ALGUNOS PROBLEMAS DE ÁLGEBRA PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE EBAU–EvAU–PEBAU… DE 2021

Los problemas que con mayor frecuencia se plantean en este bloque de ÁLGEBRA (en todos los distritos universitarios) son:
1) Problemas relacionados con álgebra de matrices: ecuaciones matriciales y cálculo de la matriz inversa (hay que manejar con soltura las propiedades; y conocer la fórmula para el cálculo de la inversa). En algún caso se propone el cálculo de determinantes utilizando las propiedades asociadas.
2) Problemas de sistemas lineales: discusión y solución. (Teorema de Rouché).
3) Planteamiento y resolución de problemas con enunciado.

He seleccionado los ejercicios que, aparentemente, presentaban mayor dificultad o resultaban algo novedosos. Aunque "nihil novum sub sole".

1. Andalucía, ordinaria 2021
EJERCICIO 6. (2,5 puntos)
En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón.
El gerente nos dice que se deben producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen un total de 52 productos cada hora.
¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?
Solución:
a) Si x, y, z el número de botellas, garrafas y bidones que se producen cada hora.
Por el enunciado se sabe:
$x = 2y \to$ relación entre botellas y garrafas; $x + y + z = 52 \to$ número total producido;
$0,05x + 0,1y + z = 10 \to$ distribución de pesos de polietileno.
Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} x = 2y \\ x + y + z = 52 \\ 0,05x + 0,1y + z = 10 \end{cases} \Rightarrow \text{(sustituyendo } x = 2y\text{)} \Rightarrow \begin{cases} 3y + z = 52 \\ 0,2y + z = 10 \end{cases} \to \text{restando:}$$

$2,8y = 42 \to y = 15$; $x = 30$; $z = 7$.

2. Andalucía, extraordinaria 2021

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $A^2 = -A^{-1}$. **(1.25 puntos)**

b) Dadas las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

calcula la matriz X que verifica $A^4X + B = AC$. **(1.25 puntos)**

Solución:

a) El primer lugar puede verse que A tiene inversa, pues su determinante es distinto de 0. En efecto:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -3\cdot(4-5)+4\cdot(3-4) = 3-4 = -1.$$

Por otra parte, multiplicando $A \cdot A \cdot A$ se tiene:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

Como $A^2 \cdot A = -I \Rightarrow \left(A^2 \cdot A\right) \cdot A^{-1} = -I \cdot A^{-1} \Rightarrow A^2 \cdot \left(A \cdot A^{-1}\right) = -A^{-1} \Rightarrow A^2 = -A^{-1}$.

Luego: $A^{-1} = -A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Como $A^3 = -I \Rightarrow A^4 = -A$.

Por tanto: $A^4X + B = AC \Leftrightarrow -AX + B = AC \Rightarrow AX = B - AC \to$ (multiplicando por A^{-1} por la izquierda) $\Rightarrow X = A^{-1} \cdot (B - AC)$.

Como $AC = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 9 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$B - AC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 9 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Luego:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & -21 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}.$$

3. Aragón, junio 21

5) Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

a) (1,25 puntos) Estudie el rango de la matriz $A-kI$ según los valores de $k\in\mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (0,75 puntos) Calcule la inversa de $A-kI$ para $k=0$.

Solución:

a) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.

La matriz $A-kI=\begin{pmatrix}-k & 0 & -2\\ 1 & 2-k & 1\\ 1 & 0 & 3-k\end{pmatrix}$.

Su determinante,

$$\left|A-kI\right|=\begin{vmatrix}-k & 0 & -2\\ 1 & 2-k & 1\\ 1 & 0 & 3-k\end{vmatrix}=-k\cdot(2-k)(3-k)-2\left(-(2-k)\right) = -k^3+5k^2-8k+4.$$

La expresión polinómica anterior puede descomponerse en factores así:

$$-k^3+5k^2-8k+4=-(k-1)(k-2)^2$$

(Puede verse que $k = 1$ es raíz de $-k^3+5k^2-8k+4=0$; dividiendo por Ruffini se llega a la descomposición indicada).

Con esto:

- Si $k\neq 1$ y 2, como $\left|A-kI\right|\neq 0\Rightarrow$ rango $(A-kI)=3$.
- Si $k=1$, $\left|A-kI\right|=0$ y $A-kI=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$. Como el menor $\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow$ rango

$(A-kI)=2$.

- Si $k=2$, $\left|A-kI\right|=0$ y $A-kI=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Como tiene una columna de ceros y las otras dos están repetidas, entonces rango $(A-kI)=1$.

b) Para $k=0$, $A-kI=A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$, siendo $\left|A\right|=4$.

Su inversa es $A^{-1}=\dfrac{\left(A_{ij}\right)^t}{\left|A\right|}$, donde $\left(A_{ij}\right)^t$ es la traspuesta de la matriz adjunta de A.

La matriz de los adjuntos es: $\left(A_{ij}\right)=\begin{pmatrix}6 & -2 & -2\\ 0 & 2 & 0\\ 4 & -2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\dfrac{\left(A_{ij}\right)^t}{4}=\begin{pmatrix}3/2 & 0 & 1\\ -1/2 & 1/2 & -1/2\\ -1/2 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

(Se recomienda comprobar que $A\cdot A^{-1}=I$).

4. Aragón, ordinaria 21

6)

a) (1 punto) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcule justificadamente $\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix}$.

b) (1 punto) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelva el sistema $\left(A - \frac{1}{2}A^T\right) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$, donde A^T es la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) Se aplicarán las siguientes propiedades de los determinantes:

(1) Si se intercambian entre sí dos filas de un determinante, su valor es el mismo cambiado de signo.

(2) Un determinante no varía si a una fila se le suma o resta otra fila cualquiera, elemento a elemento.

(3) Si los elementos de una fila se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por ese mismo número.

Por tanto:

$$\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix} = \overset{C2-C3}{=} \begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \\ a & b & c \end{vmatrix} = \overset{\text{Por (3)}}{=} 2\cdot(-1)\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = \text{(se}$$

intercambian filas: $F1$ por $F3$ y, después, $F2$ por $F3$) $= -2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2\cdot 5 = -10$.

b) $$A - \frac{1}{2}A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para que el producto $\left(A - \frac{1}{2}A^T\right)\cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ pueda hacerse, la matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Por tanto,

$$\left(A - \frac{1}{2}A^T\right)\cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 9 \\ 2x - y \quad = 5 \end{cases}.$$

Este sistema se resuelve por Gauss.

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 9 \\ 2x - y \quad = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2+E1 \\ E3-E1 \end{matrix}\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + z = 9 \\ x + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-E2 \end{matrix}\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + z = 9 \\ -2x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}.$$

Luego $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. Aragón, ordinaria 21

7) a) (1 punto) Resuelva el siguiente sistema matricial

$$\begin{cases} 2X+3Y=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix} \\ 3X-2Y=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}\end{cases}$$

b) (1 punto) Calcule $\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

Puede resolverse aplicando el método de Gauss (reducción):

En esquema:

$$\begin{cases} 2X+3Y=A \\ 3X-2Y=B\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}2E1+3E2\\ 2E2-3E1\end{matrix}\begin{cases} 13X=2A+3B \\ -13Y=2B-3A\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=\dfrac{1}{13}(2A+3B) \\ Y=-\dfrac{1}{13}(2B-3A)\end{cases}.$$

Esto es:

$$X=\frac{1}{13}\left[2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}5 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}\right] \Rightarrow X=\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}13 & 13\\ 0 & 26\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

$$Y=\frac{1}{13}\cdot\left[2\cdot\begin{pmatrix}5 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}\right] \Rightarrow Y=\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}13 & 0\\ -13 & -13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

b) Si $M=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow M^2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix} \to$

$$M^3=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 0\\ -7 & 1\end{pmatrix}.$$

La conjetura $M^n=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ -2^n+1 & 1\end{pmatrix}$ se cumple cuando n = 1.

También se cumple para el siguiente de n, pues:

$$M^{n+1}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ -2^n+1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1} & 0\\ -2^{n+1}+2-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1} & 0\\ -2^{n+1}+1 & 1\end{pmatrix}.$$

Por tanto, se puede afirmar que $M^n=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ -2^n+1 & 1\end{pmatrix}$.

6. Asturias, ordinaria 2021

Bloque 1.A Un operador turístico vende a las agencias locales viajes concertados al Caribe, Islas Maldivas y Tailandia. A una primera agencia A le vende 10 viajes al Caribe, 10 a las Maldivas y 10 a Tailandia, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 viajes al Caribe y 20 a Tailandia, cobrando por todo ello 13.000 euros. Y a una tercera agencia C le vende 10 viajes al Caribe y 10 a las Maldivas, cobrando por todo ello 7.000 euros. Se pide:

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio del viaje a cada uno de los destinos. Y calcula, si es posible, dicho precio. (1.5 puntos)

b) Si le obligasen a rebajar un 20 % el precio del viaje al Caribe dejando los otros iguales, ¿cuánto dinero perdería? (0.5 puntos)

c) ¿Cuál sería el precio del viaje a las Islas Maldivas necesario para compensar la bajada del 20 % del viaje al Caribe y así recaudar el mismo dinero? (se mantiene el precio del viaje a Tailandia). (0.5 puntos)

Solución:

a) Si *x*, *y*, *z* son los precios de los viajes al Caribe, Islas Maldivas y Tailandia, respectivamente, entonces deben cumplirse las ecuaciones:

$$\begin{cases} 10x+10y+10z=12000 \\ 10x \qquad\quad +20z=13000 \\ 10x+10y \qquad\quad =7000 \end{cases} \to \text{Aplicando el método de Gauss} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \\ \\ E3-E1 \end{matrix}\begin{cases} 10x+10y+10z=12000 \\ 10x \qquad\quad +20z=13000 \\ \qquad\qquad -10z=-5000 \end{cases} \Rightarrow E2+2E3 \begin{cases} 10x+10y+10z=12000 \\ 10x \qquad\qquad =3000 \\ \qquad\qquad -10z=-5000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=300 \\ y=400 \\ z=500 \end{cases}.$$

b) Con los 30 viajes (totales) al Caribe obtiene unos ingresos de 9000 €; si se rebajan un 20 % dejaría de percibir 9000 · 0,2 = 1800 euros.

c) Con los 20 viajes (totales) a las Islas Maldivas ingresa 8000 €; si, para compensar, desea ingresar 1800 más, hasta un total de 9800 €, cada viaje debe costar 9800 : 20 = 490 €.

7. Asturias, ordinaria 2021

Bloque 1.B Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ y $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Escribe el sistema de ecuaciones $AX = X$ en la forma $BX = 0$. (0.5 puntos)

b) Estudia para qué valores de a el sistema tiene infinitas soluciones. (1 punto)

c) Para $a = 0$ calcula, si existe, la inversa de A. (1 punto)

Solución:

a) $AX = X \Leftrightarrow AX - X = O \Leftrightarrow \left(A - I\right)X = O$.

Por tanto, $B = A - I = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow BX = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

El sistema de ecuaciones correspondiente es:

$$\begin{cases} (a-1)x \qquad -z = 0 \\ -x - y \qquad\quad = 0 \\ \qquad y + (a-1)z = 0 \end{cases}.$$

b) Se trata de un sistema homogéneo; por tanto, siempre tiene solución: para cualquier valor de a.

Sus soluciones serán infinitas cuando el rango de la matriz de coeficientes sea menor que 3; o sea, cuando $|B| = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\left(a-1\right)^2 + 1 = 0 \Rightarrow a\left(a-2\right) = 0 \Rightarrow a = 0$ o $a = 2$.

c) Para $a = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como $|A| = 1$ esta matriz tendrá inversa.

Su inversa es $A^{-1} = \dfrac{\left(A_{ij}\right)^t}{|A|}$, donde $\left(A_{ij}\right)^t$ es la traspuesta de la matriz de los adjuntos de A.

Como $\left(A_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(Se recomienda comprobar que $A \cdot A^{-1} = I$).

8. Baleares, ordinaria 2021

1. Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix},$$

(a) Estudia el rang de la matriu A segons els valors de a. (6 punts)

(b) Determina per a quins valors de a la matriu A és invertible. (1 punt)

(c) Per al valor de $a = -1$ calcula la solució, X, de l'equació matricial

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ (3 punts)

Solución:

(a) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo: coincide con el número de filas linealmente independientes.

Su determinante,

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^2\cdot\left(a^4-1\right) - a\cdot\left(a^3-a\right) + a\cdot\left(a-a^3\right) = \text{(descomponiendo en factores)}$$

$$= a^2\cdot\left(a^2-1\right)\left(a^2+1\right) - a^2\cdot\left(a^2-1\right) + a^2\cdot\left(1-a^2\right) = \text{(sacando factor común)}$$

$$= a^2\cdot\left(a^2-1\right)\left[\left(a^2+1\right)-1-1\right] = a^2\cdot\left(a^2-1\right)\left(a^2-1\right).$$

La expresión anterior vale 0 cuando $a = 0, -1$ o 1.

Con esto:

- Si $a \neq 0, -1$ y 1, como $|A| \neq 0 \Rightarrow$ rango $(A) = 3$.
- Si $a = 0$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$ Como el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ rango $(A) = 2$.
- Si $a = -1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$ Como las tres filas son proporcionales $\Rightarrow$ rango $(A) = 1$.
- Si $a = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$ Como las tres filas son iguales $\Rightarrow$ rango $(A) = 1$.

(b) Una matriz es invertible si su determinante es distinto de 0. Por tanto, A tendrá inversa cuando $a \neq 0, -1$ y 1.

(c) Si $a = -1$, $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ -x+y+z=0 \\ -x+y+z=0 \end{cases}.$

Este sistema es homogéneo. Por tanto, siempre tiene solución.

Como el rango de la matriz de coeficientes vale 1, el sistema es equivalente a $\{x-y+z=0$,

cuya solución es: $\begin{cases} x=\lambda+\mu \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases}$.

9. Baleares, ordinaria 2021

2. Sigui la matriu

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcula A^t, A^2 i A^{-1}, on A^t és la matriu transposada i A^{-1} la inversa. (3 punts)

(b) Sigui I la matriu identitat. Resol X de l'equació

$$A^2-2AX+I=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$ (3 punts)

(c) Calcula totes les matrius B per a les quals es té que

$$A\cdot B=B\cdot A^t$$ (4 punts)

Solución:

(a) Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Su inversa es $A^{-1}=\dfrac{\left(A_{ij}\right)^t}{|A|}$, donde $\left(A_{ij}\right)^t$ es la traspuesta de la matriz adjunta de A, siendo

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-2=-1$.

Como $\left(A_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $A^2-2AX+I=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow 2AX=A^2+I-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$2AX=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow 2AX=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow X=\frac{1}{2}\cdot A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow X=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(c) Si se supone que $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, se tendrá que:

$$AB=BA^t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b & 2a+b \\ c+d & 2c+d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

(igualando los elementos de ambas matrices) $\rightarrow \begin{cases} a+c=a+b \rightarrow c=b \\ b+d=2a+b \rightarrow d=2a \\ 2a+c=c+d \rightarrow d=2a \\ 2b+d=2c+d \rightarrow c=b \end{cases}$.

Por lo tanto $B=\begin{pmatrix} a & b \\ b & 2a \end{pmatrix}$, siendo a y b parámetros.

10. Canarias, ordinaria 2021

2B. Un granjero compra un determinado mes 274€ de pienso para su ganado. Con ese dinero obtiene un total de 66 sacos de pienso de tres marcas diferentes: A, B y C. Se sabe que el precio de cada marca de pienso que ha comprado es de 5€, 4€ y 4€, respectivamente. También se sabe que el número de sacos adquiridos de la marca C es el doble que el total de sacos comprados de las marcas A y B juntos. Averiguar la cantidad de sacos que el granjero ha comprado de cada una de las tres marcas. 2.5 ptos

Solución:
Si se compran x sacos de la marca A, y de la marca B y z de la marca C, entonces, con los datos del enunciado deben cumplirse las siguientes ecuaciones:
→ Sacos comprados: $x+y+z=66$.
→ Dinero pagado en función del precio por saco: $5x+4y+4z=274$.
→ Relación entre el número de sacos de cada marca: $z=2(x+y)$.

Queda el siguiente sistema, que resolveré por Gauss:

$$\begin{cases} x+y+z=66 \\ 5x+4y+4z=274 \\ 2x+2y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-5E1 \\ E3-2E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=66 \\ -y-z=-56 \\ -3z=-132 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+12+44=66 \rightarrow x=10 \\ -y-44=-56 \rightarrow y=12 \\ z=44 \uparrow \end{cases}.$$

El granjero ha comprado 10 sacos de la marca A, 12 de la marca B y 44 de la marca C.

11. Canarias, extraordinaria 2021

2A. Se consideran las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix}$

a) Sea la matriz $M=A+c\cdot B$, donde c es un número real cualquiera. Calcular los valores de c de forma que el rango $(M)=1$ 1 pto

b) Sea la matriz $D=A^2+B\cdot A$. Averiguar la matriz X que cumple la siguiente ecuación matricial: $D\cdot X=-30\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$ 1.5 pto

Solución:

a) $M=A+c\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow M=\begin{pmatrix}1+c & -1\\ 4+4c & 2-c\end{pmatrix}$.

El rango (M) = 1 cuando $|M|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1+c & -1\\ 4+4c & 2-c\end{vmatrix}=0\Rightarrow(1+c)\cdot(2-c)+(4+4c)=0\Rightarrow$

$$c^2-5c-6=0\Rightarrow c=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2}=\begin{cases}6\\ -1\end{cases}.$$

Si $c=6$, $M=\begin{pmatrix}7 & -1\\ 28 & -4\end{pmatrix}$ $\to$ es evidente de las dos filas son proporcionales $\Rightarrow$ rango (M) = 1.

Si $c=-1$, $M=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ $\to$ solo tiene una columna no nula $\Rightarrow$ rango (M) = 1.

b) $D=A^2+B\cdot A\Leftrightarrow D=(A+B)\cdot A\Rightarrow D=\left[\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$D=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 8 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 12 & -6\end{pmatrix}.$$

Como $|D|=12+48=60\neq 0$, la matriz D es invertible. Su inversa es $D^{-1}=\frac{1}{|D|}\cdot(D_{ij})^t$, donde $(D_{ij})^t$ es la traspuesta de la matriz de los adjuntos de D.

Como $(D_{ij})=\begin{pmatrix}-6 & -12\\ 4 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow D^{-1}=\frac{1}{60}\cdot\begin{pmatrix}-6 & 4\\ -12 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -6 & -1\end{pmatrix}$.

La ecuación matricial $D\cdot X=-30\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\Leftrightarrow X=D^{-1}\cdot\left[-30\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\right]\Rightarrow$

$$X=\frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -6 & -1\end{pmatrix}\cdot\left[-30\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\right]\Rightarrow$$

$$X=-\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -6 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-6 & -1 & -1\\ -12 & -7 & -22\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}6 & 1 & 1\\ 12 & 7 & 22\end{pmatrix}$$

12. Cantabria, ordinaria 2021

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera el vector $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v \in \mathbb{R}^2$, y la matriz de rotación $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

1) [0.5 PUNTOS] Comprueba para $\theta = \frac{\pi}{2}$ que $R(\theta) \cdot v$ rota el vector v un ángulo θ en sentido antihorario.

2) [0.5 PUNTOS] Comprueba para $\theta = \frac{\pi}{2}$ que $R^2(\theta) \cdot v$ rota el vector v un ángulo 2θ en sentido antihorario.

3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que la matriz $R(\theta)$ es invertible para cualquier valor de θ.

4) [1 PUNTO] Calcula la matriz inversa de $R(\theta)$ y comprueba que $R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$.

Solución:

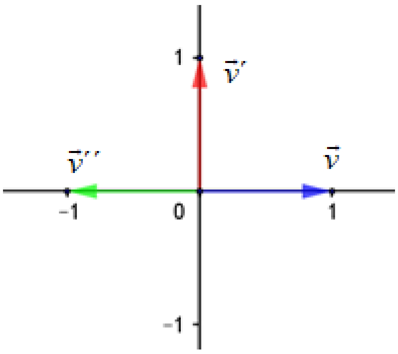
Para resolver este problema hay que conocer las siguientes igualdades trigonométricas:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\ \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha;\ \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha .$$

También hay que saber que sin α = –sin(–α) y cos α = cos(–α).

1) El producto $R(\theta) \cdot v = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$.

Si $\theta = \frac{\pi}{2} \to R\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot v = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Por tanto, el vector $\vec{v}$ = (1, 0) se transforma en $\vec{v}'$ = (0, 1): es un giro de θ = 90º.

2) $R^2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$R^2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & -2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

Luego, $R^2(\theta) \cdot v = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) \\ \sin(2\theta) \end{pmatrix}$

Si $\theta = \frac{\pi}{2} \to R^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot v = \begin{pmatrix} \cos(\pi) \\ \sin(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Por tanto, el vector $\vec{v}$ = (1, 0) se transforma en $\vec{v}''$ = (–1, 0): es un giro de 2θ = 180º.

3) Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de 0.

Como $|R(\theta)| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ para cualquier ángulo θ, se deduce que la matriz $R(\theta)$ es invertible.

4) Su inversa es $R^{-1}(\theta) = \dfrac{\left(R(\theta)_{ij}\right)^t}{|R(\theta)|}$, $\left(R(\theta)_{ij}\right)^t$ es la traspuesta de la adjunta de $R(\theta)$.

La matriz de los adjuntos es:

$$\left(R(\theta)_{ij}\right)=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix} \Rightarrow R^{-1}(\theta)=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

Como $R(-\theta)=\begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & +\sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$.

Efectivamente, se cumple que $R^{-1}(\theta)=R(-\theta)$.

13. Cantabria, ordinaria 2021

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases}\lambda x - y &= 1\\ 4x-\lambda y &= 2\lambda-2\end{cases}$ dependiente del parámetro λ.

1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.

2) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λ si es necesario.

3) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de λ el sistema no tiene solución.

Solución:

1) El sistema $\begin{cases}\lambda x-y=1\\ 4x-\lambda y=2\lambda-2\end{cases}$ tendrá infinitas soluciones cuando el rango de la matriz de coeficientes (*A*) y el rango de la matriz ampliada (*M*) sean iguales y valgan 1.

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & -1\\ 4 & -\lambda\end{pmatrix};\ M=\left(\begin{array}{cc|c}\lambda & -1 & 1\\ 4 & -\lambda & 2\lambda-2\end{array}\right).$$

Rango de (*A*) = 1 si $|A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 4 & -\lambda\end{vmatrix}=4-\lambda^2=0$ si $\lambda = \pm 2$.

- Si $\lambda=-2$, $M=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ 4 & 2 & -6\end{pmatrix}$, cuyo rango es 2, pues el menor $\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -6\end{vmatrix}\neq 0$. En este caso el sistema no tiene solución.
- Si $\lambda=2$, $M=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 2\end{pmatrix}$, cuyo rango es 1, pues el menor sus dos filas son proporcionales.

Por tanto, si $\lambda = 2$ e sistema tiene infinitas soluciones.

En este caso, el sistema es: $\begin{cases}2x-y=1\\ 4x-2y=2\end{cases} \Leftrightarrow \{2x-y=1$.

Su solución es: $\begin{cases}x=t\\ y=-1+2t\end{cases}$.

2) El sistema tiene solución única siempre que $\lambda \neq \pm 2$: en este caso, las matrices *A* y *M* tiene rango 2.

Su solución, aplicando la regla de Cramer será:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2\lambda- & -\lambda\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 4 & -\lambda\end{vmatrix}}=\frac{\lambda-2}{4-\lambda^2}=-\frac{1}{2+\lambda};\ y=\frac{\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 4 & 2\lambda-2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 4 & -\lambda\end{vmatrix}}=\frac{2\lambda^2-2\lambda-4}{4-\lambda^2}=-\frac{2\lambda+2}{2+\lambda}.$$

3) El sistema no tiene solución cuando $\lambda = -2$, pues rango (A) < rango (M).
Nota: Puede verse que para $\lambda = -2$ la solución dada en 2) no tiene sentido.

14. Castilla La Mancha, extraordinaria 2021

1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\quad \text{e}\quad I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX+3I=A$.

Solución:

a) Una matriz es invertible si su determinante no vale 0.

En este caso, $|A|=\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=-3-1+2=-2$. Por tanto, la matriz A tendrá inversa.

Su inversa es $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(A_{ij}\right)^t$, donde $\left(A_{ij}\right)^t$ es la traspuesta de la matriz adjunta de A.

Como $\left(A_{ij}\right)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -3\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & 3 & -1\\ 1 & -3 & -1\end{pmatrix}$.

Se comprueba que

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & 3 & -1\\ 1 & -3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) $AX+3I=A \Rightarrow AX=A-3I \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}(A-3I) \Rightarrow X=I-3A^{-1}$.

Por tanto,

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\frac{3}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & 3 & -1\\ 1 & -3 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}-1/2 & 3/2 & 3/2\\ -3/2 & 11/2 & -3/2\\ 3/2 & -9/2 & -1/2\end{pmatrix}.$$

15. Castilla La Mancha, extraordinaria 2021

2. a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x & +ay & +z & = & 2 \\ x & & +z & = & a \\ ax & +2y & +z & = & 3 \end{cases}.$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Solución:

a) Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada,

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & a \\ a & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) = M.$$

Si r(A) = r(M) = 3 $\to$ sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 $\to$ sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) $\to$ sistema incompatible: no tiene solución.

El determinante de A vale,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - a(1-a) + 2 = a(a-1) \to \text{se anula si } a = 0 \text{ o } 1.$$

Con esto:

- Si $a \neq 0$ y 1, r(A) = r(M) = 3 $\to$ sistema compatible determinado.

- Si $a = 0$,

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) = M \to \text{como el menor } |M_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \text{ r}(A) = 2 < \text{r}(M) = 3.$$

En este caso, el sistema es incompatible.

- Si $a = 1$,

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) = M \to \text{puede observarse que } C4 = C2 + C3\text{; luego r}(A) = \text{r}(M) = 2.$$

En este caso, el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $a = 2$, el sistema es compatible determinado: $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x \quad\quad + z = 2 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases}$.

Se resuelve fácilmente aplicando el método de Gauss:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x \quad\quad + z = 2 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} E1 - E2 \\ \\ E3 - E1 \end{matrix} \begin{cases} 2y = 0 \\ x \quad + z = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}.$$

16. Castilla–León, ordinaria 2021

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determinar los valores de n para los que la matriz A^2 tiene inversa. **(1 punto)**

b) Para $n = 2$, hallar la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. **(1 punto)**

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n-1)^2 & 0 \\ n-2 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz A^2 tiene inversa cuando su determinante es distinto de 0:

$$\left|A^2\right| = \begin{vmatrix} (n-1)^2 & 0 \\ n-2 & 1 \end{vmatrix} = (n-1)^2 \to \text{Es invertible siempre que } n \neq 1.$$

b) La ecuación matricial $AX + A = 2I \Leftrightarrow AX = 2I - A$.

Como para $n = 2$ la matriz A tiene inversa, pues $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, con $|A| = -1$, entonces:

$$AX = 2I - A \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}(2I - A) \Rightarrow X = 2A^{-1} - I.$$

La matriz inversa $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$, donde $(A_{ij})^t$ es la traspuesta de la matriz adjunta de A.

Como $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Luego $X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

17. Castilla–León, extraordinaria 2021

E1 .- (Álgebra)

a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-\lambda y=1 \\ 2x+\lambda z=1 \end{cases}$$ **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo para λ=1. **(0,8 puntos)**

Solución:

a) Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada,

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \lambda & 1 \end{array}\right)=M.$$

Si r(A) = r(M) = 3 → sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 → sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) → sistema incompatible: no tiene solución.

El determinante de A vale,

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=-\lambda^2-\lambda+2\lambda=\lambda(1-\lambda)$$ → se anula si λ = 0 o 1.

Con esto:

- Si λ ≠ 0 y 1, r(A) = r(M) = 3 → sistema compatible determinado.
- Si λ = 0,

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=M \to$$ → como el menor $|M_1|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow$

⇒ r(A) = 2, r(M) =3. En este caso, el sistema es incompatible.

- Si λ = 1,

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)=M$$ → puede verse que $C4=C1-C3$ ⇒ r(A) = r(M) = 2.

En este caso, el sistema es compatible indeterminado.

b) Si λ = 1 el sistema es compatible indeterminado. Queda: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=1 \\ 2x+z=1 \end{cases}$.

Se observa que la tercera ecuación es la suma de las dos primeas: $E3=E1+E2$.

Por tanto, el sistema es equivalente a $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} E1+E2 \\ E2-E1 \end{array}\begin{cases} 2x+z=1 \\ -2y-z=1 \end{cases} \to$

Despejando x e y en función de z y haciendo $z = t$, se tiene la solución: $\begin{cases} x=1/2-t/2 \\ y=-1/2-t/2 \\ z=t \end{cases}$.

18. Cataluña, ordinaria 2021

5. ***a***) Dada la matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}$, donde $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad.

[1,25 puntos]

b) Una matriz cuadrada $\boldsymbol{M}$ satisface que $\boldsymbol{M}^3-3\boldsymbol{M}^2+3\boldsymbol{M}-\boldsymbol{I}=0$, donde $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad. Justifique que $\boldsymbol{M}$ es invertible y exprese la inversa de $\boldsymbol{M}$ en función de las matrices $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{I}$.

[1,25 puntos]

Solución:

Si $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Como $\left|A^2\right|=1 \Rightarrow$ existe su inversa, $\left(A^2\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^2$.

La ecuación matricial

$$A^2X=A-3I \Leftrightarrow \left(A^2\right)^{-1}\left(A^2X\right)=\left(A^2\right)^{-1}\left(A-3I\right) \Rightarrow X=\left(A^2\right)^{-1}\left(A-3I\right).$$

La matriz $A^{-1}=\dfrac{\left(A_{ij}\right)^t}{|A|}$, donde $\left(A_{ij}\right)^t$ es la traspuesta de la matriz adjunta de A.

Como $\left(A_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$ (Puede observarse que $A^{-1}=A^2$).

Luego, $\left(A^2\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Por tanto:

$$X=\left(A^2\right)^{-1}\left(A-3I\right) \Rightarrow X=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right] \Rightarrow$$

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Si $M^3-3M^2+3M-I=O \Rightarrow M^3-3M^2+3M=I \Rightarrow M\left(M^2-3M+3I\right)=I$.

Como $\left|M\left(M^2-3M+3I\right)\right|=|I| \Rightarrow |M|\left|\left(M^2-3M+3I\right)\right|=1 \Rightarrow |M|\neq 0$.

Por lo tanto, la matriz M tiene inversa y es $M^{-1}=M^2-3M+3I$.

19. Cataluña, extraordinaria 2021

5. Sigui la matriu $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Trobeu per a quins valors de a la matriu $\boldsymbol{A}$ és invertible.
[1 punt]

b) Comproveu que, per al cas $a=3$, la matriu $\boldsymbol{A}$ és invertible i resoleu l'equació matricial $\boldsymbol{A\,X}=\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{B}$ és la matriu $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
[1,5 punts]

Solución:
a) La matriz A es invertible cuando su determinante es distinto de 0: $|A|\neq 0$.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix}=a\cdot(a+1)(-a-3)-a\cdot\left(2(-a-3)-(2a+1)(a-1)\right) \Rightarrow$$

$$|A|=a\left(a^2-3a+2\right) \to \text{se anula si } a=0 \text{ o } a=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}2\\1\end{cases}.$$

Por lo tanto, la matriz A es invertible para cualquier valor de $a\neq 0$, 1 y 2.

b) Para $a=3$, $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, siendo $|A|=3\cdot\left(3^2-3\cdot 3+2\right)=6\neq 0$. Luego es invertible.

Su inversa es $A^{-1}=\dfrac{\left(A_{ij}\right)^t}{|A|}$, siendo $\left(A_{ij}\right)=Adj\left(A\right)$.

$$\left(A_{ij}\right)=\begin{pmatrix} -24 & 26 & -28 \\ 18 & -18 & 21 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si $AX=B-3I \Rightarrow A^{-1}\left(AX\right)=A^{-1}\left(B-3I\right)\Rightarrow X=A^{-1}\left(B-3I\right)$.

$$B-3I=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$X=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -30 & -30 & -30 \\ 36 & 36 & 36 \\ -36 & -36 & -36 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 6 & 6 & 6 \\ -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}.$$

20. Comunidad Valenciana, ordinaria 2021

Problema 4. Dada la matriz $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & m\\ 0 & m & 0\\ 2 & 1 & m^2+1\end{bmatrix}$, se pide:

a) Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m. (4 puntos)
b) Explicad cuándo la matriz A es invertible. (2 puntos)
c) Resolved la ecuación $XA=I$ donde I es la matriz identidad en el caso m=1. (4 puntos)

Solución:
a) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo: coincide con el número de filas linealmente independientes.
Su determinante,

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & 2 & m\\ 0 & m & 0\\ 2 & 1 & m^2+1\end{vmatrix}=-m\cdot\left(m^2+1\right)+2\cdot\left(-m^2\right)=-m\cdot\left(m^2+2m+1\right)=-m\cdot(m+1)^2.$$

Este determinante vale 0 cuando m = 0 o −1.
Con esto:

- Si $m\neq 0$, −1, como $|A|\neq 0 \Rightarrow$ rango (A) = 3.
- Si m = 0, $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\to$ Como el menor $\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-5\neq 0\Rightarrow$ rango (A) = 2.
- Si $m=-1$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\to$ También el menor de orden 2, $\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Por lo

tanto, rango (A) = 2.

b) Una matriz es invertible si su determinante es distinto de 0. Por tanto, A tendrá inversa cuando $m\neq 0$ y −1.

c) Para m = 1 la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ tiene inversa: su determinante $|A|=-4$.

Por tanto, la ecuación $XA=I\Rightarrow X=A^{-1}$.

La inversa, $A^{-1}=\dfrac{\left(A_{ij}\right)^t}{|A|}$; donde $\left(A_{ij}\right)=Adj(A)$ es la matriz de los adjuntos.

La matriz de los adjuntos es $\left(A_{ij}\right)=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ -3 & -4 & 5\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=-\dfrac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3 & -1\\ 0 & -4 & 0\\ -2 & 5 & -1\end{pmatrix}$.

Efectivamente, $XA=A^{-1}A=I$:

$$-\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3 & -1\\ 0 & -4 & 0\\ -2 & 5 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

21. Comunidad Valenciana, extraordinaria 2021

Problema 1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x - y + z &= m \\ x + y + 3z &= 0 \\ 5x - 4y + m\,z &= m \end{cases}$, donde m es un parámetro real. Se pide:

a) La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m. (4 puntos)
b) La solución del sistema cuando $m = 1$. (3 puntos)
c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

Solución:

a) Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada,

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & m & m \end{array}\right) = M .$$

Si r(A) = r(M) = 3 → sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 → sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) → sistema incompatible: no tiene solución.

El determinante de A vale,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & m \end{vmatrix} = 2(m+12) - (-1)(m-15) - 9 = 3m$$ → se anula si $m = 0$.

Con esto:

- Si $m \neq 0$, r(A) = r(M) = 3 → sistema compatible determinado.
- Si $m = 0$,

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) = M$$ → Resulta un sistema homogéneo, que siempre tiene solución.

En este caso, como el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow$ r(A) = 2 = r(M) =3. el sistema es compatible indeterminado, con un grado de indeterminación.

b) Si $m = 1$ el sistema es compatible indeterminado. Queda: $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + z = 1 \end{cases}$.

Puede resolverse por el método de Gauss.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2 + E1 \\ E3 - 4E1 \end{matrix} \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x + 4z = 1 \\ -3x - 3z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3 - E2 \end{matrix} \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x + 4z = 1 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$E2 - 3E3 \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x = 9 \to x = 3 \Rightarrow \\ z = -2 \uparrow \end{cases} \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}.$$

c) El sistema es compatible indeterminado cuando $m = 0$.

Se obtiene el sistema: $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+y+3z=0 \\ 5x-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3z=0 \\ 5x-4y=0 \end{cases} \to$

$$\begin{cases} 3x+4z=0 \\ x=\dfrac{4}{5}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-\dfrac{3}{4}z \\ x=\dfrac{4}{5}y\uparrow \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-\dfrac{3}{5}y \\ y=y \\ x=\dfrac{4}{5}y \end{cases} \to \text{(haciendo } y=5t\text{)} \to \begin{cases} x=4t \\ y=5t \\ z=-3t \end{cases}.$$

22. Extremadura, ordinaria 2021

2. Discutir y resolver (en los casos que sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$: (2 puntos)

$$\left.\begin{array}{rcrl} x & - & y & =\lambda \\ x & - & \lambda y & =\lambda \\ \lambda x & - & y & =\lambda \end{array}\right\}.$$

Solución:
Se trata de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas.
Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada.

$$A=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \lambda \\ 1 & -\lambda & \lambda \\ \lambda & -1 & \lambda \end{array}\right)=M$$

Si r(A) = r(M) = 2 $\to$ sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 2 $\to$ sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) $\to$ sistema incompatible: no tiene solución

El determinante de M vale:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 1 & -\lambda & \lambda \\ \lambda & -1 & \lambda \end{vmatrix}=-\lambda^2+\lambda+\left(\lambda-\lambda^2\right)+\lambda\left(-1+\lambda^2\right)=\lambda\left(\lambda^2-2\lambda+1\right)=\lambda\left(\lambda-1\right)^2 \to$$

$\to |M|=0$ cuando λ = 0 o 1.

Por tanto:

- Si $\lambda \neq 0$ y 1, como $|M|\neq 0$, el sistema será incompatible pues r(M) = 3.
- Si λ = 0, $A=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)=M$ $\to$ El rango de A es 2, pues $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1\neq 0$; el rango de M

también es 2, pues la columna de términos independientes es nula. El sistema será compatible determinado. Como es homogéneo, su única solución será la trivial: x = 0; y = 0.

Si λ = 1, $A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) = M$ → Si r(*A*) = r(*M*) = 1: las tres filas están repetidas. El sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.

Queda equivalente a $\{x - y = 1$, cuya solución es: $\begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \end{cases}$.

23. Extremadura, extraordinaria 2021

1. Sea la igualdad matricial $M \cdot X = N$, donde $M = \begin{pmatrix} k & 2k & 2 \\ -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) ¿Cuántas filas y columnas debe tener la matriz X? (Justicar la respuesta). (0,5 puntos)
b) ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ es la matriz M invertible? (1 punto)
c) ¿Puede ser $M \cdot N$ invertible para algún valor de $k \in \mathbb{R}$? (0,5 puntos)

Solución:

a) Si $A = (a_{ij})_{n\times m}$ y $B = (b_{ij})_{m\times p}$, su producto $A\cdot B = (c_{ij})_{n\times p} = P \Leftrightarrow A_{n\times m}\cdot B_{m\times p} = P_{n\times p}$.

Esto es, el producto de matrices puede hacerse cuando el número de columnas de la matriz de la izquierda, *A*, es igual al número de filas de la otra matriz, *B*. La matriz producto, *P*, tiene el mismo número de filas que *A* y el mismo número de columnas que *B*.

En este caso, el producto $M_{3\times 3}\cdot X_{p\times q} = N_{3\times 2}$ exige que *p* = 3 y *q* = 2.

b) La matriz *M* es invertible cuando su determinante es distinto de 0: $|M| \neq 0$.

$$|M| = \begin{vmatrix} k & 2k & 2 \\ -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k\cdot(k-1) + 2(-1+k) = (k-1)(k+2) \to \text{se anula si } k = 1 \text{ o } -2.$$

Por lo tanto, la matriz *M* será invertible para cualquier valor de $k \neq 1$ y −2.

c) El producto $M_{3\times 3}\cdot N_{3\times 2} = P_{3\times 2}$. Esta matriz no es invertible, pues no es una matriz cuadrada. Por tanto, no hay ningún valor de *k* que haga que $M_{3\times 3}\cdot N_{3\times 2}$ tenga inversa.

24. Galicia, ordinaria 2021

1. Números y Álgebra:

Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de dimensión 3×3 definida por $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = 2, \\ (-1)^j (i-1) & \text{si} \quad i \neq 2. \end{cases}$ Explique si A y $A + I$ son o no invertibles y calcule las inversas cuando existan. (Nota: a_{ij} es el elemento de A que está en la fila i y en la columna j, e I es la matriz identidad.)

Solución:

El subíndice i indica la fila del elemento a_{ij}; j indica la columna. Por tanto, algunos elementos de la matriz $A = (a_{ij})$ son:

$$a_{11} = (-1)^1 (1-1) = 0\ ;\ a_{12} = (-1)^2 (1-1) = 0 \ldots\ ;\ a_{21} = a_{22} = a_{23} = 1;$$

$$a_{31} = (-1)^1 (3-1) = -2\ ;\ a_{32} = (-1)^2 (3-1) = 2 \ldots$$

Se obtiene $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

La matriz $A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de 0. Por tanto, como $|A| = 0$, la matriz A no es invertible. Sí lo es la matriz $A + I$, pues $|A+I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4$.

La inversa de la matriz $A + I$ es $(A+I)^{-1} = \dfrac{(Adj(A+I))^T}{|A+I|}$, siendo $(Adj(A+I))^T$ la matriz traspuesta de la matriz de los adjuntos de $A + I$.

$$Adj(A+I) = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A+I)^{-1} = \frac{1}{(-4)} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

<u>**25**. Galicia, extraordinaria 2021</u>

1. Números y Álgebra:

Despeje X en la ecuación matricial $B(X-I)=A$, donde I es la matriz identidad y A y B son matrices cuadradas, con B invertible. Luego, calcule X si

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

<u>Solución</u>:

La ecuación $B(X-I)=A \Leftrightarrow BX-B=A \Rightarrow BX=A+B \Rightarrow X=B^{-1}(A+B)$.

La matriz $B^{-1}=\dfrac{(Adj(B))^T}{|B|}$, siendo $Adj(B)=\begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ y $|B|=\dfrac{1}{6}$.

Por lo tanto: $B^{-1}=6\cdot\begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Luego:

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}\right] \Rightarrow$$

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3/2 & 1 \\ -2 & 2 & -5/3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ -6 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

26. La Rioja, ordinaria 2021

5.– (2 puntos) Hallar A y B, matrices soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3A - 5B = C, \\ -A + 3B = D, \end{cases}$$

donde C y D son las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinar la matriz inversa de $C^T D$, donde C^T es la matriz traspuesta de C.

Solución:
Despejamos A y B utilizando el método de reducción.

$$\begin{cases} 3A - 5B = C \\ -A + 3B = D \end{cases} \xRightarrow[3E2+E1]{3E1+5E2} \begin{cases} 4A = 3C + 5D \\ 4B = C + 3D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{4}(3C + 5D) \\ B = \dfrac{1}{4}(C + 3D) \end{cases}.$$

Por tanto:

$$A = \frac{1}{4}\left(3\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 21 & 12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 15 & 0 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 36 & 12 \\ -8 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A = \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 16 & 4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El producto $C^T D = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 6 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$.

Su inversa, $\left(C^T D\right)^{-1} = \dfrac{1}{\left|C^T D\right|} \cdot \left(Adj\left(C^T D\right)\right)^T$, siendo

$$Adj\left(C^T D\right) = \begin{pmatrix} -12 & -2 \\ -6 & 26 \end{pmatrix} \text{ y } \left|C^T D\right| = 26 \cdot (-12) - 12 = -324.$$

Luego, $\left(C^T D\right)^{-1} = \dfrac{1}{(-324)}\begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -2 & 26 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{162}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -13 \end{pmatrix}$.

27. La Rioja, ordinaria 2021

6.– (2 puntos) Sabiendo que $|A| = 1$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

calcular el determinante de la matriz B con

$$B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{pmatrix}.$$

Calcular $|4B^{-1}A^T|^2$.

Solución:

Para calcular el determinante de B se aplicarán las siguientes propiedades:

(1) El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta: $|A| = |A^T|$.

(2) Si se intercambian entre sí dos filas de un determinante, su valor es el mismo cambiado de signo.

(3) Un determinante no varía si a una fila se le suma o resta, elemento a elemento, otra fila cualquiera multiplicada por un número.

(4) Si los elementos de una fila se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por ese mismo número.

(5) Si $A = (a_{ij})_{n\times n}$, entonces: $|kA| = k^n|A|$.

(6) Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden: $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$.

Como $|A\cdot A^{-1}| = |A|\cdot|A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = |A|^{-1}$

Por tanto:

$$|B| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ F2-F1 \\ F3-2F1 \end{matrix}\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix}$$ $\to$ (se extrae 2 de $F3$ y se intercambian $F2$ y $F3$) $\Rightarrow$ $|B| = -2\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2|A| = -2$.

Para calcular $|4B^{-1}A^T|^2$ se aplican las propiedades (1), (5) y (6).

Por (1): $|A^T| = |A| = 1$; por (6): $|B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|} = -\dfrac{1}{2}$.

Por (5), como $(B^{-1}A^T)$ es de orden 3, $|4B^{-1}A^T| = 4^3|B^{-1}A^T| = 4^3|B^{-1}|\cdot|A^T| = 64\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cdot 1 = -32$.

Luego $|4B^{-1}A^T|^2 = (-32)^2 = 1024$.

28. La Rioja, extraordinaria 2021

6.– (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} y A^{20}, utilizando necesariamente la siguiente identidad $A^3 = -I$, donde I es la matriz identidad.

Solución:

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ se tiene:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I .$$

Por tanto:

$$-A^3 = A \cdot \left(-A^2\right) = I \Rightarrow A^{-1} = -A^2 \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{20} = A^{18} \cdot A^2 = \left(A^3\right)^6 \cdot A^2 = (-I)^6 \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 \Rightarrow A^{20} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

29. Madrid, ordinaria 2021

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A,B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

Solución:

Si el valor de la acción de la empresa B es 1 € → la accción A vale 3 € (el triple que B) → la acción C vale 6 € (el doble que A: "A vale la mitad que C").

Sean *x*, *y*, *z* el número de acciones de las empresas A, B y C, respectivamente.
Con los datos del enunciado se obtiene:

$x+y+z=540$ → número total de acciones;

$3x+y+6z=1560$ → valor total de las acciones;

$z=\frac{1}{2}y$ → el número de acciones de C es la mitad que el de B.

Se obtiene el sistema: $\left\{\begin{array}{r} x+y+z=540 \\ 3x+y+6z=1560 \\ y-2z=0 \end{array}\right.$.

Aplicando el método de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=540 \\ 3x+y+6z=1560 \\ y-2z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{r} E1-E3 \\ E2-E3 \\ \end{array}\left\{\begin{array}{r} x+3z=540 \\ 3x+8z=1560 \\ y-2z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{r} \\ E2-3E1 \\ \end{array}\left\{\begin{array}{r} x+3z=540 \\ -z=-60 \\ y-2z=0 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{r} x=360 \\ y=120 \\ z=60 \end{array}\right..$$

Por tanto, a cada uno de los hermanos le corresponderán la tercera parte de las acciones de cada empresa. Esto es: 120 acciones de la empresa A, 40 de la B y 20 de la C.

30. Madrid, ordinaria 2021

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} ax-2y+(a-1)z=4 \\ -2x+3y-6z=2 \\ -ax+y-6z=6 \end{array}\right\}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema según los diferentes valores de a.

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para $a=1$.

Solución:

a) Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & a-1 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -a & 1 & -6 & 6 \end{array}\right)=M$$

Si rango de A = rango de M = 3 → sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 → sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) > r(M) → sistema incompatible: no tiene solución

El determinante de A vale

$$|A|=3a^2-29a+26.$$

Se anula si a = 1 o a = 26/3 (soluciones de la ecuación de 2º grado asociada).
Con esto:

- Si $a \neq 1$ y 26/3 ⇒ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.

- Si a = 1, se tendrá:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & -6 \end{pmatrix}; \quad M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

Puede verse que en ambos casos la tercera fila es la suma de las dos primeras.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ y $|A|=0$ ⇒ r(A) = 2 = r(M). Por tanto, el sistema será compatible indeterminado.

- Si a = 26/3, se tendrá:

$$A=\begin{pmatrix} 26/3 & -2 & 23/3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -26/3 & 1 & -6 \end{pmatrix}; \quad M=\begin{pmatrix} 26/3 & -2 & 23/3 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -26/3 & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 26/3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=22\neq 0$ y $|A|=0$ ⇒ r(A) = 2.

Pero, como el menor $M_1=\begin{vmatrix} 26/3 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ -26/3 & 1 & 6 \end{vmatrix}=\dfrac{736}{3}\neq 0$ ⇒ $r(M)$ = 3.

En este caso, el sistema será incompatible.

b) Para a = 1 el sistema es compatible indeterminado. Resulta equivalente a:

$$\begin{cases} x-2y=4 \\ -2x+3y-6z=2 \\ -x+y-6z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=4 \\ -x+y-6z=6 \end{cases} \underset{E2+E1}{\Rightarrow} \begin{cases} x=4+2y \\ -y-6z=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-16-12z \\ y=-10-6z \\ z=z \end{cases}.$$

Haciendo $z=t$ se obtiene la solución: $\begin{cases} x=-16-12t \\ y=-10-6t \\ z=t \end{cases}$.

31. Madrid, extraordinaria 2021

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tres amigas, Sara, Cristina y Jimena, tienen un total de 15000 seguidores en una red social. Si Jimena perdiera el 25% de sus seguidores todavía tendría el triple de seguidores que Sara. Además, la mitad de los seguidores de Sara más la quinta parte de los de Cristina suponen la cuarta parte de los seguidores de Jimena. Calcule cuántos seguidores tiene cada una de las tres amigas.

Solución:
Sean x, y, z el número de seguidores de Sara, Cristina y Jimena, respectivamente.
Con los datos del enunciado se obtiene:

$x+y+z=15000$ $\to$ número total de seguidoes;

$0,75z=3x$ $\to$ 0,75 = 1 – 0,25, lo que queda despésde perder el 25 %.

$\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=\frac{z}{4}$ $\to$ la mitad de los seguidors de Sara más…

Se obtiene el sistema: $\begin{cases} x+y+z=15000 \\ z=4x \\ 10x+4y-5z=0 \end{cases}$.

Sustituyendo y resolviendo por reducción (Gauss):

$$\begin{cases} 5x+y=15000 \\ -10x+4y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+y=15000 \\ -5x+2y=0 \end{cases} \underset{E2+E1}{\Rightarrow} \begin{cases} 5x+y=15000 \\ 3y=15000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2000 \\ y=5000 \end{cases} \Rightarrow z = 8000.$$

Por tanto, Sara tiene 2000 seguidores, Cristina, 5000, y Jimena, 8000.

32. Madrid, extraordinaria 2021

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (0.75 puntos) Encuentre un único sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x e y, que tenga como soluciones $\{x = 1, y = 2\}$ y $\{x = 0, y = 0\}$.

b) (1 punto) Encuentre un sistema de dos ecuaciones lineales en las variables x, y y z cuyas soluciones sean, en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 2 \\ z = \lambda - 1 \end{cases}$$

c) (0.75 puntos) Encuentre un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, x e y, que solo tenga como solución a $x = 1$ e $y = 2$.

Solución:

a) Sea $ax + by = c$ una de esas ecuaciones.

Si $\{x = 1, y = 2\}$ es solución, entonces $a + 2b = c$;

Si $\{x = 0, y = 0\}$ es solución, entonces $0 = c$.

Luego, $a + 2b = 0 \Rightarrow a = -2b$.

La ecuación será $-2bx + by = 0$.

Si $b = 1$, $-2x + y = 0$; si b = −2, $4x - 2y = 0$.

Puede darse el sistema (compatible indeterminado) $\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$.

Su solución son los puntos del plano que pertenecen a la recta $y = 2x$.

b) El sistema se obtiene eliminando λ, sustituyendo $x = \lambda$ en las otras dos ecuaciones paramétricas. Así se obtiene:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda - 2 \\ z = \lambda - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ z = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \quad = 2 \\ x \quad - z = 1 \end{cases}.$$

c) Cada ecuación será de la forma Sea $ax + by = c$. Dando valores arbitrarios a a y b debe encontrase el valor de c que se obtiene si $x = 1$ e $y = 2$.

Puede ser: $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 3y = -5 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$.

Es evidente que todas las ecuaciones se cumplen si $x = 1$ e $y = 2$. Para ver que solo tiene esa solución hay que comprobar que el sistema es compatible determinado. Para ello, el rango de a matriz de coeficientes (A) debe ser igual al rango de la matriz ampliada (M) e igual a 2.

Así es, pues $A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & 5 \end{array}\right) = M$ se transforma en $A = \begin{array}{c} \\ \\ F3-2F1+F2 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = M$.

Como el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow$ rango (A) = rango (M) = 2.

33. Murcia, ordinaria 2021

2: Considere las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&2&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\2&1\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix}-2&0&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

a) **[1,5 p.]** Compruebe que la matriz A es regular (o inversible) y calcule su inversa.

b) **[1 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AX-B=C^t$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C.

Solución:

a) Una matriz es regular cuando su determinante es distinto de 0.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&2&2\end{vmatrix}=2-1=1.$$

La inversa de la matriz A es $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot(Adj(A))^t$, siendo $(Adj(A))^t$ la traspuesta de la matriz de los adjuntos de A.

Como:

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$ $\to$ (Puede verse que $A\cdot A^{-1}=I$).

b) $AX-B=C^t \Rightarrow AX=C^t+B\Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}\cdot\left(C^t+B\right)\Rightarrow X=A^{-1}\cdot\left(C^t+B\right)$.

Como

$$C^t+B=\begin{pmatrix}-2&1\\0&-1\\-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&-2\\1&2\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1\\0&-2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&0\\0&-2\\2&3\end{pmatrix}.$$

34. Murcia, extraordinaria 2021

2: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Si se denota por $\mathrm{tr}(A)$ la traza de la matriz A (es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal) y por $|A|$ el determinante de A, compruebe que, para cualquier valor de a, se cumple la ecuación $A^2 = \mathrm{tr}(A)A - |A|I$, donde I denota la matriz identidad de orden 2.

b) **[0,5 p.]** Determine para qué valores de a la matriz A es regular (o inversible).

c) **[1 p.]** Para $a = -3$, resuelva la ecuación matricial $AX - A' = A$, donde A' denota la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, entonces:

$$tr(A) = 2 + 2 = 4 \Rightarrow tr(A)\cdot A = 4\cdot\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4a \\ -4 & 8 \end{pmatrix};$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & 4a \\ -4 & -a+4 \end{pmatrix};$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4+a;\ |A|\cdot I = (4+a)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+a & 0 \\ 0 & 4+a \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $tr(A)\cdot A - |A|\cdot I = \begin{pmatrix} 8 & 4a \\ -4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4+a & 0 \\ 0 & 4+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-a & 4a \\ -4 & 4-a \end{pmatrix}$.

Efectivamente, se cumple que $A^2 = tr(A)\cdot A - |A|\cdot I$.

b) Una matriz es regular cuando su determinante es distinto de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4+a \neq 0 \Rightarrow a \neq -4.$$

c) Para $a = -3$, la matriz A tiene inversa: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4-3 = 1$.

Luego,

$$AX - A^t = A \Rightarrow AX = A + A^t \Rightarrow A^{-1}\cdot(AX) = A^{-1}\cdot\left(A + A^t\right) \Rightarrow X = A^{-1}\cdot\left(A + A^t\right).$$

La inversa, $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot\left(Adj(A)\right)^t$, siendo $\left(Adj(A)\right)^t$ la traspuesta de la matriz de los adjuntos de A.

Como: $Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ (Puede verse que $A\cdot A^{-1} = I$).

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\right] \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

35. Navarra, ordinaria 2021

P2) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A^3| = 8$, siendo A la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2-t & t^2+2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

Solución:

Para simplificar los cálculos pueden hacerse transformaciones de Gauss en la matriz *A*. (Estas transformaciones no cambian el valor del determinante de *A*).

$$A = \begin{pmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2-t & t^2+2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A = \overset{F1+F2}{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t^2-t & t^2+2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{pmatrix} \to A = C2-C1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t^2-t & 3t & t \\ 1-t & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t^2-t & 3t & t \\ 1-t & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2\left(t^2-t\right) - 3t\left(1-t\right) = t^2 - t\,.$$

Como $\left|A^3\right| = \left(|A|\right)^3$, si $\left|A^3\right| = 8 \Rightarrow |A| = 2$.

Luego, debe cumplirse que $t^2 - t = 2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}.$

36. Navarra, extraordinaria 2021

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} ax+(a-2)y=a-2 \\ ax+(a^2-2a)y+2z=a \\ 3ax+(a^2-4)y+z=4a-4 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2.5 puntos)

Solución:
Para aligerar los cálculos conviene simplificar el sistema inicial aplicando transformaciones de Gauss:

$$\begin{cases} ax+(a-2)y \quad =a-2 \\ ax+(a^2-2a)y+2z=a \\ 3ax+(a^2-4)y+z=4a-4 \end{cases} \to \begin{matrix} E2-E1 \\ E3-3E1 \end{matrix} \begin{cases} ax+(a-2)y \quad =a-2 \\ (a^2-3a+2)y+2z=2 \\ (a^2-3a+2)y+z=a+2 \end{cases} \to$$

$$\to E2-E3 \begin{cases} ax+(a-2)y \quad =a-2 \\ z=-a \\ (a^2-3a+2)y+z=a+2 \end{cases}.$$

Con esto, sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} a & a-2 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & a^2-3a+2 & 1 & a+2 \end{array}\right)=M.$$

Por el teorema de Rouché:
Si r(A) = r(M) = 3 $\to$ sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 $\to$ sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) $\to$ sistema incompatible: no tiene solución
El determinante de A es:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a^2-3a+2 & 1 \end{vmatrix}=a\cdot(a^2-3a+2)=a(a-1)(a-2).$$

$\to$ Se anula si $a = 0$, $a = 1$ o $a = 2$.
Por tanto:

- Si $a \neq 0$, 1 y 2, como $|A| \neq 0$, el sistema será compatible determinado: r(A) = r(M) = 3.
- Si $a = 0$, $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)=M$.

El rango de A es 2, pues $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-2$.
El rango de M también es 2, pues $C2 = C4$.
Por tanto, si $a = 0$, el sistema será compatible indeterminado.

- Si a = 1: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)=M$.

El rango de M es 3, pues $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-4$.

Por tanto, si a = 2, el sistema será incompatible.

- Si a = 2, $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)=M$.

Vuelve a ser incompatible, pues $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=10$: rango ($A$) = 2 < rango ($M$) = 3.

→ Solución cuando es compatible: $a \neq 0$, 1 y 2.

El sistema es: $\left\{\begin{array}{l} ax+(a-2)y = a-2 \\ z=-a \\ (a^2-3a+2)y+z=a+2 \end{array}\right.$.

Despejando y sustituyendo:

$$z=-a \Rightarrow (a^2-3a+2)y-a=a+2 \Rightarrow y=\frac{2a+2}{a^2-3a+2}=\frac{2a+2}{(a-1)(a-2)};$$

$$ax+(a-2)\frac{2a+2}{(a-1)(a-2)}=a-2 \Rightarrow ax=a-2-\frac{2a+2}{(a-1)} \Rightarrow ax=\frac{a^2-5a}{a-1} \Rightarrow x=\frac{a-5}{a-1}.$$

→ Solución cuando es compatible indeterminado: a = 0.

El sistema queda:

$$\left\{\begin{array}{r} -2y=-2 \\ z=0 \\ 2y+z=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=1 \\ z=0 \end{array}\right..$$

37. País Vasco, ordinaria 2021

Ejercicio A1

Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x - y + z = 1, \\ 3x - y + \alpha z = \alpha, \\ x + (\alpha - 1)z = 1. \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha = 3$, si es posible.

Solución:

Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & \alpha & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha-1 & 1 \end{array}\right) = M.$$

Por el teorema de Rouché:

Si r(A) = r(M) = 3 $\to$ sistema compatible determinado: solución única.

Si r(A) = r(M) < 3 $\to$ sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.

Si r(A) < r(M) $\to$ sistema incompatible: no tiene solución

El determinante de A:

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 3 & -1 & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix} = \alpha(1-\alpha) + (3\alpha - 3 - \alpha) + 1 = -(\alpha-1)(\alpha-2).$$

$\to$ Se anula si $\alpha = 1$ o $\alpha = 2$.

Por tanto:

- Si $\alpha \neq 1$ y 2, como $|A| \neq 0$, el sistema será compatible determinado: r(A) = r(M) = 3.
- Si $\alpha = 1$, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = M$.

El rango de A es 2, pues $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$; pero el rango de M es 3, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$.

Por tanto, si $\alpha = 1$, el sistema será incompatible.

- Si $\alpha = 2$, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = M$.

El rango de A es 2, como también es 2 el rango de M: $C4 = C3$.

Por tanto, si $\alpha = 2$, el sistema será compatible indeterminado.

$\to$ Para $\alpha = 3$ es sisterma es compatible determinado:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 3x - y + 3z = 3 \\ x \quad\; + 2z = 1 \end{cases} \to \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

Puede resolverse por la regla de Cramer.

La solución será:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}}=\frac{-2+3+1}{-2}=-1;\ y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}}=\frac{9-3}{-2}=-3;\ z=\frac{\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}}=\frac{-3+1}{-2}=1.$$