las coordenadas de Q.

Solución:

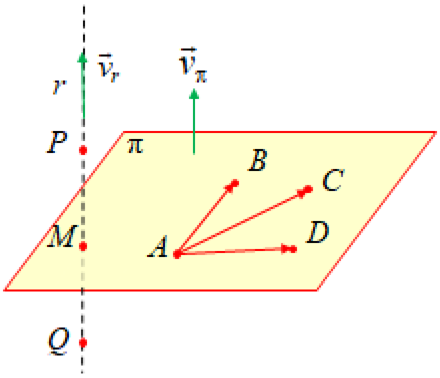
a) Los puntos A, B, C y D están en el mismo plano cuando los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente dependientes; para ello el determinante asociado debe valer 0.

$\overrightarrow{AB} = (1, b, 0) - (0, 2, 1) = (1, b - 2, -1)$;

$\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 2) - (0, 2, 1) = (-1, -2, 1)$;

$\overrightarrow{AD} = (1, 1, 1) - (0, 2, 1) = (1, -1, 0)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & b-2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1 + (b-2) - 3 = 0 \Rightarrow b = 4.$$



b) El plano que contiene a los puntos A, B, C y D viene determinado por el punto $A = (0, 2, 1)$ y por los vectores $\overrightarrow{AC} = (-1, -2, 1)$ y $\overrightarrow{AD} = (1, -1, 0)$.

Sus ecuaciones son:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = -\lambda + \mu \\ y = 2 - 2\lambda - \mu \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ y-2 & -2 & -1 \\ z-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv x + (y-2) + 3(z-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y + 3z - 5 = 0.$$

El punto $Q = (x_0, y_0, z_0)$ será el simétrico de P respecto de un plano π.

Debe cumplirse:

1) Ambos puntos, $P = (1, 2, -3)$ y Q, estarán en la recta r, perpendicular a π por P.

2) El punto M (corte de la recta y el plano), debe ser el punto medio entre P y Q.

Como $\vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (1, 1, 3)$, se deduce que $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -3 + 3\lambda \end{cases}$.

Corte de la recta r con plano π:

$(1 + \lambda) + (2 + \lambda) + 3 \cdot (-3 + 3\lambda) - 5 = 0 \Rightarrow -11 + 11\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \to M = (2, 3, 0)$.

Punto medio de P y Q:

$$\left(\frac{1+x_0}{2}, \frac{2+y_0}{2}, \frac{-3+z_0}{2}\right) \to M = (2, 3, 0) = \left(\frac{1+x_0}{2}, \frac{2+y_0}{2}, \frac{-3+z_0}{2}\right) \Rightarrow$$

$$2 = \frac{1+x_0}{2} \Rightarrow x_0 = 3;\ 3 = \frac{2+y_0}{2} \Rightarrow y_0 = 4;\ 0 = \frac{-3+z_0}{2} \Rightarrow z_0 = 3$$

Por tanto, $Q = (3, 4, 3)$.