ALGUNOS PROBLEMAS DE ANÁLISIS PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE EBAU–EvAU–PEBAU … DE 2021

Los problemas que con mayor frecuencia se plantean en este bloque de ANÁLISIS (en todos los distritos universitarios) son:
1) Funciones y derivadas: dominio; asíntotas; crecimiento y decrecimiento; … Representación gráfica.
2) Estudio de la continuidad y derivabilidad de funciones definidas a trozos.
3) Aplicaciones de los teoremas de Bolzano, valores intermedios (Lagrange), Rolle y Cauchy.
4) Uso de derivadas para hallar la tangente a una curva y el cálculo de límites (L´Hôpital).
5) Problemas de optimización: planteamiento y resolución.
6) Integración indefinida: inmediatas; por partes y descomposición en fracciones simples.
7) Integrales definidas: cálculo de áreas de regiones planas. (Representación de esas regiones).

He seleccionado los ejercicios que, aparentemente, presentaban mayor dificultad o resultaban algo novedosos.

1. Andalucía, ordinaria 2021
Ejercicio 1 (2,5 puntos)

Se sabe que la gráfica de la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+2}{x-1}$ (para $x \neq 1$) tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto (1, 1) y tiene de pendiente 2. Calcula a y b.

Solución:
La recta de pendiente 2 que pasa por el punto (1, 1) es $y-1=2(x-1) \Rightarrow y=2x-1$.

Si la recta $y=mx+n$ es asíntota oblicua de la curva $f(x)$, entonces:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\ n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right) \Rightarrow m=2 \text{ y } n=-1.$$

Por lo tanto,

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+2}{x(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+2}{x^2-x}=a \to a=2;$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+bx+2}{x-1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{bx+2x+2}{x-1}\right)=b+2 \to b+2=-1,\ b=-3.$$

2. Andalucía, ordinaria 2021
Ejercicio 4 (2,5 puntos)

Considera la función $F : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x \left(2t + \sqrt{t}\right) dt$. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:
La ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$, es

$$y - F(1) = F'(1)\left(x - 1\right).$$

Una primitiva de $\int \left(2t + \sqrt{t}\right) dt = \int \left(2t + t^{1/2}\right) dt = t^2 + \dfrac{t^{3/2}}{3/2}$.

Luego, $F(x) = \int_0^x \left(2t + \sqrt{t}\right) dt = \left(t^2 + \dfrac{t^{3/2}}{3/2}\right)\Bigg|_0^x = x^2 + \dfrac{2x^{3/2}}{3} \Rightarrow F(1) = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$

Por el teorema fundamental del cálculo integral: si $F(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$;

entonces, $F'(x) = 2x + \sqrt{x} \Rightarrow F'(1) = 2 + \sqrt{1} = 3$.

Con esto, la ecuación de la tangente pedida es:

$$y - \frac{5}{3} = 3\left(x - 1\right) \Rightarrow y = 3x - \frac{4}{3}.$$

3. Andalucía, extraordinaria 2021
EJERCICIO 1 (2,5 puntos)

Calcula a y b sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a\left(1 - \cos(x)\right) + b\sin(x) - 2\left(e^x - 1\right)}{x^2} = 7$.

Solución:
Este límite, que resulta indeterminado, se hace por L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\left(1 - \cos(x)\right) + b\sin(x) - 2\left(e^x - 1\right)}{x^2} = \frac{a\left(1-1\right) + b\cdot 0 - 2\left(1-1\right)}{0} = \left[\frac{0}{0}\right]$$ $\to$ (se aplica la regla de L´Hôpital) $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a\sin(x) + b\cos(x) - 2e^x}{2x} = \dfrac{b-2}{0}$ $\to$ como debe seguir siendo indeterminado, pues el límite vale 7, se cumple que $\dfrac{b-2}{0} \equiv \dfrac{0}{0} \Rightarrow b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2$.

Aplicando otra vez la regla:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\sin(x) + b\cos(x) - 2e^x}{2x} = \frac{b-2}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left(L'H\right) = \lim_{x\to 0} \frac{a\cos(x) - b\sin(x) - 2e^x}{2} = \frac{a-2}{2}.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a\left(1 - \cos(x)\right) + b\sin(x) - 2\left(e^x - 1\right)}{x^2} = \dfrac{a-2}{2} = 7 \Rightarrow a = 16$.

4. Aragón, ordinaria 2021

1) Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} x^3+bx+2 & x\le 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{ax} & x>0 \end{cases} \quad , \qquad a,b\in\mathbb{R},\ a,b\neq 0$$

a) (1 punto) Determine los valores de $a,b\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcule aquellos valores que además hacen que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $x=-1$, y determine el tipo de extremo que es.

Solución:

a) Por separado, para cada intervalo de definición, las funciones dadas son continuas. El único punto conflictivo es $x = 0$, en donde las funciones difieren a izquierda y derecha. La función será continua en ese punto cuando $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=2$.

El límite existe cuando existen los límites laterales y coinciden.

Por la izquierda: $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x^3+bx+2\right)=2$;

Por la derecha: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{ax}=\left[\frac{0}{0}\right]\to$ (debe resolverse por L´Hôpital) $\to$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{ax}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{a}=\frac{1}{a}.$$

Serán iguales cuando $2=\frac{1}{a}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

El valor de b puede ser cualquiera.

b) Para que la función tenga un extremo relativo en $x = -1$ es necesario que $f'(-1)=0$.

La función que está definida en ese punto es $f(x)=x^3+bx+2$.

Derivando e igualando a 0:

$$f'(x)=3x^2+b \to f'(-1)=0\Rightarrow 3+b=0\Rightarrow b=-3$$

Como la derivada segunda, $f''(x)=6x$, cumple que $f''(-1)=-6<0$, entonces, en $x = -1$ se tiene un máximo.

5. Aragón, ordinaria 2021

3) Calcule

$$\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}\,dx.$$

Solución:

Esta integral puede hacerse por descomposición en fracciones simples.

Hay que observar que $x = 1$ es una de las raíces de x^3-3x+2. Luego $x - 1$ es un factor.

Se divide $\left(x^3-3x+2\right):(x-1)$,

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \Rightarrow \left(x^3-3x+2\right)=(x-1)\left(x^2+x-2\right).$$

El segundo factor se descompone haciendo la ecuación de segundo grado asociada. Así se obtiene:

$$\left(x^3-3x+2\right)=(x-1)\left(x^2+x-2\right)=(x-1)(x-1)(x+2)$$

Con esto:

$$\frac{x^2-1}{x^3-3x+2}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)(x+2)}=\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}$$

Ahora, se escribe y resuelve la siguiente igualdad:

$$\frac{x^2-1}{x^3-3x+2}=\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2} \Rightarrow \frac{x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

Identificando los coeficientes del numerador de ambas fracciones: $\begin{cases} 1=A+B \\ 1=2A-B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2/3 \\ B=1/3 \end{cases}.$

Por tanto: $\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}=\dfrac{x+1}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{2/3}{x-1}+\dfrac{1/3}{x+2}.$

Luego;

$$\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}\,dx=\int\left(\frac{2/3}{x-1}+\frac{1/3}{x-2}\right)dx=\frac{2}{3}\ln(x-1)+\frac{1}{3}\ln(x-2)+k.$$

Nota: la integral resulta inmediata si se observa que:

$$\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{3\left(x^2-1\right)}{x^3-3x+2}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{3x^2-3}{x^3-3x+2}\,dx=\frac{1}{3}\ln\left(x^3-3x+2\right)+k.$$

6. Aragón, ordinaria 2021

4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}$$

a) (1,2 puntos) Estudie el dominio de definición y calcule las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas caso de existir.

b) (0,8 puntos) Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x=1$.

Solución

a) La función no está definida en los valores de *x* que anulan el denominador.

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{26}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}-1\\ 2\end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{2x^3-x^2}{(x+1)(x-2)}.$$

Por tanto, Dom (*f*) = **R** – {–1, 2}.

- La función no tiene asíntotas horizontales, pues $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=\pm\infty$. (Basta con observar que el numerado es un polinomio de grado 3 y el denominador de grado 2).
- Tiene dos asíntotas verticales (de ecuaciones $x=-1$ y $x=2$), pues:

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=\left[\frac{-3}{0}\right]=\pm\infty \text{ y } \lim_{x\to 2}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=\left[\frac{12}{0}\right]=\pm\infty.$$

- Tiene una asíntota oblicua. Su ecuación es la recta $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2}{x\left(x^2-x-2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2-x-2}=2.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x}{x^2-x-2}\right)=1.$$

La asíntota oblicua es la recta $y=2x+1$.

b) La ecuación de la tangente a la curva en $x=1$ es $y-f(1)=f'(1)\cdot\left(x-1\right)$.

Derivando:

$$f(x)=\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2} \Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{\left(6x^2-2x\right)\cdot\left(x^2-x-2\right)-\left(2x^3-x^2\right)\cdot\left(2x-1\right)}{\left(x^2-x-2\right)^2}=\frac{2x^4-4x^3-11x^2+4x}{\left(x^2-x-2\right)^2}$$

Como $f(1)=-\frac{1}{2}$ y $f'(1)=\frac{-9}{4}$, la tangente pedida es:

$$y+\frac{1}{2}=-\frac{9}{4}\left(x-1\right)\Rightarrow y=-\frac{9}{4}x+\frac{7}{4}.$$

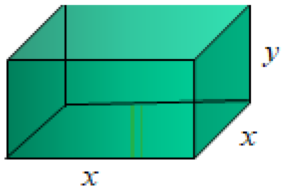
7. Aragón, extraordinaria 2021

3) Se desea construir un depósito con forma de prisma regular de base cuadrada. Además, el depósito es abierto (sin tapa superior). La capacidad total debe ser de 64 m^3. El material de construcción de los laterales tiene un precio de 70 euros por m^2, mientras que el de la base, más resistente, es de 140 euros por m^2. Halle las dimensiones del depósito para que tenga el menor coste posible.

Solución:

El volumen del prisma es:

$$V = x^2 y = 64 \Rightarrow y = \frac{64}{x^2}.$$



El área lateral, $A_L = 4xy$.

El área de la base, $A_B = x^2$.

Coste de construcción:

$$C = 70 \cdot 4xy + 140 \cdot x^2$$

Sustituyendo el valor de y en C:

$$C(x) = 280x \cdot \frac{64}{x^2} + 140x^2 = \frac{17920}{x} + 140x^2.$$

El mínimo de C se da en la solución de $C´= 0$ que haga positiva a $C´´$.

Derivando:

$$C´(x) = -\frac{17920}{x^2} + 280x \to -\frac{17920}{x^2} + 280x = 0 \Rightarrow -17920 + 280x^3 = 0 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = 4.$$

Como $C´´(x) = \frac{35840}{x^3} + 280$ es positiva para $x = 4$, se deduce que para el valor de $x = 4$ m se tiene el mínimo buscado.

El valor de $y = \frac{64}{4^2} = 4$ m.

Por tanto, el depósito es un cubo (sin tapa) de lado 4 m.

8. Asturias, ordinaria 2021

Bloque 2.A Sean las parábolas $y_1 = x^2 - 2x + 3$ e $y_2 = ax^2 + b$

a) Calcula los valores de a y b para que en el punto de abscisa $x = 2$ las dos parábolas tengan la misma recta tangente. Calcula dicha recta tangente. (1 punto)

b) Para $a = 1, b = 1$ esboza el recinto limitado por las parábolas entre el eje Y y el punto de corte entre ellas. Calcula el área del mismo. (1.5 puntos)

Solución:

a) La ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 2$ es $y - f(2) = f´(2)\cdot(x-2)$.

Para las parábolas $y_1 = x^2 - 2x + 3$ e $y_2 = ax^2 + b$ se tendrá:

$y_1(2) = 3$; $y_2(2) = 4a + b$;

Para sus derivadas:

$y´_1 = 2x - 2 \Rightarrow y´_1(2) = 2$; $y´_2 = 2ax \Rightarrow y´_2(2) = 4a$.

Como las pendientes en $x = 2$ deben ser iguales: $2 = 4a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Ecuaciones de las rectas tangentes:

- A $y_1 = x^2 - 2x + 3 \to y - 3 = 2(x-2) \Rightarrow y = 2x - 1$;
- A $y_2 = ax^2 + b \to y - \left(4\cdot\frac{1}{2} + b\right) = 2(x-2) \Rightarrow y = 2x - 2 + b$.

Como las ordenadas en el origen deben ser iguales: $-1 = -2 + b \Rightarrow b = 1$.

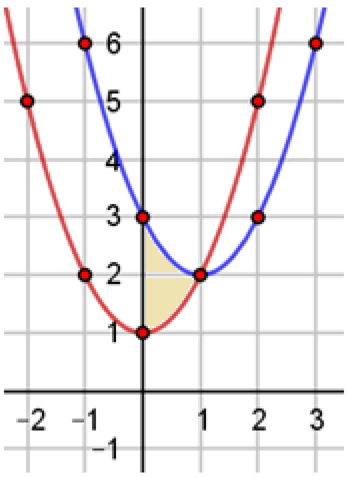
Por tanto, la segunda parábola debe ser $y_2 = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

La ecuación de la recta tangente es $y = 2x - 1$.

b) Para $a = 1$ y $b = 1$, las parábolas son: $y_1 = x^2 - 2x + 3$ e $y_2 = x^2 + 1$.

Ambas curvas pueden representarse dando algunos de sus puntos.

- Para $y_1 = x^2 - 2x + 3 \to$ (−1, 6); (0, 3); (1, 2); (2, 3); (3, 6).
- Para $y_2 = x^2 + 1 \to$ (−2, 6); (−1, 2); (0, 1); (1, 2); (2, 5).
- Se cortan en las soluciones de $x^2 - 2x + 3 = x^2 + 1 \Rightarrow x = 1 \to$ punto (1, 2).



El recinto limitado por las parábolas entre el eje OY y el punto de corte es en sombreado en la figura adjunta.

Su área viene determinada por la integral definida,

$$\int_0^1 \left(\left(x^2 - 2x + 3\right) - \left(x^2 + 1\right)\right) dx =$$

$$= \int_0^1 (-2x + 2)\, dx = \left[-x^2 + 2x\right]_0^1 = 1 \text{ u}^2.$$

9. Asturias, ordinaria 2021

Bloque 2.B Sean tres números reales positivos cuya suma es 90 y uno de ellos es la media de los otros dos. Determina los números de forma que el producto entre ellos sea máximo. (2.5 puntos)

Solución:
Sean x, y, z los números reales buscados.
Cumplen:

$$x+y+z=90;\ x=\frac{y+z}{2} \to 2x=y+z.$$

Sustituyendo la tercera igualdad en la primera: $3x=90 \Rightarrow x=30$.
Por tanto, $30+y+z=90 \Rightarrow z=60-y$

Se desea que el producto $P=x \cdot y \cdot z$ sea máximo.

$$P=x \cdot y \cdot z \Leftrightarrow P=30 \cdot y \cdot (60-y) \Leftrightarrow P=1800y-30y^2.$$

El máximo de P se da en la solución de $P'=0$ que haga positiva a P''.
Derivando:

$P'=1800-60y$, que se anula cuando $y = 30$.

Como $P''=-60$, para la solución hallada se obtiene el producto máximo.

Los números son $x=y=z=30$.

10. Asturias, extraordinaria 2021

Bloque 2.A Sea la función $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

a) Haz un esbozo de su gráfica determinando: dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y regiones de convexidad y concavidad. (1.5 puntos)

b) Calcula el área de la región limitada por la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$, la recta $y = 1$ y el eje de ordenadas. (1 punto)

Solución:

a) La función no está definida en $x = 0$, punto donde se anula el denominador.

Dom (f) = **R** – {0}.

En $x = 0$ tiene una asíntota vertical, pues $\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=\left(1-\frac{1}{0}\right)=-\infty$.

Tanto a la izquierda como a la derecha de 0 la función tiende hacia –∞; luego la curva se pega, por ambos lados, al semieje negativo OY.

También tiene una asíntota horizontal, pues $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1$.

La asíntota es la recta $y = 1$.

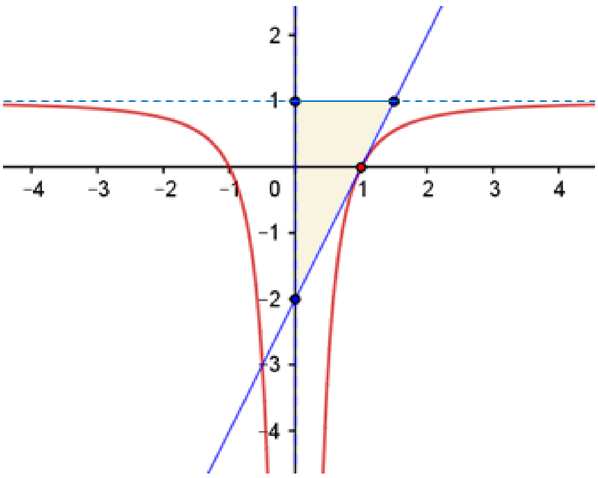
Tanto hacia –∞ como hacia +∞ la curva va por debajo de la recta $y = 1$.

Derivando:

$f'(x)=\frac{2}{x^3}$ → no se anula en ningún punto de su dominio ⇒ no tiene extremos.

- Si $x < 0$, como $f'(x)<0$ ⇒ la función es decreciente.
- Si $x > 0$, $f'(x)>0$ ⇒ la función es creciente.

La derivada segunda, $f''(x)=\frac{-6}{x^4}$ siempre toma valores negativos, lo que significa que es cóncava (∩). No tiene puntos de inflexión.



b) La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 1$ es

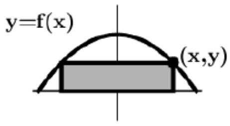
$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \to y-0=2(x-1) \Rightarrow y=2x-2.$$

La región de la que se pide el área es el triángulo de vértices (0, –2), (0, 1) y (3/2, 1). Su área es

$$S=\frac{3\cdot\frac{3}{2}}{2}=\frac{9}{4}.$$

11. Asturias, extraordinaria 2021

Bloque 2.B En una nave industrial se quiere instalar una pantalla de cine (ver figura). La forma de la nave es la descrita por la gráfica de la función $f(x) = 12 - \frac{x^2}{3} \geq 0$. Calcula los valores positivos (x, y) que hacen máxima el área de la pantalla. (2.5 puntos)



Solución:

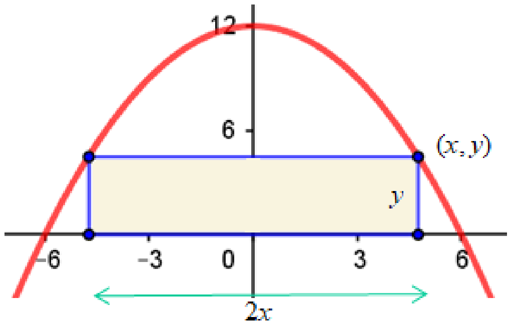
El área de la pantalla viene dada por

$S = 2xy$.

Como (x, y) cumple la relación funcional

$y = 12 - \frac{x^2}{3} \Rightarrow$

$S = 2x\left(12 - \frac{x^2}{3}\right) \Rightarrow S = 24x - \frac{2}{3}x^3$.



El máximo de S se da en la solución de $S´ = 0$ que hace negativa a $S´´$.

Derivando:

$S´ = 24 - 2x^2 \Rightarrow S´´ = -4x$.

$S´ = 24 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; para ese valor $S´´ < 0$.

Sustituyendo en $f(x) = 12 - \frac{x^2}{3} \Rightarrow f\left(2\sqrt{3}\right) = 12 - \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{3} = 8$.

Por tanto, $(x, y) = \left(2\sqrt{3}, 8\right)$.

12. Baleares, ordinaria 2021

3. Considera la funció
$$f(x) = \frac{1}{x^4}.$$

(a) Representa-la gràficament. (7 punts)
(b) Comprova que $f(2) = f(-2)$. (1 punt)
(c) Comprova que no existeix $c \in [-2, 2]$ tal que $f'(c) = 0$. (1 punt)
(d) Hi ha una contradicció amb la conclusió del teorema de Rolle? (1 punt)

Solución:

(a) La función $f(x) = \frac{1}{x^4}$ no está definida en $x = 0$, punto donde se anula el denominador.

Dom (f) = **R** – {0}.

En $x = 0$ tiene una asíntota vertical, pues $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}\right) = \left(\frac{1}{0}\right) = +\infty$.

Tanto a la izquierda como a la derecha de 0 la función tiende hacia $+\infty$; luego, la curva se pega, por ambos lados, al semieje positivo OY.

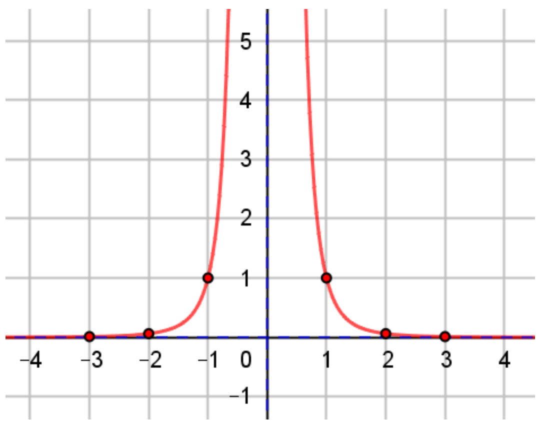
También tiene una asíntota horizontal, pues $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x^4}\right) = 0$.

La asíntota es la recta $y = 0$ (eje OX). Tanto hacia $-\infty$ como hacia $+\infty$ la curva va por encima de la asíntota, pues $f(x) = \frac{1}{x^4} > 0$ para todo x de su dominio.

Derivando:

$f'(x) = -\frac{4}{x^5}$ $\to$ no se anula en ningún punto de su dominio $\Rightarrow$ no tiene extremos.

- Si $x < 0$, como $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.
- Si $x > 0$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente.



La derivada segunda, $f''(x) = \frac{20}{x^6}$ siempre toma valores positivos, lo que significa que es convexa (∪) en todo su dominio. No tiene puntos de inflexión.

Teniendo en cuenta lo dicho y calculando alguno de sus puntos:
(–1, 1); (–2, 1/16); (–3, 1/81);
(1, 1); (2, 1/16); (3, 1/81).
Su gráfica es la adjunta.

(b) Efectivamente: $f(-2) = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$ y $f(2) = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$.

La función es par.

(c) Se ha visto que $f'(x) = -\frac{4}{x^5} \neq 0$ en todo su dominio. En particular para cualquier punto c del intervalo [–2, 2].

(d) Lo anterior no entra en contradicción con el teorema de Rolle, pues dicho teorema exige que la función sea continua en el intervalo considerado, no solo que tome el mismo valor en sus extremos. La función no es continua en $x = 0$.

13. Islas Canarias, ordinaria 2021

1A. Dada la función $f(x) = \frac{ax^2-2}{b-x}$, donde a y b son dos parámetros con valores reales.

a) Calcular el valor de los parámetros a y b que verifican que $f(-2) = 2$ y que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R} - \{5\}$. 1.25 ptos
Escribir la función resultante $f(x)$ y calcular su derivada $f'(x)$.

b) Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x)$ si los parámetros toman los valores $a = -1$ y $b = -3$ 1.25 ptos

Solución:

a) Si la función $f(x) = \frac{ax^2-2}{b-x}$ no está definida en $x = 5$, $b - x = 0$ cuando $x = 5 \Rightarrow b = 5$.

Luego, $f(x) = \frac{ax^2-2}{5-x}$.

Como $f(-2) = 2 \to f(-2) = \frac{a(-2)^2-2}{5-(-2)} = 2 \Rightarrow 4a - 2 = 14 \Rightarrow a = 4$.

Por lo tanto, $f(x) = \frac{4x^2-2}{5-x}$.

Su derivada es:

$$f'(x) = \frac{8x\cdot(5-x)-\left(4x^2-2\right)\cdot(-1)}{(5-x)^2} = \frac{-4x^2+40x-2}{(5-x)^2}.$$

b) Para $a = -1$ y $b = -3$, $f(x) = \frac{x^2-2}{-3-x}$.

- Esta función tiene una asíntota vertical en $x = -3$, punto donde se anula el denominador.

En efecto, $\lim_{x\to-3} \frac{-x^2-2}{-3-x} = \frac{-11}{0} = \pm\infty \Rightarrow$ la recta $x = -3$ es asíntota vertical.

- También tiene una asíntota oblicua, pues el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador.

La asíntota es recta $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2-2}{x(-3-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2-2}{-3x-x^2} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-x^2-2}{-3-x} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-x^2-2+3x+x^2}{-3-x} \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-2+3x}{-3-x} \right) = -3.$$

La asíntota oblicua es la recta $y = x - 3$.

14. Islas Canarias, ordinaria 2021

1B. Se desea construir una caja sin tapa superior (ver Figura 1). Para ello, se usa una lámina de cartón de 15 cm de ancho por 24 cm de largo, doblándola convenientemente después de recortar un cuadrado de iguales dimensiones en cada una de sus esquinas (ver Figura 2). Se determina como requisito que la caja a construir contenga el mayor volumen posible. Indicar cuáles son las dimensiones de la caja y su volumen máximo. 2.5 ptos

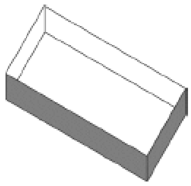


Figura 1

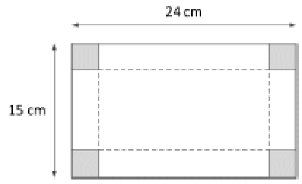
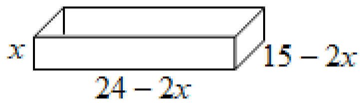


Figura 2

Solución:
Si se corta un cuadrado de lado x, el volumen de la caja obtenida será:

$$V(x) = (24-2x)(15-2x)x \Rightarrow V(x) = 4x^3 - 78x^2 + 360x .$$



El volumen máximo se encuentra, si existe, en la solución de $V' = 0$ que hace $V'' < 0$.

$$V'(x) = 12x^2 - 156x + 360 = 0 \Rightarrow x^2 - 13x + 30 = 0 \quad x = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4\cdot 30}}{2} = \frac{13 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ 10 \end{cases}.$$

Como $V''(x) = 24x - 156$ y $V''(3) = 72 - 156 < 0$, para $x = 3$ se obtiene el máximo buscado.
(La solución $x = 10$ es imposible en este caso, pues $V(10) < 0$; además se corresponde con el mínimo de la función $f(x) = 4x^3 - 78x^2 + 360x$.

Las dimensiones de la caja serían 18 × 9 × 3 cm; siendo su volumen 486 cm^3.

15. Cantabria, ordinaria 2021

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]
Considera la función $f(x) = x^2$.

1) [0.5 PUNTOS] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$. Llamaremos a dicha recta $g(x)$.

2) [0.5 PUNTOS] Calcula el área de la región limitada por las rectas $g(x)$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$, y el eje OX de abscisas.

3) [0.5 PUNTOS] Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$.

4) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)$, y las rectas $g(x)$, $x = \frac{1}{2}$.

Solución:

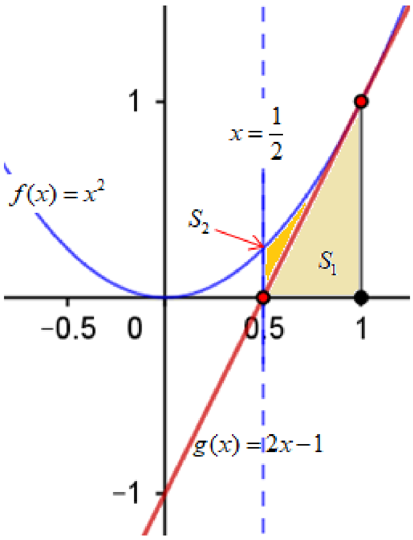
1) La ecuación de la recta pedida es:

$$g(x) \equiv y - f(1) = f'(1)(x-1)$$

Derivando:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \to f(1) = 1;\ f'(1) = 2.$$

Luego, $g(x) \equiv y - 1 = 2(x-1) \Rightarrow g(x) \equiv y = 2x - 1$.



2) El área pedida viene dada por

$$S_1 = \int_{1/2}^{1} (2x-1)\,dx = \left(x^2 - x\right)\Big|_{1/2}^{1} = 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\ \text{u}^2.$$

(Observa que es un triángulo de base 0,5 y altura 1).

3) $F(x) = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + k$.

4) En este caso, el área es

$$S_2 = \int_{1/2}^{1} \left(x^2 - (2x-1)\right) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right)\Big|_{1/2}^{1} =$$

$$= \frac{1}{3} - 1 + 1 - \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{7}{24} = \frac{1}{24}\ \text{u}^2.$$

16. Cantabria, ordinaria 2021

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS] En una población, la proporción de personas infectadas por una determinada enfermedad en función del tiempo, $I(t)$, viene dada por la función $I(t) = \begin{cases} ke^{2t} & \text{si } t < 1 \\ \frac{t^2}{3t^2+1} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$, siendo k una constante real, t el tiempo en años desde el inicio de la epidemia y $t = 1$ el inicio de la vacunación.

1) [0.75 PUNTOS] Calcula el valor de k para que $I(t)$ sea continua.

2) [0.75 PUNTOS] Calcula la proporción de personas infectadas cuando $t \to \infty$.

3) [0.5 PUNTOS] Calcula la velocidad de crecimiento de $I(t)$ para el instante $t = \frac{1}{2}$.

4) [0.5 PUNTOS] Calcula la velocidad de crecimiento de $I(t)$ para el instante $t = 2$.

Solución:

1) Una función, $f(x)$, es continua en $x = a$ cuando $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

En este caso, el único punto que presenta duda es $t = 1$, cuando las funciones se unen, o no. (Las funciones que intervienen están definidas siempre, en todo **R**; por tanto, son continuas)

Será continua si coinciden los límites laterales cuando $t \to 1$, con $I(1) = \frac{1}{4}$.

Por la izquierda, $\lim_{x \to 1^-} I(t) = \lim_{x \to 1^-} ke^{2t} = ke^2$.

Por la derecha, $\lim_{x \to 1^+} I(t) = \lim_{x \to 1^-} \frac{t^2}{3t^2+1} = \frac{1}{4}$.

Por tanto:

$$ke^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{4e^2}.$$

2) La proporción será: $\lim_{x \to +\infty} I(t) = \lim_{x \to +\infty} \frac{t^2}{3t^2+1} = \frac{1}{3}$.

Este límite puede hacerse directamente, o aplicando L´Hôpital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{t^2}{3t^2+1} = (L´H) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2t}{6t} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

3) La velocidad de crecimiento en el instante $t = \frac{1}{2}$ viene dada por $I´\left(\frac{1}{2}\right)$.

Derivando $I(t) = \frac{1}{4e^2} e^{2t} \Rightarrow I´(t) = \frac{2}{4e^2} e^{2t} = \frac{1}{2e^2} e^{2t} \to I´\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e}$.

4) La velocidad de crecimiento en el instante $t = 2$ viene dada por $I´(2)$.

Derivando $I(t) = \frac{t^2}{3t^2+1} \Rightarrow I´(t) = \frac{2t(3t^2+1) - t^2 \cdot 6t}{(3t^2+1)^2} = \frac{2t}{(3t^2+1)^2} \to I´(2) = \frac{4}{169}$.

17. Castilla y León, ordinaria 2021

E6.- (Análisis)

Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos(3x)}{sen^2(x)}$. **(2 puntos)**

Solución:

Debe hacerse aplicando la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - \cos(3x)}{\sin^2(x)} = \left[\frac{1-0-1}{0} = \frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + 3\cdot\sin(3x)}{2\sin(x)\cos(x)} = \left[\frac{1-1+0}{0} = \frac{0}{0}\right] =$$

$$= (L´H) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + 9\cdot\cos(3x)}{2\cos(x)\cos(x) - 2\sin(x)\sin(x)} = \frac{1+9}{2} = 5.$$

18. Castilla y León, ordinaria 2021

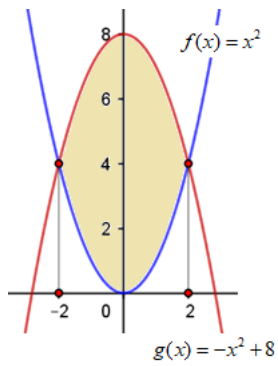
E7.- (Análisis)

a) Dadas las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 8$, hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que $g(x) \geq f(x)$. **(0,5 puntos)**

b) Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1,5 puntos)**

Solución:

a) $g(x) \geq f(x) \Rightarrow -x^2 + 8 \geq x^2 \Rightarrow 8 \geq 2x^2 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$.



b) El área pedida viene dada por

$$S = \int_{-2}^{2} \left(-x^2 + 8 - \left(x^2\right)\right) dx = \int_{-2}^{2} \left(-2x^2 + 8\right) dx = 2\int_{0}^{2} \left(-2x^2 + 8\right) dx =$$

$$= 2\left(-\frac{2}{3}x^3 + 8x\right)\Big|_0^2 = 2\left(-\frac{16}{3} + 16\right) = \frac{64}{3} \text{ u}^2.$$

19. Castilla y León, extraordinaria 2021

E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = x^5 - 5x - 1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión. **(2 puntos)**

Solución:

Derivando dos veces:

$$f(x) = x^5 - 5x - 1 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 5 \Rightarrow f''(x) = 20x^3$$

Crecimiento $\left(f'(x) > 0\right)$ y decrecimiento $\left(f'(x) < 0\right)$:

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Por tanto:

- Si $x < -1$, como $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.
- Si $-1 < x < 1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente.

Luego, en $x = -1$ hay un máximo relativo.

- Si $x > 1$, como $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.

Luego, en $x = 1$ hay un mínimo relativo.

Concavidad ($\cap$) $\left(f''(x) < 0\right)$ y convexidad ($\cup$) $\left(f''(x) > 0\right)$:

$$f''(x) = 20x^3 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Por tanto:

- Si $x < 0$, como $f''(x) < 0 \Rightarrow$ la función es cóncava.
- Si $x > 0$, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ la función es convexa.

Luego, en $x = 0$ hay un punto de inflexión.

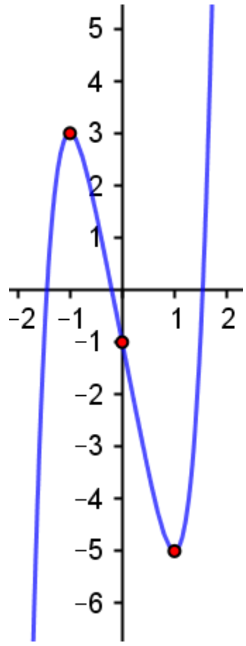
Los máximos, mínimos y puntos de inflexión también podrían caracterizarse por derivadas.

Máximo: $f'(-1) = 0$ y $f''(-1) < 0$.

Mínimo: $f'(1) = 0$ y $f''(1) > 0$.

Punto de inflexión: $f''(0) = 0$ y $f^{(5}(-1) = 120 \neq 0$.

Aunque no se pide, su gráfica es la adjunta.



20. Castilla y León, extraordinaria 2021

E7.- (Análisis)

a) Estudiar la continuidad de la función definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{si } x = 0 \end{cases}$. **(1 punto)**

b) Calcular $\int x \ln(x^2)\, dx$. **(1 punto)**

Solución:

a) Una función, $f(x)$, es continua en $x = a$ cuando $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

En este caso, el único punto que presenta duda es $x = 0$; para cualquier otro valor de x la función está definida.

Como

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \left[\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1} = \frac{0}{1} = 0 = f(0).$$

Por tanto, la función es continua también en $x = 0$; luego es continua en todo **R**.

b) La integral pedida, $\int x \ln\left(x^2\right) dx$, debe hacerse por el "método de partes".

Tomando,

$$u = \ln\left(x^2\right) \Rightarrow du = \frac{2x}{x^2}dx \to du = \frac{2}{x}dx; \qquad xdx = dv \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

Luego,

$$\int x \ln\left(x^2\right) dx = \frac{x^2}{2}\ln\left(x^2\right) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2}{x} dx = \frac{x^2}{2}\ln\left(x^2\right) - \int xdx = \frac{x^2}{2}\ln\left(x^2\right) - \frac{x^2}{2} + k.$$

21. Castilla y León, extraordinaria 2021

E8.- (Análisis)

Se considera la función $f(x) = x - \cos(x)$

a) Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $[0,\pi/2]$. **(1 punto)**

b) Probar que la ecuación $f(x) = 0$ solo puede tener una solución en el intervalo $[0,\pi/2]$, de modo que la solución del apartado anterior es la única. **(1 punto)**

Solución:

a) La función $f(x) = x - \cos(x)$ es continua en el intervalo $[0, \pi/2]$ (y en todo **R**) y toma valores de distinto signo en sus extremos:

$$f(0) = 0 - \cos(0) = -1 \text{ y } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0.$$

Por tanto, por el teorema de Bolzano, la función toma el valor 0 en algún punto $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) La función $f(x) = x - \cos(x)$ también es derivable en todo **R**. Su derivada

$f'(x) = 1 + \sin(x) > 0$, para todo $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; lo que significa que la función es creciente en todo el intervalo. Luego, solo puede cortar una vez al eje OX: la ecuación $f(x) = x - \cos(x) = 0$ solo tiene una solución.

22. Castilla–La Mancha, ordinaria 2021

3. *a*) **[1,25 punto]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{2}{3+e^x}dx$.

(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$.)

b) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-x+1}{x^2+3}dx$.

Solución:

a) Si se hace el cambio de variable $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{e^x}dt = \frac{1}{t}dt$.

Luego:

$$\int \frac{2}{3+e^x}dx = \int \frac{2}{3+t}dx = \int \frac{2}{3+t}\cdot\frac{1}{t}dt = \int \frac{2}{(3+t)t}dt.$$

Esta última integral puede hacerse por descomposición en fracciones simples.

$$\frac{2}{(3+t)t} = \frac{A}{(3+t)} + \frac{B}{t} = \frac{At+B(3+t)}{(3+t)t} = \frac{(A+B)t+3B}{(3+t)t} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 3B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2/3 \\ B=2/3 \end{cases}.$$

Por tanto,

$$\int \frac{2}{(3+t)t}dt = \int\left(\frac{-2/3}{(3+t)} + \frac{2/3}{t}\right)dt = \frac{-2}{3}\ln(3+t) + \frac{2}{3}\ln t + k = \frac{2}{3}\ln\frac{t}{3+t} + k.$$

Deshaciendo el cambio, queda:

$$\int \frac{2}{3+e^x}dx = \frac{2}{3}\ln\frac{e^x}{3+e^x} + k.$$

b) $\int \frac{-x+1}{x^2+3}dx = \int \frac{-x}{x^2+3}dx + \int \frac{1}{x^2+3}dx$.

La primera integral es inmediata ajustando constantes:

$$\int \frac{-x}{x^2+3}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}dx = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right) + k_1.$$

La segunda integral es también inmediata, aunque el ajuste de constantes es algo más costoso.

$$\int \frac{1}{x^2+3}dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{\frac{x^2+3}{3}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{3}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + k_2.$$

Por tanto:

$$\int \frac{-x+1}{x^2+3}dx = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + k.$$

23. Castilla–La Mancha, ordinaria 2021

6. a) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1, 2)$ y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1.

   b) **[1,5 puntos]** Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x < 0 \\ be^x & x \geq 0 \end{cases}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.

Solución:

a) $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$.

Por pasar por el punto (1, 2): $f(1) = a - 2 - 1 + b = 2 \Rightarrow a + b = 5$.

La pendiente de la gráfica de la función en ese punto es $f'(1)$; nos dicen que $f'(1) = 1$.

Derivando,

$$f'(x) = 3ax^2 - 4x - 1 \Rightarrow f'(1) = 3a - 4 - 1 = 1 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2.$$

Sustituyendo en $a + b = 5 \Rightarrow 2 + b = 5 \Rightarrow b = 3$.

La función será:

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - x + 3.$$

b) Una función, $f(x)$, es continua en $x = a$ cuando $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Una función definida a trozos será continua cuando la función que interviene en cada intervalo lo sea y, además, los límites laterales en los puntos de unión sean iguales.
Las funciones consideradas en este caso son continuas en todo su dominio; también son derivables.
Para la continuidad hay que exigir que sus límites laterales sean iguales en el punto de unión, en $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^-} \left(x^2 - ax + 1\right) = 1; \ \lim_{x \to 0^+} \left(be^x\right) = b.$$

Será continua si $b = 1$.

Para la derivabilidad hay que exigir que sus derivadas coincidan en $x = 0$.
Como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x < 0 \\ e^x & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x - a & x < 0 \\ e^x & x > 0 \end{cases}.$$

Será derivable en $x = 0$ cuando:

$$\lim_{x \to 0^-} \left(2x - a\right) = -a \text{ sea igual a } \lim_{x \to 0^+} \left(e^x\right) = 1 \Rightarrow a = -1.$$

24. Castilla–La Mancha, extraordinaria 2021

5. a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{e^{x-1}-1}$.

b) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad 0 \le x \le 2 \\ x & \text{si} \quad x>2 \end{cases},$$

estudia su continuidad en $x=0$ y en $x=2$ e indica el tipo de discontinuidad, si la hubiera.

Solución:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} = \left[\frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}\right]$ → Esta indeterminación puede resolverse aplicando L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{e^{x-1}} = \frac{1}{1} = 1.$$

b) Una función, $f(x)$, es continua en $x = a$ cuando $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Una función definida a trozos será continua cuando la función que interviene en cada intervalo lo sea y, además, los límites laterales en los puntos de unión sean iguales.

La función $f_1(x) = e^x$ es continua siempre.

La función $f_2(x) = \frac{1}{x-1}$ no es continua en $x = 1$, pues no está definida. Se trata de una discontinuidad de salto infinito: $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$.

La función $f_3(x) = x$ es continua siempre.

Falta por ver la continuidad en $x = 0$ y en $x = 2$.

En $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} e^x = e^{0^-} = 1; \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Como no coinciden los límites, la función no es continua en $x = 0$. Presenta un salto finito.

En $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2-1} = 1; \quad \lim_{x\to 2^+} x = 2$$

tampoco coinciden los límites, la función no es continua en $x = 2$. Presenta un salto finito.

25. Cataluña, ordinaria 2021

1. Considere la parábola $y = 4 - x^2$ y un valor $a > 0$.

a) Compruebe que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa $x = a$ es $y = -2ax + a^2 + 4$ y calcule los puntos de corte de esta recta tangente con los ejes de coordenadas.
[1,25 puntos]

b) Calcule el valor de $a > 0$ para que el área del triángulo determinado por esta recta tangente y los ejes de coordenadas sea mínima.
[1,25 puntos]

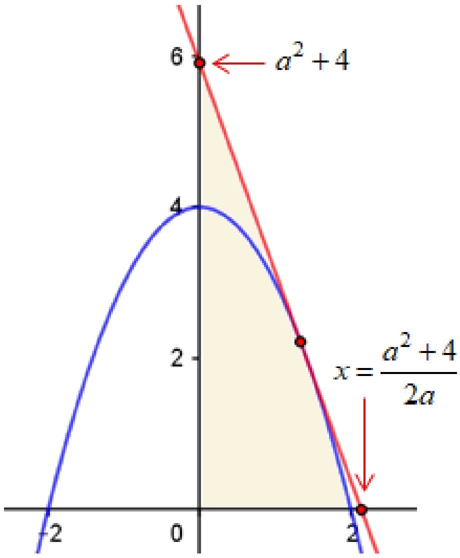
Solución:

a) La ecuación de la recta tangente a una curva, $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ es $y - f(a) = f'(a)(x-a)$.

En este caso, $y = f(x) = 4 - x^2 \to f'(x) = -2x$; luego: $f(a) = 4 - a^2$ y $f'(a) = -2a$.

Por tanto, la tangente pedida es:

$$y - \left(4 - a^2\right) = -2a\cdot(x-a) \Leftrightarrow$$
$$y = -2ax + 2a^2 + 4 - a^2 \Rightarrow y = -2ax + a^2 + 4.$$



b) Para $a > 0$, la tangente corta al eje OY en la ordenada $a^2 + 4$, y al eje OX en la abscisa solución de

$$0 = -2ax + a^2 + 4 \Rightarrow x = \frac{a^2+4}{2a}.$$

El área del triángulo que determinan es

$$S = \frac{\dfrac{a^2+4}{2a}\cdot\left(a^2+4\right)}{2} = \frac{\left(a^2+4\right)^2}{4a}.$$

El mínimo de S se da en la solución $S' = 0$ que hace positiva a S''.

Derivando con respecto a a,

$$S' = \frac{2\left(a^2+4\right)\cdot 2a\cdot 4a - 4\left(a^2+4\right)^2}{16a^2} = \frac{3a^4 + 8a^2 - 16}{4a^2}.$$

$$S' = 0 \Rightarrow 3a^4 + 8a^2 - 16 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{-8 \pm \sqrt{64+192}}{6} = \frac{-8 \pm 16}{6} = \begin{cases} -4 \\ 4/3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$3a^4 + 8a^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 3\left(a^2+4\right)\left(a^2 - \frac{4}{3}\right) = 0 \to \text{siendo } a = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ la única solución válida.}$$

Se hace la derivada segunda:

$$S' = \frac{3a^2}{4} + 2 - \frac{4}{a^2} \Rightarrow S'' = \frac{6a}{4} + \frac{8}{a^3}.$$ Como $S''\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) > 0$, para ese valor se tiene el mínimo buscado.

26. Cataluña, ordinaria 2021

4. Sea la función $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ definida en el dominio $x>0$, donde ln es el logaritmo neperiano.

a) Encuentre las coordenadas de un punto de la curva $y=f(x)$ en el que la recta tangente a la curva sea horizontal y analice si la función tiene un extremo relativo en este punto.
[1 punto]

b) Determine si la función $f(x)$ tiene alguna asíntota horizontal.
[0,5 puntos]

c) Calcule el área de la región delimitada por la curva $y=f(x)$ y las rectas $x=1$ y $x=e$. Haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función en el dominio $0<x<5$, donde quede representada el área que ha calculado.
[1 punto]

Solución:
a) La tangente es horizontal a la curva en los puntos con derivada 0.

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln(x)\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2} \to f'(x)=0 \text{ si } \ln(x)=1 \Rightarrow x=e.$$

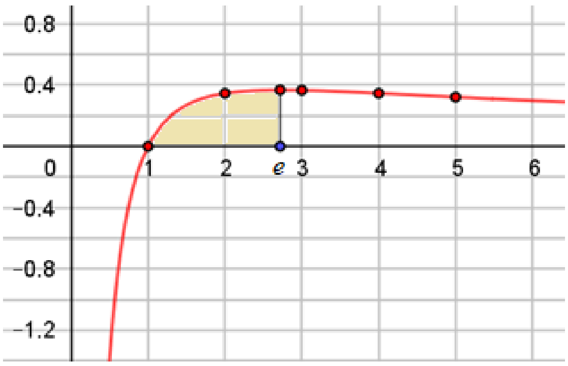
La derivada segunda:

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln(x))\cdot 2x}{x^4}=\frac{-3+2\ln(x)}{x^3}.$$

Al ser $f''(e)=\dfrac{-3+2\ln(e)}{e^3}=\dfrac{-1}{e^3}<0 \Rightarrow$ en $x = e$ se tiene un máximo.

b) Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=(L'H)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\dfrac{0}{1}=0$, se deduce que la recta $y = 0$ s asíntota horizontal de la curva.
(También tiene una asíntota vertical en $x = 0$).

c) La gráfica de $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ es la adjunta.



Algunos de sus puntos son:
(1, 0); (2, 0,466); (e, 3679), máximo;
(3, 0,3662); (4, 0,3466)…

El área pedida es la coloreada en la figura. Su valor viene dado por $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx$.

Una primitiva se obtiene integrando por partes.
Tomando:

$$u=\ln x \text{ y } dv=\frac{1}{x}dx \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \text{ y } v=\int\frac{1}{x}dx=\ln(x).$$

Por tanto:

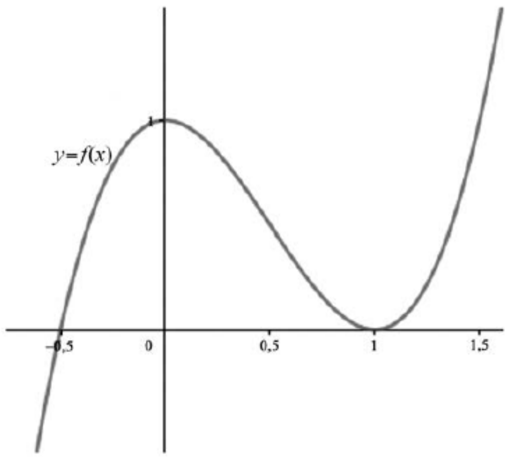
$$\int\frac{\ln x}{x}dx=\ln x\cdot\ln x-\int\frac{\ln x}{x}dx \Rightarrow \int\frac{\ln x}{x}dx+\int\frac{\ln x}{x}dx=\ln x\cdot\ln x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 .$$

Con esto, $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e = \frac{1}{2}$ u^2.

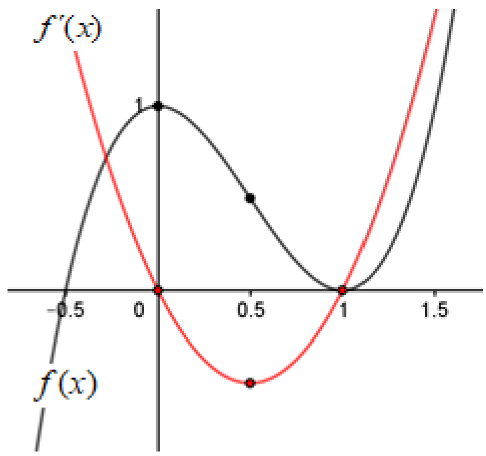
<u>**27**. Cataluña, extraordinaria 2021</u>

4. ***a*)** En la figura es mostra la gràfica de la funció $f(x)$. Representeu de manera esquemàtica la gràfica de la funció derivada de $f(x)$. Expliqueu el raonament que heu seguit.
[1,25 punts]



***b*)** Calculeu els valors de a i b perquè la funció $g(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ tingui un punt d'inflexió en $x = \frac{1}{2}$ i la seva derivada en aquest punt sigui $\frac{-3}{2}$.
[1,25 punts]

<u>Solución</u>:
a) Para representar gráficamente $f´(x)$ hay que observar:
1) La función dada $f(x)$ es creciente en el intervalo (–∞, –0,5), por tanto, ese intervalo la función derivada es positiva: $f´(x) > 0$.
Es decreciente en el intervalo (0, 1), luego en ese intervalo su derivada $f´(x) < 0$.
Vuelve a crecer si x > 1, luego $f´(x) > 0$ a partir de x = 1.
La derivada se anula en los puntos x = 0 y x = 1. Por tanto, dos de los puntos de la gráfica de $f´(x)$ son (0, 0) y (1, 0).
2) En x = 0,5 (aproximadamente) la función $f(x)$ tiene un punto de inflexión. Por tanto, en ese punto la derivada segunda vale 0: $\left(f´(x)\right)' = f´´(x) = 0$; esto significa que $f´(x)$ tiene un extremo relativo en x = 0,5. Ese extremo es un mínimo de $f´(x)$, pues $f´(x)$ solo es negativa entre 0 y 1, y $f(x)$ no presenta más puntos de inflexión.
En consecuencia, un esquema de $f´(x)$ puede ser el que se adjunta.



b) Si $g(x)=ax^3+bx^2+1$ tiene un punto de inflexión en $x=\frac{1}{2} \Rightarrow g''\left(\frac{1}{2}\right)=0$ Y si, además, en ese punto $g'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$, entonces, derivando dos veces:

$$g'(x)=3ax^2+2bx;\; g''(x)=6ax+2b.$$

Por $g''\left(\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow 3a+2b=0$.

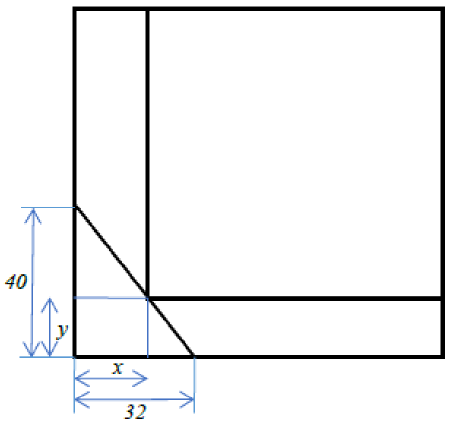
Por $g'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{4}a+b=-\frac{3}{2} \Rightarrow 3a+4b=-6$.

Resolviendo $\begin{cases}3a+2b=0\\3a+4b=-6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}$.

28. Comunidad Valenciana, ordinaria 2021

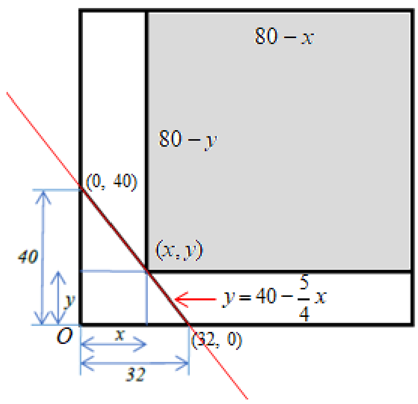
Problema 6. Un espejo plano, cuadrado, de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 40 cm respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectangular R, uno de cuyos vértices es el punto (x, y) (véase la figura).

a) Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x, cuando $0 \le x \le 32$. (4 puntos)
b) Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima. (4 puntos)
c) Calculad el valor de dicha área máxima. (2 puntos)



Solución:

a) Si se sitúa el origen de coordenadas, O, en el extremo inferior izquierdo del espejo, la ecuación de la recta que se apoya en la hipotenusa del triángulo es $y=40-\frac{5}{4}x$.



→ Pasa por los puntos (32, 0) y (0, 40):

$$\frac{x-32}{0-32}=\frac{y-0}{40-0} \Rightarrow y=\frac{40(x-32)}{-32} \Rightarrow y=40-\frac{5}{4}x.$$

El área de la pieza rectangular será:

$$R=(80-x)(80-y) \Rightarrow$$

$$R=(80-x)\left(80-\left(40-\frac{5}{4}x\right)\right) \Rightarrow R(x)=-\frac{5}{4}x^2+60x+3200.$$

b) El máximo de R se da en la solución de $R'=0$ que hace negativa a R''.

Derivando e igualando a 0:

$$R'(x) = -\frac{10}{4}x + 60 = 0 \Rightarrow x = 24.$$

Como $R''(x) = -\frac{10}{4} < 0$, para x = 24 se da el máximo buscado.

Las dimensiones de R serán: ancho, 80 – 24 = 56 cm; alto: 80 – 10 = 70 cm.

c) El valor de su área es R = 56 · 70 = 3920 cm^2.

29. Comunidad Valenciana, ordinaria 2021

Problema 3. Dada la función $f(x) = xe^{1-x^2}$, calculad:

a) El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos. (4 puntos)

b) Las asíntotas y la gráfica de f. (3 puntos)

c) La integral $\int f(x)dx$. (3 puntos)

Solución:

a) La fusión $f(x) = xe^{1-x^2}$ está definida en todo **R**. Además, toma valores negativos si $x < 0$ y positivos si $x > 0$. En $x = 0$ vale 0.

Derivando:

$$f'(x) = e^{1-x^2} - 2x\cdot xe^{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = \left(1-2x^2\right)e^{1-x^2}.$$

Igualando a 0: $\left(1-2x^2\right)e^{1-x^2} = 0 \Rightarrow 1-2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Con esto:

- Si $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$, como $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece.
- Si $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función crece.

Esto indica que en $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ la función tiene un mínimo.

- Si $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$, como $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función vuelve a decrecer.

Luego, en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ la función tiene un máximo.

b) La función tiene una asíntota horizontal, tanto hacia –∞ como hacia +∞, pues:

Hacia –∞:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{1-x^2} = [-\infty\cdot 0] = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{x^2-1}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = (L'H) = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2xe^{x^2-1}} = \frac{1}{-\infty} = 0^-.$$

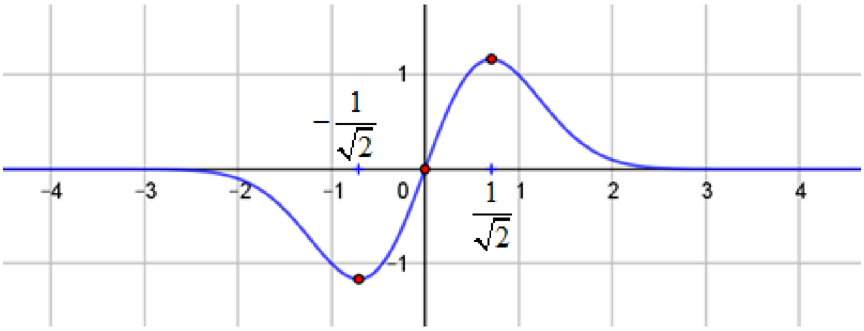
La asíntota es la recta y = 0; la curva va por debajo de la asíntota.

Hacia +∞:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{1-x^2} = [+\infty\cdot 0] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x^2-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L'H) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2xe^{x^2-1}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+.$$

La asíntota es la recta y = 0; la curva va por encima de la asíntota.

Su gráfica es la siguiente.



c) La integral $\int xe^{1-x^2}dx$ puede hacerse de manera inmediata, ajustando constantes:

$$\int xe^{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int\left(-2xe^{1-x^2}\right)dx = e^{1-x^2} + k.$$

30. Extremadura, ordinaria 2021

6. Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = e^x$ se cortan en al menos 2 puntos. Para cada uno de los puntos de corte, encontrar un intervalo que lo contenga de longitud menor o igual que 1. Razonar las respuestas exponiendo y verificando los resultados (teoremas) que lo justifiquen. (2 puntos)

Solución:

a) Las funciones dadas, $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = e^x$ son continuas en todo **R**. Por tanto, su diferencia, $h(x) = f(x) - g(x) = 2 - x^2 - e^x$ también es continua.

Además, cumple:

$h(0) = 2 - 0 - e^0 = 1 > 0$ y $h(1) = 2 - 1^2 - e^1 = 1 - e < 0$.

Por tanto, aplicando el teorema de Bolzano, se deduce que en algún punto $c \in (0, 1)$ la función toma el valor 0: $h(c) = f(c) - g(c) = 0 \to f(c) = g(c)$.

Esto significa que las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = e^x$ se cortan en algún punto del intervalo (0, 1).

Por otra parte:

$$h(-1) = 2 - 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} > 0 \text{ y } h(-2) = 2 - 4 - e^{-2} = -2 - \frac{1}{e^2} < 0.$$

Luego, también por Bolzano, se deduce que en algún punto $d \in (-2, -1)$ la función toma el valor 0: $h(d) = f(d) - g(d) = 0 \to f(d) = g(d)$. Las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = e^x$ se cortan en algún punto del intervalo (–2, –1).

- El teorema de Bolzano dice:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

31. Extremadura, extraordinaria 2021

7. Resolver la integral $\int \ln^2(x)\,dx$. (2 puntos)

Solución:

La integral $\int \ln^2(x)dx = \int (\ln(x))^2\,dx$ puede hacerse mediante el método de partes.

Tomando:

$$u_1 = (\ln(x))^2 \text{ y } dv_1 = dx \Rightarrow du_1 = 2(\ln(x))\cdot\frac{1}{x}dx \text{ y } v_1 = x,$$

luego,

$$\int (\ln(x))^2\,dx = (\ln(x))^2\cdot x - \int 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}\cdot x dx = x(\ln(x))^2 - 2\int \ln(x)dx.$$

La segunda integral también puede hacerse por partes.
Tomando

$$u_2 = \ln(x) \text{ y } dv_2 = dx \Rightarrow du_2 = \frac{1}{x}dx \text{ y } v = x,$$

luego,

$$2\int \ln(x)dx = 2x(\ln(x)) - 2\int \frac{1}{x}\cdot x dx = 2x(\ln(x)) - 2x.$$

Sustituyendo en la primera integral se tiene:

$$\int (\ln(x))^2\,dx = x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x + k.$$

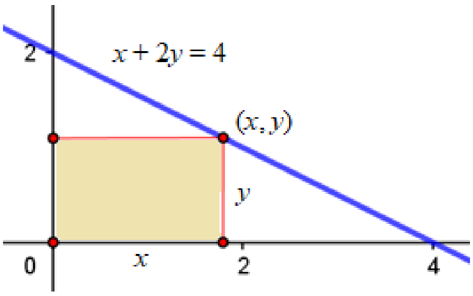
32. Galicia, ordinaria 2021

3. Análisis:

De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos lados sobre los ejes de coordenadas y un vértice sobre la recta $x + 2y = 4$, determine los vértices del que tiene mayor área.

Solución:

La situación es la que se muestra en la figura adjunta.



El área el rectángulo, de lados x e y, será

$$S(x, y) = x\cdot y,$$

despejando y en la ecuación $x + 2y = 4$ y sustituyendo en S se tiene:

$$S(y) = (4 - 2y)\cdot y \Rightarrow S(y) = 4y - y^2.$$

El máximo de S se da en la solución de $S' = 0$ que hace negativa a S''.
Derivando con respecto a y:

$$S'(y) = 4 - 4y \rightarrow \text{igualando a 0: } 4 - 4y = 0 \Rightarrow y = 1.$$

Como $S''(y) = -4 < 0$, para $y = 1$ se da la superficie máxima. El valor de $x = 2$.

Por lo tanto, los vértices serán los puntos: (0, 0), (2, 0), (2, 1) y (0,2).

33. Galicia, ordinaria 2021

4. Análisis:

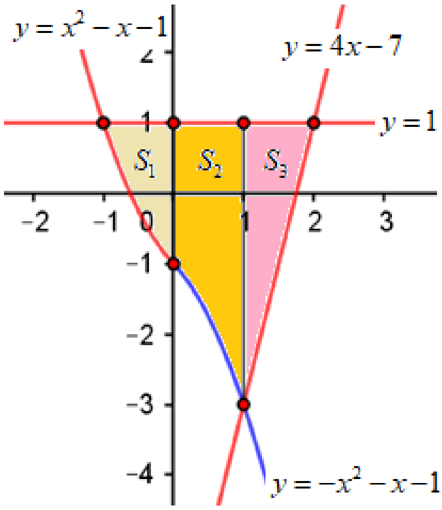
Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & \text{si} \quad x \le 0, \\ -x^2 - x - 1 & \text{si} \quad x > 0, \end{cases}$ calcule el área de la región encerrada por la gráfica de f y las rectas $y = 4x - 7$ e $y = 1$.

Solución:

La función viene dada por dos parábolas. Puede dibujarse dando valores.

- Para $y = x^2 - x - 1$, (0, –1), (–1, 0) y (–2, 5).
- Para $y = -x^2 - x - 1$, (0, –1), (1, –3) y (2, –7).

La función $f(x)$ es continua.



La recta $y = 4x - 7$ pasa por los puntos (1, –3) y (2, 1).

La recta horizontal $y = 1$ pasa por (–1, 1) y (2, 1).

La región encerrada entre la gráfica y las rectas es la coloreada en la figura. Puede descomponerse en tres partes. Su área es $S = S_1 + S_2 + S_3$, siendo:

$$S_1 = \int_{-1}^{0} \left(1 - \left(x^2 - x - 1\right)\right) dx = \int_{-1}^{0} \left(2 + x - x^2\right) dx =$$

$$= \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{6}.$$

$$S_2 = \int_{0}^{1} \left(1 - \left(-x^2 - x - 1\right)\right) dx = \int_{0}^{1} \left(2 + x + x^2\right) dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{17}{6}.$$

$$S_3 = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2 \to \text{triángulo de base 1 y altura 4.}$$

Por tanto, el área pedida será: $S = \dfrac{7}{6} + \dfrac{17}{6} + 2 = \dfrac{36}{6} = 6$ u^2.

34. Galicia, extraordinaria 2021

3. Análisis:

a) Enuncie el teorema de Bolzano.

b) Obtenga los valores de a, b y c que hacen que $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$ cumpla $f(0) = 1$ y tenga extremos relativos en $x = \pm 1$. Decir luego si los extremos son máximos o mínimos.

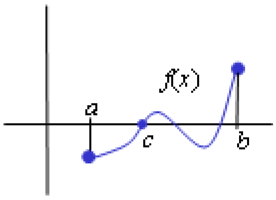
Solución:

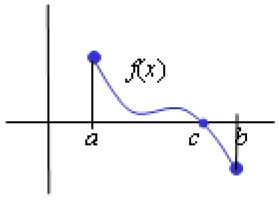
El teorema de Bolzano dice:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Esto es, si la función es negativa en a ($f(a) < 0$) y positiva en b ($f(b) > 0$), entonces se anula en algún punto c entre a y b ($f(c) = 0$).

Geométricamente, esto significa que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ corta al eje OX en un punto, al menos. (Análogamente si $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$.)





Desde el punto de vista algebraico, este teorema asegura que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución entre a y b. Esa solución será el punto c cuya existencia afirma el teorema.

b) La función es $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$

Si $f(0) = 1 \Rightarrow f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1$.

Si tiene extremos relativos en $x = \pm 1 \Rightarrow f'(\pm 1) = 0$.

Derivando: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3$.

$f'(-1) = 0 \Rightarrow 3a - 2b - 3 = 0$; $\quad f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b - 3 = 0$.

Resolviendo $\begin{cases} 3a - 2b - 3 = 0 \\ 3a + 2b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$.

La función será:

$f(x) = x^3 - 3x + 1$.

La derivada segunda es $f''(x) = 6x$.

Como $f''(-1) = -6 < 0$, entonces, en $x = -1$ se tiene un máximo.

Como $f''(1) = 6 > 0$, entonces, en $x = 1$ se tiene un mínimo.

35. Galicia, extraordinaria 2021

4. Análisis:

a) Enuncie el teorema de Rolle.

b) Calcule el área de la región encerrada por las gráficas de $f(x) = x + 6$ y $g(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x < 0, \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$

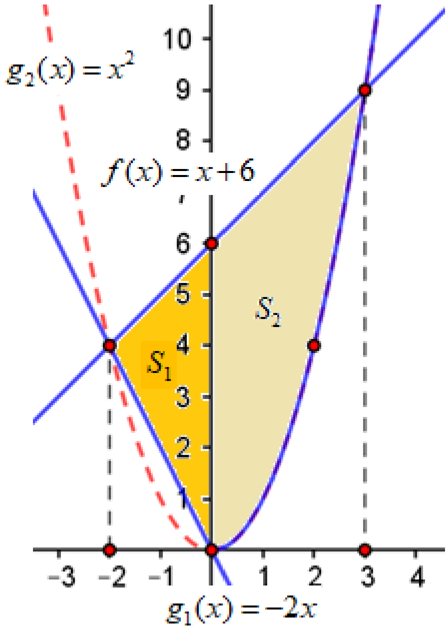
Solución:

a) El teorema de Rolle dice:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), y además $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f´(c) = 0$.

Geométricamente, esto significa que existe un punto de la curva en el que la recta tangente a ella es horizontal.

b) Las funciones que determinan la región pueden representarse dando valores.



Recta $f(x) = x + 6 \rightarrow$ puntos (0, 6) y (3, 9).

Recta $g_1(x) = -2x \rightarrow$ puntos (0, 0) y (−2, 4).

Parábola $g_2(x) = x^2 \rightarrow$ puntos (0, 0), (2, 4)y (3, 9).

Cortes:

$$\begin{cases} y = -2x \\ y = x + 6 \end{cases} \rightarrow (-2, 4);$$

$$\begin{cases} y = -2x \\ y = x^2 \end{cases} \rightarrow (0, 0);$$

$$\begin{cases} y = x + 6 \\ y = x^2 \end{cases} \rightarrow (3, 9).$$

Su área es $S = S_1 + S_2$, siendo:

$$S_1 = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6 \rightarrow \text{triángulo de base 6 y altura 2.}$$

$$S_2 = \int_0^3 \left(6 + x - x^2\right) dx = \left[6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 18 + \frac{9}{2} - 9 = \frac{27}{2}.$$

Por lo tanto, el área pedida será: $S = 6 + \frac{27}{2} = \frac{39}{2} = 19,5$ u^2.

36. La Rioja, ordinaria 2021

1.– (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = xe^{1/x^3}.$$

Determinar el dominio y las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

Solución:

La función no está definida en $x = 0$, punto en el que el exponente se hace infinito; luego Dom $(f) = \mathbf{R} - \{0\}$.

En $x = 0$ puede haber una asíntota vertical. Veamos:

Por la izquierda: $\lim_{x\to 0^-}\left(xe^{1/x^3}\right) = \left[0\cdot e^{1/0^-} = 0\cdot e^{-\infty} = 0\cdot 0\right] = 0$. Luego, no hay asíntota vertical a la izquierda de $x = 0$.

Por la derecha: $\lim_{x\to 0^+}\left(xe^{1/x^3}\right) = \left[0\cdot e^{1/0^+} = 0\cdot e^{+\infty} = 0\cdot\infty\right] \to$ esta indeterminación habrá que resolverla aplicando la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(xe^{1/x^3}\right) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{1/x^3}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (\text{L´H}) =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{3}{x^4}e^{1/x^3}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{3e^{1/x^3}}{x^2} = \left[\frac{+\infty}{0^+}\right] = +\infty.$$

Por tanto, la recta $x = 0$ es asíntota vertical de la función. La gráfica de f se pega a la recta por la derecha (de la recta) y hacia $+\infty$.

Asíntotas horizontales.

Hacia $-\infty$:

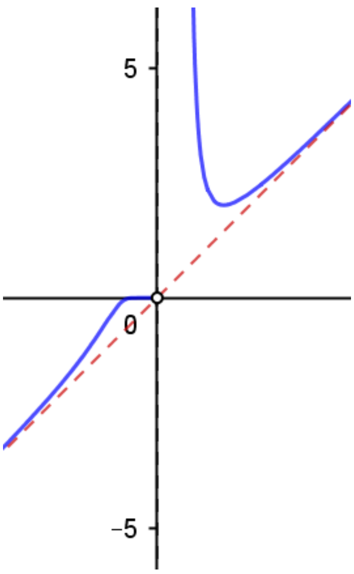
$$\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{1/x^3}\right) = \left[-\infty\cdot e^{1/-\infty} = -\infty\cdot e^{0^-} = -\infty\cdot 1\right] = -\infty \to \text{No hay}$$

asíntota horizontal hacia $-\infty$.

Hacia $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{1/x^3}\right) = \left[+\infty\cdot e^{1/+\infty} = +\infty\cdot 1\right] = +\infty \to \text{No hay asíntota}$$

horizontal hacia $+\infty$.



Asíntota oblicua: recta $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{xe^{1/x^3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x^3} = \left[e^{1/\pm\infty} = 1\right] = 1;$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(xe^{1/x^3} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x\left(e^{1/x^3} - 1\right)\right) = [\pm\infty\cdot 0] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{1/x^3} - 1}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (\text{L´H})$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{3}{x^4}e^{1/x^3}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3e^{1/x^3}}{x^2} = \left[\frac{3}{+\infty}\right] = 0^+ .$$

La recta $y = x$ es asíntota oblicua de la curva. Tanto hacia $-\infty$ como hacia $+\infty$ la curva va por encima de la recta.
(La gráfica, que no se pide, se da para que el problema se comprenda mejor).

37. La Rioja, ordinaria 2021

3.– (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la función $f(x) = \dfrac{x+3}{(x+2)^2}$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 5$.

Solución:

En el intervalo [0, 5], la función $f(x) = \dfrac{x+3}{(x+2)^2}$ es positiva. Por tanto, el área pedida viene determinada por la integral definida $\displaystyle\int_0^5 \frac{x+3}{(x+2)^2}dx$.

Una primitiva de $f(x) = \dfrac{x+3}{(x+2)^2}$ puede encontrarse por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{x+3}{(x+2)^2} = \frac{A}{(x+2)^2} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{A+B(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{Bx+A+2B}{(x+2)^2} .$$

Identificando coeficientes:

$$\begin{cases} B = 1 \\ A+2B = 3 \end{cases} \Rightarrow A = 1; B = 1.$$

Luego.

$$\int \frac{x+3}{(x+2)^2}dx = \int \frac{1}{(x+2)^2}dx + \int \frac{1}{(x+2)}dx = -\frac{1}{(x+2)} + \ln(x+2) .$$

Por tanto:

$$\int_0^5 \frac{x+3}{(x+2)^2}dx = \int \frac{x+3}{(x+2)^2}dx = \left[-\frac{1}{(x+2)} + \ln(x+2)\right]_0^5 = -\frac{1}{7} + \ln 7 - \left(-\frac{1}{2} + \ln 2\right) =$$

$$= \frac{5}{14} + \ln\left(\frac{7}{2}\right) \text{ u}^2.$$

38. La Rioja, extraordinaria 2021

2.– (2 puntos) Sea la función

$$f(x) = \cos x.$$

Hallar el área de la superficie encerrada por la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = -\frac{\pi}{4}$, la gráfica de f y las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

Solución:

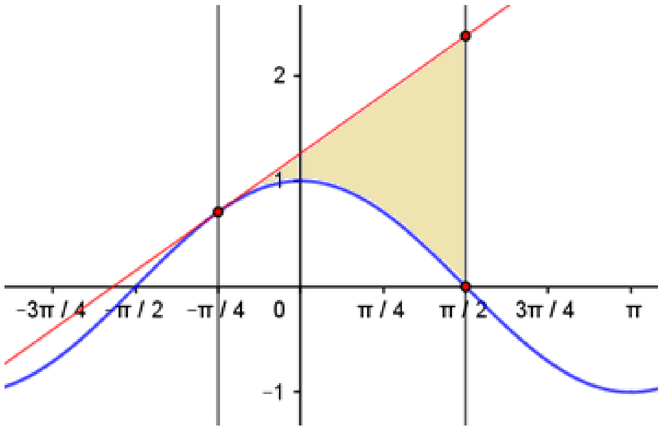
La ecuación de la recta tangente a $f(x) = \cos x$ en el punto de abscisa $x = -\frac{\pi}{4}$ es:

$$y - f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Como $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces dicha recta será:

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1 + \frac{\pi}{4}\right).$$



El recinto pedido es el coloreado en la figura adjunta.

Como en el intervalo considerado la recta está por encima de la curva, el área pedida viene dada por a integral definida,

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - \cos x \right) dx = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) x - \sin x \right) \Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/2} \quad 0$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\pi^2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) =$$

$$= \frac{9\sqrt{2}\pi^2}{64} + \frac{3\sqrt{2}\pi}{8} \cdot \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \ \text{u}^2.$$

39. La Rioja, extraordinaria 2021

3.– (2 puntos) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x}\right)^{x}$.

Solución:
Ambos límites pueden hacerse aplicando logaritmos y la regla de L´Hôpital.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\tan x}=\left[\left(\dfrac{1}{0}\right)^0=\infty^0\right]$ $\to$ esta indeterminación se transforma aplicando logaritmos:

$$\ln\left(\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\tan x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\ln\left(\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\tan x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left((\tan x)\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=[0\cdot\infty]=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left((\tan x)(-2\ln x)\right)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0^+}\frac{-2\ln x}{\dfrac{1}{\tan x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$ $\to$ ahora puede aplicarse L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-2\ln x}{\dfrac{1}{\tan x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L´H)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{-2}{x}}{\dfrac{-1}{\sin^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin^2 x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=(L´H)=\lim_{x\to 0^+}\frac{4\sin x\cos x}{1}=\left[\frac{0}{1}\right]=0.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\tan x}=e^0=1$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x}\right)^{x}=\left[1^\infty\right]$ $\to$ esta indeterminación se transforma aplicando logaritmos:

$$\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x}\right)^{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\left(\frac{4x-1}{4x}\right)^{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x\ln\left(\frac{4x-1}{4x}\right)\right)=[\infty\cdot 0]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln\left(\dfrac{4x-1}{4x}\right)}{\dfrac{1}{x}}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]$$ $\to$ ahora puede aplicarse L´Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln\left(\dfrac{4x-1}{4x}\right)}{\dfrac{1}{x}}\right)=(L´H)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\dfrac{1}{4x^2-x}}{-\dfrac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x^2}{4x^2-x}\right)=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=-\frac{1}{4}.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x}\right)^{x}=e^{-1/4}$.

40. Madrid, ordinaria 2021

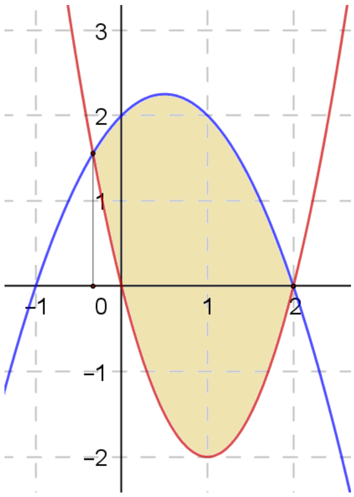
A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = 2 + x - x^2, \quad g(x) = 2x^2 - 4x.$$

Solución:

Las funciones dadas son dos parábolas; pueden representarse dando valores.
La región delimitada por ambas gráficas es la sombreada en la figura.



Sus gráficas se cortan en las soluciones de la ecuación

$$f(x) = g(x) \to 2 + x - x^2 = 2x^2 - 4x \Rightarrow$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \begin{cases} -1/3 \\ 2 \end{cases}.$$

El área viene dada por la integral definida

$$\int_{-1/3}^{2} \left(2 + x - x^2 - \left(2x^2 - 4x\right)\right) dx =$$

$$= \int_{-1/3}^{2} \left(-3x^2 + 5x + 2\right) dx = \left[-x^3 + \frac{5x^2}{2} + 2x\right]_{-1/3}^{2} =$$

$$= -8 + 10 + 4 - \left(\frac{1}{27} + \frac{5}{18} - \frac{2}{36}\right) = 6 + \frac{19}{54} = \frac{343}{54} \text{ u}^2.$$

41. Madrid, ordinaria 2021

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ x\,e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi, 2)$. Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0,1]$ de manera que $f(x_0) = 2$.

c) (0.75 puntos) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx$.

Solución:

a) Será continua en $x = 0$ si los límites laterales coinciden y son iguales a $f(0) = 0$.
Como:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sin x = 0; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} xe^x = 0 \cdot 1 = 0.$$

Luego, la función es continua en $x = 0$.

Derivando,

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ e^x + xe^x & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

También coinciden las derivadas laterales en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos x = \cos 0 = 1 \text{ y } \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(e^x + xe^x\right) = e^0 + 0 = 1.$$

Por tanto, la función es derivable en $x = 0$.

b) Crecimiento y decrecimiento.
En en intervalo (−π, 0), la derivada, $f'(x)=\cos x$, se anula en $x = -\pi/2$.

- Para $-\pi < x < -\pi/2$, $f'(x)=\cos x<0 \Rightarrow$
  la función es decreciente en el intervalo (−π, −π/2).
- Para $-\pi/2 < x < 0$, $f'(x)=\cos x>0 \Rightarrow$
  la función es creciente en el intervalo (−π/2, 0);

En $x = -\pi/2$ hay un mínimo relativo.

En en intervalo [0, 2), la derivada, $f'(x)=e^x+xe^x$, siempre es positiva: será creciente en todo ese intervalo.

→ En el intervalo [0, 1] la función que interviene es $f(x)=xe^x$, que siempre es continua. Como $f(0)=0$ y $f(1)=e$, entonces, por el teorema de los valores intermedios, la función tomará el valor 2 (que está entre 0 y e) en algún punto $x_0 \in (0, 1)$.

c) $\int_{-\pi/2}^{1} f(x)dx=\int_{-\pi/2}^{0}(\sin x)dx+\int_{0}^{1}(xe^x)dx$.
La primera integral es inmediata; la segunda hay que hacerla por partes.
Tomando:

$$u=x \text{ y } dv=e^x dx \Rightarrow du=dx \text{ y } v=e^x.$$

Luego,

$$\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x=(x-1)e^x.$$

Por tanto:

$$\int_{-\pi/2}^{1} f(x)dx=\int_{-\pi/2}^{0}(\sin x)dx+\int_{0}^{1}(xe^x)dx = \left[-\cos x\right]_{-\pi/2}^{0}+\left[xe^x-e^x\right]_0^1 = -1+e-e+1=0.$$

<u>Nótese</u> que no se pide un área.

42. Madrid, extraordinaria 21

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (1.25 puntos) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:

a.1) (0.5 puntos) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\operatorname{sen} x}$ a.2) (0.75 puntos) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}\right)$

(**Indicación**: use el cambio de variable $t=1/x$ donde sea necesario).

b) (1.25 puntos) Calcule las siguientes integrales:

b.1) (0.5 puntos) $\int\frac{x}{x^2-1}\,dx$ b.2) (0.75 puntos) $\int_0^1 x^2e^{-x}\,dx$

Solución:

Ambos límites dan lugar a formas indeterminadas.

a.1) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-2x)}{x-2x^2-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x^3}{x-2x^2-\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]\to$ aplicando la regla de L´Hôpital $\to$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x^3}{x-2x^2-\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L´H)=\lim_{x\to 0}\frac{2x-6x^2}{1-4x-\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=(L´H)=\lim_{x\to 0}\frac{2-12x}{-4+\sin x}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}.$$

a.2) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{\sin\frac{1}{x}}\right)=\left[\frac{1}{\infty}\cdot\left(\frac{3}{\infty}-\frac{2}{0}\right)\right]\to\left[\frac{3}{\infty}-\frac{2}{\infty\cdot 0}\right]=-\frac{2}{\infty\cdot 0}$.

Esta indeterminación se transforma como sigue,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{\sin\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x\sin\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2}\right)-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{x}}{\sin\frac{1}{x}}\right)=\left[0-\frac{0}{0}\right]=$$

$$\to (\text{L´Hôpital})\to=-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{-2}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}\right)=-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\cos\frac{1}{x}}\right)=-\frac{2}{\cos 0}=-2.$$

b.1) Se trata de una integral inmediata.

$$\int\frac{x}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)+k.$$

b.2) Para calcular $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$ hay que hallar una primitiva de $f(x)=x^2e^{-x}$. Puede hacerse por el método de partes.

En $\int x^2e^{-x}dx$, tomando: $u=x^2\Rightarrow du=2xdx$; $dv=e^{-x}dx\Rightarrow v=-e^{-x}\Rightarrow$

$$\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}dx \qquad (1)$$

La segunda integral que se obtiene también se hace por partes.

Tomando: $u' = 2x \Rightarrow du' = 2dx$; $dv' = e^{-x}dx \Rightarrow v' = -e^{-x}$.
Se tiene: $\int 2xe^{-x}dx = 2xe^{-x} + \int 2e^{-x}dx = 2xe^{-x} - 2e^{-x}$.

Sustituyendo en (1) queda:

$$\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}dx = -x^2e^{-x} - \left(2xe^{-x} - 2e^{-x}\right) = \left(-x^2 - 2x - 2\right)e^{-x}.$$

Con esto, la integral definida

$$\int_0^1 x^2e^{-x}dx = \left[\left(-x^2 - 2x - 2\right)e^{-x}\right]_0^1 = -5e^{-1} + 2e^0 = 2 - 5e^{-1}.$$

43. Madrid, extraordinaria 2021

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = x^3 - |x| + 2.$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en la recta real.

c) (0.75 puntos) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de f, el eje de abcisas $y = 0$, y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

a) La función dada puede definirse por partes como sigue:

$$f(x) = x^3 - |x| + 2 = \begin{cases} x^3 + x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^3 - x + 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Será continua en $x = 0$ si los límites laterales coinciden y son iguales a $f(0) = 2$.
Como:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x^3 + x + 2\right) = 0 + 2 = 2; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x^3 - x + 2\right) = 0 + 2 = 2,$$

la función es continua en $x = 0$.

Derivando,

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Las derivadas laterales en $x = 0$ no son iguales:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(3x^2 + 1\right) = 1 \text{ y } \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(3x^2 - 1\right) = -1.$$

Por tanto, la función no es derivable en $x = 0$.

b) Para valores de $x < 0$, $f'(x) = 3x^2 + 1 < 0 \Rightarrow$ la función es creceinte en el intervalo $(-\infty, 0)$.

Para valores de $x > 0$, $f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, luego:

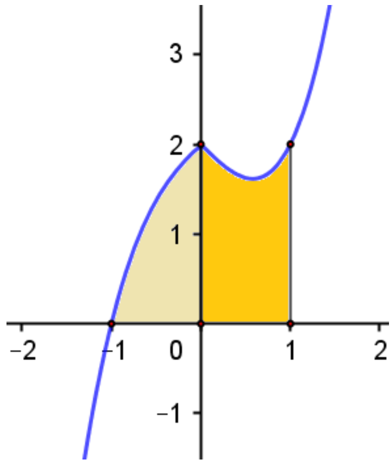
- Si $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, como $f´(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece en ese intervalo.
- Si $x > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, como $f´(x) > 0 \Rightarrow$ la función crece cuando $x > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
- También se deduce que en $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ la función tiene un mínimo elativo.

c) Como la función no es negativa en el intervalo [–1, 1], el área pedida viene dada por la suma de las integrales definidas siguientes:

$$\int_{-1}^{0}\left(x^3 + x + 2\right)dx + \int_{0}^{1}\left(x^3 - x + 2\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{0}^{1} =$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2\right) - 0 = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = 3 \text{ u}^2 .$$



(La gráfica no se pide).

44. Murcia, ordinaria 2021

3: En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado a) para realizar el apartado b), aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado a).

Se quiere diseñar una lata de refresco de forma cilíndrica, con tapas inferior y superior. El material para las tapas tiene un coste de 5 euros cada cm^2 y el material para el resto del cilindro tiene un coste de 3 euros cada cm^2.

a) **[1 p.]** Si denotamos por x el radio de las tapas y por y la altura de la lata, demuestre que el coste total del material necesario para construir dicha lata viene dado por $10\pi x^2 + 6\pi xy$.

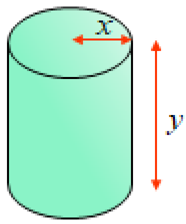
b) **[1,5 p.]** Si el volumen de la lata es $90\pi\,\text{cm}^3$, determine sus dimensiones (radio y altura) para que el coste del material sea mínimo.

Solución:

a) Sea el cilindro de radio de la base x y altura y.

El área de la base es:

$S_B = \pi x^2$; como son dos, $S_{2B} = 2\pi x^2$.



El coste del material necesario para su fabricación será:

$C_{2B} = 5 \cdot 2\pi x^2 = 10\pi x^2$.

El área lateral es: $C_L = 2\pi x \cdot y$.

Costará, $S_L = 3 \cdot 2\pi xy = 6\pi xy$.

Por tanto, el coste total para construirla será: $C(x, y) = 10\pi x^2 + 6\pi xy$.

b) Como su volumen $V = \pi x^2 y = 90\pi \Rightarrow y = \dfrac{90\pi}{\pi x^2} = \dfrac{90}{x^2}$.

Sustituyendo en la función de coste total,

$$C(x) = 10\pi x^2 + 6\pi x \cdot \frac{90}{x^2} \Rightarrow C(x) = 10\pi x^2 + \frac{540\pi}{x}$$

La función C será mínima en la solución de $C´ = 0$ que haga positiva a $C´´$.

Derivando e igualando a 0:

$$C´(x) = 20\pi x - \frac{540\pi}{x^2} \to \text{se hace 0 cuando } 20\pi x^3 - 540\pi = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ cm.}$$

La derivada segunda, $C´´(x) = 20\pi + \dfrac{1080\pi}{x^3}$, es siempre positiva. Por tanto, el mínimo coste de la lata se da cuando su radio x = 3 cm; y su altura, $y = \dfrac{90}{3^2} = 10$ cm.

45. Murcia, ordinaria 2021

4: En este ejercicio las cuestiones a) y b) son totalmente independientes.

a) **[1 p.]** Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

b) **[1,5 p.]** Calcule la integral indefinida $\int x^2\ln(x)\,dx$. Determine la primitiva de la función $f(x)=x^2\ln(x)$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(1,0)$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=[\infty-\infty]$. Para resolver esta indeterminación es necesario transformar la expresión.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$$ = (se multiplica y divide por la expresión conjugada) = $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+1-x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\infty}=0$$

b) La integral $\int x^2\ln(x)dx$ puede hacerse por el método de partes.

Tomando:

$$u=\ln x\ \Rightarrow\ du=\frac{1}{x}dx;\ \ dv=x^2dx\ \Rightarrow\ v=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}$$

Por tanto:

$$\int x^2\ln(x)dx=\ln(x)\cdot\frac{x^3}{3}-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^2}{3}dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+k.$$

La primitiva buscada es $F(x)=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+k$.

Si se desea que pase por el punto (1, 0), entonces $F(1)=\frac{1^3}{3}\ln 1-\frac{1^3}{9}+k=0\ \Rightarrow\ k=\frac{1}{9}$.

Por tanto, la función será $F(1)=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{1}{9}$.

46. Murcia, extraordinaria 2021

3: Dada la función $f(x) = x^2e^{-x}$ definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$, se pide:

a) **[1,5 p.]** Calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos) y determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) **[1 p.]** Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Solución:

a) Derivando e igualando a 0 se tiene:

$$f(x) = x^2e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x} \to f'(x) = 0 \text{ si } x = 0 \text{ o } x = 2.$$

Con esto:

- Si $x < 0$, como $f'(x) < 0$ la función es decreciente.
- Si $0 < x < 2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función crece.

Por tanto, en $x = 2$ hay un mínimo relativo.

- Si $x > 2$, $f'(x) < 0$ la función decrece.

Luego, en $x = 2$ hay un máximo relativo.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2e^{-x}\right) = [\infty\cdot\infty] = \infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2e^{-x}\right) = [\infty\cdot 0] \to$ transformando la expresión y aplicando L´Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x^2e^{-x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L'H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L'H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = \left[\frac{2}{\infty}\right] = 0.$$

47. Navarra, ordinaria 2021

P5) Sea la función $f(x) = (x^2 - 3x + 10)^{\log\left[2^{x-1} \cdot \sin\frac{\pi(x+2)}{6}\right]}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$.

(1.25 puntos)

b) Demuestra que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.25 puntos)

Solución:

a) La función $f(x) = \left(x^2 - 3x + 10\right)^{\log\left(2^{x-1}\sin\frac{\pi(x+2)}{6}\right)}$ está definida para todo $x \in [1, 3]$, pues:

- la base es una función polinómica (siempre continua) y nunca es negativa: $x^2 - 3x + 10 > 0$ para todo $x \to$ $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-40}}{2}$ no es real;
- $\log\left(2^{x-1}\sin\frac{\pi(x+2)}{6}\right)$ está definido, pues $2^{x-1} > 0$ siempre y $\sin\frac{\pi(x+2)}{6}$ toma valores positivos para todo $x \in [1, 3]$; luego, $2^{x-1}\sin\frac{\pi(x+2)}{6} > 0$. (Una función logarítmica es continua en todo su dominio).

Por tanto, la función es continua en todo el intervalo [1, 3].

b) En los extremos del intervalo [1, 3], la función toma los valores:

$$f(1) = \left(1^2 - 3 + 10\right)^{\log\left(2^{1-1}\sin\frac{\pi(1+2)}{6}\right)} = 8^{\log\left(1 \cdot \sin\frac{\pi}{2}\right)} = 8^0 = 1 \text{ y}$$

$$f(3) = \left(3^2 - 3 + 10\right)^{\log\left(2^{3-1}\sin\frac{\pi(3+2)}{6}\right)} = 16^{\log\left(4 \cdot \sin\frac{5\pi}{6}\right)} = 16^{\log 2} = 16^{0,301030} > 16^{0,25} = 2.$$

Por tanto, en el intervalo [1, 3] la función cumple las hipótesis del teorema de los valores intermedios, que dice: Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces la función toma todos los valores comprendidos (intermedios) entre $f(a)$ y $f(b)$. Esto es, para cualquier valor c, $f(a) \le c \le f(b)$, existe un punto $\alpha \in [a, b]$, tal que $f(\alpha) = c$.

Como $f(1) \le \frac{3}{2} \le f(3)$, entonces existe un valor $\alpha \in (1,\ 3)$ tal que $f(\alpha) = \frac{3}{2}$.

48. Navarra, ordinaria 2021

P7) Sea la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{5x - 2 - x\sin\frac{\pi x}{2}}{x^2 - 4x + 6}\right)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1,3]$.

(1 punto)

b) Demuestra que existe $\alpha \in (1,3)$ tal que $f'(\alpha) = 3/2 \ \ln 2$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.5 puntos)

Solución:

a) Una función logarítmica es continua en todo su dominio, para valores positivos. Por tanto, hay que ver que la expresión $\dfrac{5x-2-x\sin\frac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6} > 0$ para todo $x \in [1, 3]$.

- El denominador nunca sea anula: $x^2 - 4x + 6 \neq 0$, pues $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-24}}{2}$ no es real;

además toma valores positivos: $d(x) = x^2 - 4x + 6 > 0$ para todo x, ya que, por ejemplo, para $x = 0$, $d(0) = 6 > 0$.

- El numerador $5x - 2 - x\sin\dfrac{\pi x}{2} = x\left(5 - \sin\dfrac{\pi x}{2}\right) - 2$, cuando $1 \le x \le 3$, toma valores entre

$1\cdot\left(5 - \sin\dfrac{\pi}{2}\right) - 2 = 2$ y $3\cdot\left(5 - \sin\dfrac{\pi\cdot 3}{2}\right) - 2 = 16$. Esto es, siempre es positivo.

Luego, como $\dfrac{5x-2-x\sin\frac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6} > 0$ para todo $x \in [1, 3] \Rightarrow f(x) = \ln\left(\dfrac{5x-2-x\sin\frac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6}\right)$ es continua en el intervalo [1, 3].

b) También es derivable en el intervalo (1, 3), pues la función derivada siempre está definida. La derivada puede hacerse como sigue:

$$f(x) = \ln\left(\frac{5x-2-x\sin\frac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6}\right) \Rightarrow f(x) = \ln\left(5x-2-x\sin\frac{\pi x}{2}\right) - \ln\left(x^2-4x+6\right) \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{5 - \sin\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{5x-2-x\sin\frac{\pi x}{2}} - \frac{2x-4}{x^2-4x+6}$$ $\to$ ambas fracciones está definidas en el intervalo (1, 3).

Como cumple el teorema del valor medio en el intervalo [1, 3], entonces:

- existe un punto $\alpha \in (1,\ 3)$ tal que $\dfrac{f(3) - f(1)}{3-1} = f'(\alpha) \to$

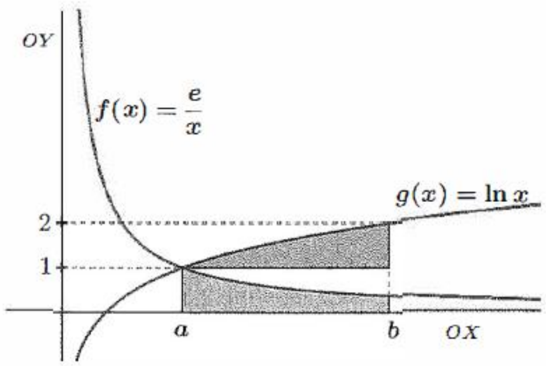
$$\frac{\ln\frac{16}{3} - \ln\frac{2}{3}}{3-1} = f'(\alpha) \Rightarrow \frac{\ln 8}{2} = f'(\alpha) \Rightarrow \frac{\ln 2^3}{2} = f'(\alpha) \Rightarrow \frac{3\ln 2}{2} = f'(\alpha).$$

Observa que $f(3)=\ln\left(\dfrac{15-2-3\sin\frac{3\pi}{2}}{3}\right)=\ln\dfrac{16}{3}$ y $f(3)=\ln\left(\dfrac{5-2-\sin\frac{\pi}{2}}{3}\right)=\ln\dfrac{2}{3}$.

El teorema del valor medio dice: Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

49. Navarra, ordinaria 2021

P8) Calcula los valores de las abcisas a y b que aparecen en el gráfico, y, después, comprueba que las áreas de las dos regiones sombreadas son iguales:



(2.5 puntos)

Solución:

→ Si la función $f(x)=\dfrac{e}{x}$ pasa por el punto $(a, 1) \Rightarrow f(a)=\dfrac{e}{a}=1 \Rightarrow a=e$.

Puede verse que $g(x)=\ln x$ también pasa por ese punto, pues $g(a)=g(e)=\ln e=1$.

→ Si la función $g(x)=\ln x$ pasa por el punto $(b, 2) \Rightarrow g(b)=\ln b=2 \Rightarrow b=e^2$.

El área de arriba viene dada por el valor de la integral $\int_e^{e^2}(\ln x-1)\,dx$; la de abajo, por

$$\int_e^{e^2}\frac{e}{x}dx=\left[e\ln x\right]_e^{e^2}=e\ln e^2-e\ln e=2e-e=e.$$

Una primitiva de $\int \ln x dx$ se obtiene por el método de partes, tomando:

$$u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx;\quad dv=dx \Rightarrow v=x;$$

luego, $\int \ln x\,dx = x\ln x-\int dx = x\ln x - x$

Por tanto,

$$\int_e^{e^2}(\ln x-1)\,dx=\left[x\ln x-x-x\right]_e^{e^2}=e^2\ln e^2-2e^2-(e\ln e-2e) = 2e^2-2e^2-(e-2e)=e.$$

Efectivamente, ambas regiones tienen la misma área.

<u>**50**. Navarra, extraordinaria 2021</u>

P5) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}} \qquad \text{(1.25 puntos)}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot \sin\frac{1}{x} \qquad \text{(1.25 puntos)}$$

<u>Solución</u>:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}}$ = (dividiendo por $\sqrt{x}$ el numerador y el denominador) =

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{3x^2+2x}-\sqrt{3x^2}}$ = (multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada del denominador) = $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{3x^2}}{\left(\sqrt{3x^2+2x}-\sqrt{3x^2}\right)\left(\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{3x^2}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{3x^2}}{3x^2+2x-3x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{3x^2}}{2x}$ = (dividiendo por x ambos términos)

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\dfrac{3x^2+2x}{x^2}}+\sqrt{\dfrac{3x^2}{x^2}}}{\dfrac{2x}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3+\dfrac{2}{x}}+\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,.$$

- $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x} = [\infty\cdot 0]$.

Esta indeterminación se transforma y se resuelve aplicando L´Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-\dfrac{1}{x^2}\cdot\cos\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right) = 1\,.$$

51. Navarra, extraordinaria 2021

P7) Se considera la función $f(x) = \sqrt{x + \sin\frac{\pi x}{2}}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1,3]$. (0.75 puntos)

b) Demuestra que existen dos valores $\alpha \in (1,2)$ y $\beta \in (2,3)$ tales que $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Enuncia el/los resulatdo(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.75 puntos)

Solución:

a) La función $f(x) = \sqrt{x + \sin\frac{\pi x}{2}}$ será continua en el intervalo [1, 3] si el radicando no es negativo para esos valores.

Como $-1 \le \sin\frac{\pi x}{2} \le 1$ para cualquier valor de $x \in [1, 3] \Rightarrow x + \sin\frac{\pi x}{2} \ge 0$.

Por tanto, dicha función es continua en [1, 3].

b) También es derivable en el intervalo (1, 3), pues la función derivada siempre está definida. La derivada es:

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{2\sqrt{x + \sin\frac{\pi x}{2}}}$$, que está definida en todo ese intervalo.

Luego, es derivable en los intervalos (1, 2) y (2, 3).

Por tanto, la función dada, cumple las hipótesis del teorema del valor medio (incrementos finitos, de Lagrange), que dice:

Si $f(x)$ es continua en [a, b] y derivable en (a, b), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

- Como cumple el teorema del valor medio en el intervalo [1, 2], entonces, existe un punto $\alpha \in (1,\ 2)$ tal que

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f'(\alpha) \ \to \ \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2 - 1} = f'(\alpha) \Rightarrow \frac{0}{1} = f'(\alpha) \Rightarrow f'(\alpha) = 0 .$$

- Como cumple el teorema del valor medio en el intervalo [2, 3], entonces, existe un punto $\beta \in (2,\ 3)$ tal que

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = f'(\beta) \ \to \ \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{3 - 2} = f'(\beta) \Rightarrow \frac{0}{1} = f'(\beta) \Rightarrow f'(\beta) = 0 .$$

Observa que $f(1) = \sqrt{1 + \sin\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}$, $f(2) = \sqrt{2 + \sin\pi} = \sqrt{2}$ y $f(3) = \sqrt{3 + \sin\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{2}$.

Nota: Hubiese bastado con aplicar el teorema de Rolle en cada uno de los intervalos. Este teorema dice: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en el intervalo (a, b), y además $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

52. País Vasco, ordinaria 2021

Ejercicio A4

Sean las funciones: $f(x) = 1/x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^2/8$.

a) Dibujar el recinto finito, en el primer cuadrante, limitado por las gráficas de esas tres funciones.

b) Calcular el área de dicho recinto.

Solución:

a) Las tres graficas pueden representarse dando valores, pues son suficientemente conocidas: una hipérbola equilátera y dos parábolas.

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

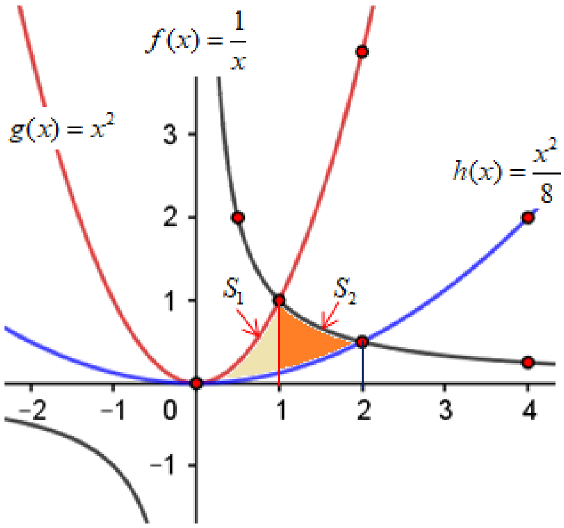
Puntos: (1, 1); (2, 1/2); (4, 1/4); (1/2, 2); (1/4, 4); y también todos sus simétricos respecto del origen: (–1, –1), …

- $g(x) = x^2$.

Puntos: (0, 0); (1, 1), (2, 4); (–1, 2); (–2, 4).

- $h(x) = \dfrac{x^2}{8}$.

Puntos: (0, 0); (2, 1/2); (4, 2); (–2, 1/2).



Las gráficas se cortan en los puntos (0, 0), (1, 1) y (2, 1/2), soluciones de las ecuaciones:

$$x^2 = \frac{x^2}{8},\ x^2 = \frac{1}{x},\ \frac{1}{x} = \frac{x^2}{8},$$

respectivamente.

b) El recinto es el sombrado en la figura. Su área viene dada por la suma de dos integrales definidas:

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{8} \right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x^2}{8} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{24} \right)\Bigg|_0^1 + \left(\ln x - \frac{x^3}{24} \right)\Bigg|_1^2 \Rightarrow$$

$$S = \frac{1}{3} - \frac{1}{24} + \left(\ln 2 - \frac{8}{24} \right) - \left(\ln 1 - \frac{1}{24} \right) = \ln 2 \ \text{u}^2.$$

53. País Vasco, extraordinaria 2021

Ejercicio A3

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-4}$ y calcular sus máximos y sus mínimos.

Solución:

$$f(x)=\frac{x-4}{x^2-4}.$$

Dominio: Dom (f) = **R** − {−2, 2}.

No está definida en los ceros del denominador: $x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$.

Derivando:

$$f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^2-4\right)-(x-4)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{-x^2+8x-4}{\left(x^2-4\right)^2}.$$

Se anula cuando $-x^2+8x-4=0 \Rightarrow x=\dfrac{-8\pm\sqrt{64-16}}{-2}=\dfrac{-8\pm 4\sqrt{3}}{-2}=\begin{cases}4-2\sqrt{3}\approx 0,54\\ 4+2\sqrt{3}\approx 7,46\end{cases}.$

Hay que estudiar el signo de la derivada en los intervalos:

$(-\infty,\ -2)$; $\left(-2,\ 4-2\sqrt{3}\right)$; $\left(4-2\sqrt{3},\ 2\right)$; $\left(2,\ 4+2\sqrt{3}\right)$; $(2,\ +\infty)$.

- Si $x\in(-\infty,\ -2)$, $f'(x)<0 \Rightarrow$ la función es decreciente.
- Si $x\in\left(-2,\ 4-2\sqrt{3}\right)$, $f'(x)<0 \Rightarrow$ la función es decreciente.
- Si $x\in\left(4-2\sqrt{3},\ 2\right)$, $f'(x)>0 \Rightarrow$ la función es creciente.

Por tanto, en $x=4-2\sqrt{3}$ la función tiene un mínimo relativo.

- Si $x\in\left(2,\ 4+2\sqrt{3}\right)$, $f'(x)>0 \Rightarrow$ la función es creciente.
- Si $x\in(2,\ +\infty)$, $f'(x)<0 \Rightarrow$ la función es decreciente.

Por tanto, en $x=4+2\sqrt{3}$ la función tiene un máximo relativo.

Nota: Aunque no se pide, puede observarse que la función tiene asíntotas verticales en $x = -2$ y $x = 2$, pues $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x-4}{x^2-4}=\dfrac{-6}{0}=\pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to +2}\dfrac{x-4}{x^2-4}=\dfrac{-2}{0}=\pm\infty$.

También tiene una asíntota horizontal, la recta $y = 0$.