# PROBLEMAS DE PROBABILIDAD PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE EvAU–EBAU–PEBAU… DE 2020

En las páginas que siguen están resueltos todos los problemas propuestos en la *Selectividad* de 2020 (en las convocatorias de junio y septiembre).
En cuatro distritos universitarios (Andalucía, Cataluña, Comunidad Valenciana y Navarra) no se propusieron problemas de este bloque.

**1.** Aragón, junio 2020

**9)** Según estadísticas del Instituto Nacional de Estadística, la probabilidad de que un varón esté en paro es del 12%, mientras que la de que una mujer lo esté es del 16%. Además, la probabilidad de ser varón es del 64% y la de ser mujer del 36%.

**a)** (*0,75 puntos*) Hemos conectado por redes sociales con una persona ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer y esté en paro?

**b)** (*0,75 puntos*) Si se elige una persona al azar ¿cuál es la probabilidad de que esté en paro?

**c)** (*0,5 puntos*) Hemos conectado por redes sociales con una persona que nos ha confesado estar en paro ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

**Nota informativa**: las estadísticas anteriores (y los experimentos) están realizados con personas en disposición de trabajar.

Solución:
Sean *H*, *M* y *P* los sucesos ser hombre, mujer o estar en paro, respectivamente.
Se sabe que:

$$p(H)=0,64\,;\; p(M)=0,36\,;\; p\left(P/H\right)=0,12\,;\; p\left(P/M\right)=0,16\,.$$

Con esto:

a) La probabilidad de que sea mujer y esté en paro será:

$$p\left(M\cap P\right)=p(M)\cdot p\left(P/M\right)=0,36\cdot 0,16=0,0576\,.$$

b) La probabilidad de que una persona esté en paro es:

$$p\left(P\right)=p(H)\cdot p\left(P/H\right)+p(M)\cdot p\left(P/M\right)=0,64\cdot 0,12+=,36\cdot 0,16=0,1344.$$

c) La probabilidad de que sea mujer si está en paro será:

$$p\left(M/P\right)=\frac{p(M)\cdot p\left(P/M\right)}{p\left(P\right)}=\frac{0,36\cdot 0,16}{0,1344}=\frac{576}{1344}\approx 0,43\,.$$

## 2. Aragón, ordinaria 2020

**10)** De los estudiantes universitarios españoles, uno de cada 5 abandona sus estudios. Se seleccionan 5 estudiantes universitarios españoles al azar, de modo independiente

**a)** (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que uno o ninguno de dichos estudiantes abandonen sus estudios? (No es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando y desarrollando los números y operaciones básicas que la definen, pero sin hacer los cálculos finales).

**b)** (1 punto) ¿Qué es más probable, que todos abandonen sus estudios, o que ninguno lo haga? Razone la respuesta de modo numérico.

Solución:
La variable aleatoria $X$ que mide el número de estudiantes que abandonan sus estudios es una binomial $B(5,\ 0,2)$, pues $n = 5$ y $p=\frac{1}{5}=0,2 \to q = 1 - p = 0,8$.

Con esto:

a) La probabilidad de que de 5 estudiantes abandonen 1 o ninguno es:

$$P(X=0)+P(X=1)=\binom{5}{0}\cdot 0,2^0\cdot 0,8^5+\binom{5}{1}\cdot 0,2^1\cdot 0,8^4=$$
$$=1\cdot 1\cdot 0,32768+5\cdot 0,2\cdot 0,4096=0,73728.$$

b) La probabilidad de que todos (5 de 5) abandonen sus estudios es:

$$P(X=5)=\binom{5}{5}\cdot 0,2^5=1\cdot 0,00032=0,00032.$$

La probabilidad de que ninguno abandone los estudios es:

$$P(X=0)=\binom{5}{0}\cdot 0,2^0\cdot 0,8^5=1\cdot 0,32768=0,32768.$$

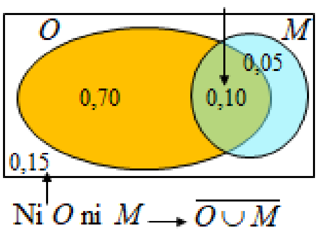
Es más probable que ninguno abandone los estudios.

## 3. Aragón, extraordinaria 2020

**9)** En el mes de abril de 2020 se realizó una encuesta a los estudiantes de segundo de bachiller de un centro acerca de los dispositivos con los que seguían las clases online. El 80% disponía de ordenador, el 15% disponía de móvil y el 10% disponía de ambos dispositivos. Nos hemos encontrado por casualidad en la calle con un estudiante de este centro.
**a)** (*1,25 puntos*) Halle la probabilidad de que el estudiante dispusiese de alguno de los dos dispositivos (o ambos).
**b)** (*0,75 puntos*) Halle la probabilidad de que el estudiante no dispusiese de ninguno de los dispositivos mencionados.

Solución:
Sean $O$ y $M$ los sucesos disponer de ordenador y móvil, respectivamente.
Se sabe que:

$$P(O)=0,80;\ P(M)=0,15;\ P(O\cap M)=0,10.$$




a) Es la probabilidad de la unión de sucesos:

$$P(O\cup M)=P(O)+P(M)-P(O\cap M)=$$
$$=0,80+0,15-0,10=0,85.$$

b) Es el suceso contrario de la unión.

$$P\left(\overline{O\cup M}\right)=1-P(O\cup M)=1-0,85=0,15.$$

**4**. Aragón, extraordinaria 2020

**10)** (*2 puntos*) Un estudiante universitario de matemáticas ha comprobado que el tiempo que le cuesta llegar desde su casa a la universidad sigue una distribución normal de media 30 minutos y desviación típica 5 minutos.

a) (*0,75 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde menos de 40 minutos en llegar a la universidad?

b) (*0,75 puntos*) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde entre 20 y 40 minutos?

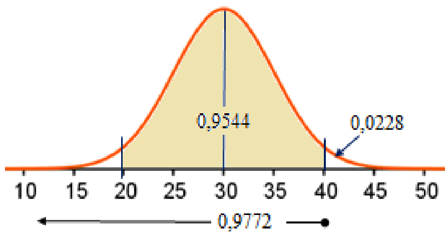
c) (*0,5 puntos*) El estudiante, un día al salir de su casa, comprueba que faltan exactamente 40 minutos para que empiece la clase ¿Cuál es la probabilidad de que llegue tarde a clase?

Solución:

El tiempo que tarda en llegar a la universidad se distribuye según la normal $N(30,\ 5)$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-30}{5}$.

Con esto:




a) $P(X<40) = P\left(Z < \dfrac{40-30}{5}\right) = P(Z<2) = 0.9772$.

b) $P(20<X<40) = P(X<40) - P(X<20) =$

$$= P\left(Z<\frac{40-30}{5}\right) - P\left(Z<\frac{20-30}{5}\right) = P(Z<2) - P(Z<-2) =$$

$$= P(Z<2) - (1-P(Z<2)) = 0,9772 - 1 + 0,9772 = 0,9544.$$

c) $P(X>40) = 1 - P(X<40) = 1 - 0,9972 = 0,0228$.

**5**. Asturias, ordinaria 2020

**Bloque 4.A** En un espacio muestral se tienen dos sucesos: $A$ y $B$. Se conocen las siguientes probabilidades:

$P(A\cap B) = 0.3$, $P(A/B) = P(B/A)$ y $P(\overline{A}) = 0.2$ ( $\overline{A}$ suceso contrario). Calcula:

**a)** $P(B/A)$. (1 punto)

**b)** $P(B)$. (1 punto)

**c)** ¿Son los sucesos independientes? (0.5 puntos)

Solución:

Si $P(\overline{A}) = 0,2 \Rightarrow P(A) = 1-0,2 = 0,8$.

a) Por la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,8} = \frac{3}{8}.$$

b) Por $P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(A/B)} = \dfrac{0,3}{3/8} = 0,8$.

c) Dos sucesos $A$ y $B$ son independientes cuando $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$.

Como $P(A)\cdot P(B) = 0,8\cdot 0,8 = 0,64$ es distinto de $P(A\cap B) = 0,3$, los sucesos no son independientes.

**6**. Asturias, ordinaria 2020

**Bloque 4.B** Los 5 defensas, 3 medios y 2 delanteros de un equipo de fútbol se entrenan lanzando penaltis a su portero. Los defensas marcan gol la mitad de las veces, los medios las 2/3 partes de las veces y los delanteros las 3/4 partes de las veces.

a) Se elige un jugador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que meta el penalti? (1.25 puntos)

b) Se supone que la probabilidad del apartado anterior es del 60 %. El equipo realiza en una semana 600 lanzamientos. En cada lanzamiento se elige un jugador al azar y regresa al grupo pudiendo ser elegido nuevamente. Calcula la probabilidad de que como mucho se metan 400 goles aproximando la distribución por una normal. (1.25 puntos)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(3.25) = 0.9994, F(3.2917) = 0.9995, F(3.3333) = 0.9996, F(3.375) = 0.9996, F(3.4167) = 0.9997$)

Solución:

a) Se denota por $A$, $B$ y $C$ los sucesos ser defensa, medio y delantero, respectivamente. Marcar gol se designa por $G$.

Se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(A)=\frac{5}{10} \to P(G/A)=\frac{1}{2};\ P(B)=\frac{3}{10} \to P(G/B)=\frac{2}{3};\ P(C)=\frac{2}{10} \to P(G/C)=\frac{3}{4}.$$

Por la probabilidad total:

$$P(G)=P(A)\cdot P(G/A)+P(B)\cdot P(G/B)+P(C)\cdot P(G/C) \Rightarrow$$

$$P(G)=\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{5}=0,6.$$

b) La distribución que mide el número de goles metidos es una binomial:

$B(600,\ 0,60) \to n = 600$, $p = 0,6$, $q = 0.4$.

La binomial $B(n, p)$ se puede aproximar mediante la normal de media $\mu = np$ y desviación típica $\sigma=\sqrt{npq}$, siempre que $np \geq 5$ y $nq \geq 5$. Así se cumple en este caso.

Luego, $B(600,\ 0,60) \approx N\left(600\cdot 0,6,\ \sqrt{600\cdot 0,6\cdot 0,4}\right) \to N(360,\ 12)$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z=\frac{X-360}{12}$.

Con esto:

$$P(X<400)=P\left(Z<\frac{400-360}{12}\right)=P(Z<3,33)=0.9996.$$

Nota: Si se exige la corrección de continuidad habría que escribir,

$$P(X<400)=P(X'<400,5)P\left(Z<\frac{400,5-360}{12}\right)=P(Z<3,375)=0.9996.$$

7. Asturias, extraordinaria 2020

**Bloque 4.A** En un curso de un instituto hay tres clases: la clase A con 50 alumnos, la clase B con 30 y la clase C con 20. Cada clase tiene un profesor distinto de matemáticas. Con el profesor de la clase A aprueban el 40 % de los alumnos, con el de la clase B el 50 % y con el de la clase C el 75 % de los alumnos. Se coge al azar un alumno del curso. Calcula:

a) La probabilidad de que el alumno haya aprobado matemáticas. (1.25 puntos)

b) Sabiendo que ha aprobado, cuál es la probabilidad de que sea de la clase B. (1.25 puntos)

Solución:
a) Se denota por *A*, *B* y *C* los sucesos ser alumnos de las clases A, B y C, respectivamente. Aprobar Matemáticas se designa por *M*.
Se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(A)=\frac{50}{100}=0,5 \to P(M/A)=0,40; \; P(B)=\frac{30}{100}=0,3 \to P(M/B)=0,50;$$

$$P(C)=\frac{20}{100}=0,2 \to P(M/C)=0,75.$$

Por la probabilidad total:

$$P(M)=P(A)\cdot P(M/A)+P(B)\cdot P(M/B)+P(C)\cdot P(M/C) \Rightarrow$$

$$P(M)=0,5\cdot 0,40+0,3\cdot 0,50+0,2\cdot 0,75=0,5.$$

b) Por Bayes:

$$P(B/M)=\frac{P(B\cap M)}{P(M)}=\frac{0,3\cdot 0,50}{0,5}=0,3.$$

**8**. Asturias, extraordinaria 2020

**Bloque 4.B** En una pumarada la producción en kilogramos de cada manzano sigue una distribución normal de media $\mu = 50$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

a) La proporción de árboles que dan entre 30 y 60 kilogramos. (1.25 puntos)

b) El número de kilogramos por árbol a los que no llegan o igualan el 60 % de los árboles. (1.25 puntos)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(2) = 0.9772$, $F(1) = 0.8413$, $F(1.5) = 0.9332$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.2533) = 0.6$, $F(0.5244) = 0.7$, $F(0.8416) = 0.8$)

Solución:

La normal será $N(50,\ 10)$. Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-50}{10}$.

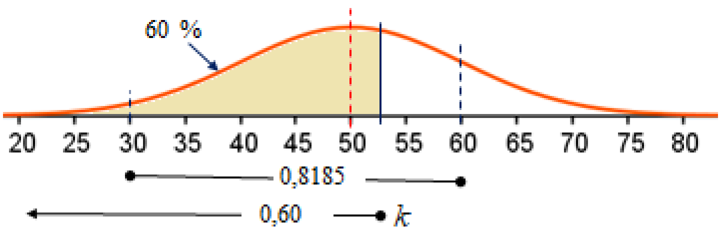
a) En este caso:

$$P(30 \leq X \leq 60) = P(X \leq 60) - P(X \leq 30) = P\left(Z < \frac{60-50}{10}\right) - P\left(Z < \frac{30-50}{10}\right) =$$

$$= P(Z < 1) - P(Z < -2) = 0{,}8413 - (1 - 0{,}9772) = 0{,}8185.$$

b) Hay que encontrar los kilos, *k*, tal que $P(X \leq k) = 0{,}60$.

Luego: $P\left(Z < \dfrac{k-50}{10}\right) = 0{,}60 \Rightarrow \dfrac{k-50}{10} = 0{,}2533 \Rightarrow k = 0{,}2533 \cdot 10 + 50 = 52{,}53$.



**9**. Baleares, ordinaria 2020, opción A

4. El nombre d'hores de vida d'un cert bacteri (tipus A) es distribueix segons una normal de mitjana 110 hores i desviació típica de 0,75 hores. Calcula la probabilitat que, escollint a l'atzar un bacteri:

   (a) el seu nombre d'hores de vida sobrepassi les 112,25 hores. (4 punts)

   (b) el seu nombre d'hores de vida sigui inferior a 109,25 hores. (4 punts)

   D'un altre bacteri (tipus B) se sap que el nombre d'hores de vida es distribueix segons una normal de mitjana 110 hores, però es desconeix la seva desviació típica. Experimentalment s'ha comprovat que la probabilitat que un bacteri tipus B visqui més de 125 hores és 0,1587. Calcula la desviació típica de la distribució del nombre d'hores de vida dels bacteris tipus B. (2 punts)

Solución:

La normal será $N(110,\ 0{,}75)$, en horas. Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-110}{0{,}75}$.

Por tanto, aplicando la $N(0, 1)$ se obtiene:

(a) $P(X > 112{,}25) = P\left(Z > \dfrac{112{,}25-110}{0{,}75}\right) = P(Z > 0{,}3) = 1 - P(Z < 3) =$

$= 1 - 0{,}9987 = 0{,}0013.$

(b) $P(X < 109{,}25) = P\left(Z < \dfrac{109{,}25-110}{0{,}75}\right) = P(Z < -1) = 1 - P(Z < 1) =$

$= 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587.$

→ Para las bacterias de tipo B, la normal es $N(110,\ \sigma)$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-110}{\sigma}$.

Como se sabe que $P(X > 125) = 0{,}1587 \Rightarrow$

$$P(X > 125) = P\left(Z > \frac{125-110}{\sigma}\right) = 0{,}1587 \Rightarrow \frac{125-110}{\sigma} = 1 \Rightarrow \sigma = 15.$$

**10**. Baleares, ordinaria 2020, opción B

4. Una empresa de fabricació d'impressores té dos centres de producció, la fàbrica europea (E) i la fàbrica asiàtica (A). L'1 % de les impressores de la fàbrica E i el 3% de les impressores de la fàbrica A es produeixen amb un defecte. El mercat d'un determinat país s'abasteix d'impressores procedents de la fàbrica E en un 80%, mentre que la resta prové de la fàbrica A.

   (a) Quina és la probabilitat que una impressora d'aquest país tingui el defecte?(4 punts)

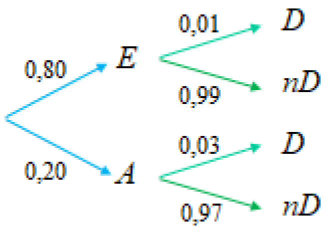
   (b) Si el país té, aproximadament, dos milions d'impressores fabricades per aquesta empresa, quantes tindran el defecte? (2 punts)

   (c) Si s'escull a l'atzar una impressora d'aquest país i resulta ser una impressora defectuosa, quina és la probabilitat que provingui de la fàbrica E? (4 punts)

Solución:

Con los datos del problema se puede hacer el diagrama de árbol adjunto.

*D* indica el suceso “impresora defectuosa”;
*nD*, no defectuosa.
Con esto:




a) $P(D) = P(E) \cdot P(D/E) + P(A) \cdot P(D/A) \Rightarrow$

$P(D) = 0{,}80 \cdot 0{,}01 + 0{,}0 \cdot 0{,}03 = 0{,}014$.

b) Si se fabrican 2000000 de impresoras, el número cabe esperar de impresoras defectuosas será:
N = 2000000 · 0,014 = 28000.

c) Por Bayes:

$P(E/D) = \dfrac{P(E \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}80 \cdot 0{,}01}{0{,}014} = \dfrac{0{,}008}{0{,}014} \approx 0{,}57$ $\rightarrow$ el 57 %, aproximadamente, de las impresoras defectuosas provienen de Europas.

**11**. <u>Baleares, extraordinaria 2020</u>

4. Tenim tres urnes, la primera conté 2 bolles blaves; la segona, 1 bolla blava i 1 de vermella; la tercera, 2 bolles vermelles. Fem l’experiment aleatori

“Triam una urna a l’atzar i extraiem una bolla”

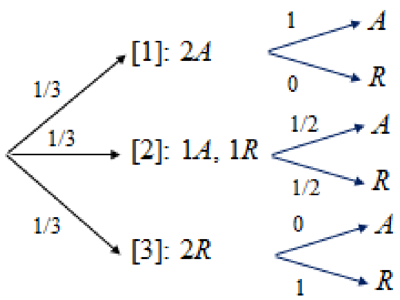
Suposa que totes les urnes tenen la mateixa probabilitat de ser escollides.

(a) Calcula la probabilitat del succés R = “bolla extreta vermella” (5 punts).

(b) Si la bolla extreta resulta que és vermella, quina és la probabilitat que l’urna escollida hagi estat la tercera? (5 punts).

<u>Solución</u>:
Sea *A* el suceso “bola azul” y *R* el suceso “bola roja”.
La composición de las urnas es:
Urna [1]: {2 *A*};
Urna [2]: {1 *A*, 1 *R*};
Urna [3]: {2 *R*}.

Puede confeccionarse el diagrama de árbol adjunto.




Con esto:

$P(R) = P([1]) \cdot P(R/[1]) + P([2]) \cdot P(R/[2]) + P([3]) \cdot P(R/[3]) \Rightarrow$

$P(R) = \dfrac{1}{3} \cdot 0 + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$.

b) Por Bayes: $P([3]/R) = \dfrac{P([3] \cap R)}{P(\%)} = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$.

**12**. Baleares, extraordinaria 2020

4. El pes d'un grup de persones segueix una distribució normal de mitjana 54,3 kg i desviació típica de 6,5 kg.

   (a) Quin és el percentatge de persones amb pes superior a 57 kg? (3 punts)

   (b) Quin percentatge de persones pesen entre 50 i 57 kg? (4 punts)

   (c) Si s'escull una persona a l'atzar que està dins del 70% de les persones que menys pesen, com a màxim, quants quilos hauria de pesar? (3 punts)

Solución:

Se trata de una normal $N(54{,}3,\ 6{,}5)$. Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X - 54{,}3}{6{,}5}$.

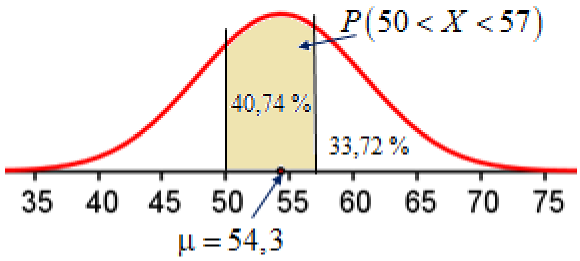
Por tanto, aplicando la $N(0, 1)$ se obtiene:

(a) $P(X > 57) = P\left(Z > \dfrac{57 - 54{,}3}{6{,}5}\right) \approx P(Z > 0{,}42) = 1 - P(Z < 0{,}42) =$

$= 1 - 0{,}6628 = 0{,}3372 \rightarrow$ Aproximadamente, el 33,72 % de las personas de ese grupo supera los 57 kg.

(b) $P(50 < X < 57) = P(X < 57) - P(X < 50) = P\left(Z < \dfrac{57 - 54{,}3}{6{,}5}\right) - P\left(Z < \dfrac{50 - 54{,}3}{6{,}5}\right) =$

$P(Z < 0{,}42) - P(Z < -0{,}66) = 0{,}6620 - (1 - 0{,}7454) = 0{,}4074 \rightarrow$ 40,74 %




(c) Hay que encontrar los kilos, $k$, tal que $P(X \le k) = 0{,}70$.

Luego: $P\left(Z < \dfrac{k - 54{,}3}{6{,}5}\right) = 0{,}70 \Rightarrow \dfrac{k - 54{,}3}{6{,}5} = 0{,}525 \Rightarrow k = 0{,}525 \cdot 6{,}5 + 54{,}3 = 57{,}7125$ kg.

Como máximo pesará 57,7 kg, aproximadamente.

Nota: El valor de $Z$ = 0,525 se obtiene "mediando" entre 0,52 y 0,53.

**13**. Cantabria, ordinaria 2020

**Ejercicio 4** [2.5 PUNTOS]

Un determinado test rápido para anticuerpos de COVID-19 consigue detectar concentraciones iguales o superiores a 10 U, en donde U son unidades de concentración de anticuerpos. De esta forma, concentraciones iguales o superiores a 10 U dan un resultado positivo, mientras que concentraciones inferiores a 10 U dan un resultado negativo en el test. Suponemos que la concentración de anticuerpos sigue una distribución normal con media 20 U y desviación típica 5 U y que todas las personas que han pasado la enfermedad han desarrollado anticuerpos.

**1)** [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que una persona que ha pasado la enfermedad de negativo en el test.

**2)** [1.25 PUNTOS] Calcula qué concentraciones debería detectar el test para que la probabilidad calculada en el apartado anterior fuese del 1%.

Solución:

Se trata de una normal $N(20,\ 5)$. Se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-20}{5}$.

Por tanto, aplicando la $N(0, 1)$ se obtiene:

1) El test da negativo cuando $X < 10$.

$$P(X<10)=P\left(Z<\frac{10-20}{5}\right)=P(Z<-2) = 1-P(Z<2) = 1-0{,}9772 = 0{,}0228 \to$$

supone un 2,28 %.

2) Un porcentaje del 1 % se corresponde con una probabilidad de 0,01.

Hay que encontrar el valor $v$, tal que $P(X\le v)=0{,}01$.

Luego:

$$P\left(Z<\frac{v-20}{5}\right)=0{,}01 \Rightarrow \frac{v-20}{5}=-2{,}33 \Rightarrow v=-2{,}33\cdot 5+20=8{,}35 \text{ U.}$$

**14**. Cantabria, ordinaria 2020

**Ejercicio 8** [2.5 PUNTOS]

En un concurso de televisión el premio consiste en lanzar de forma independiente un dado cúbico y una moneda (suponemos que ambos son perfectos). Por cada punto obtenido con el dado sumamos 100 € (si sacamos un 1 ganamos 100 €, si sacamos un 2 ganamos 200 €, etc.) y si en la moneda sale "Cara" sumamos 300 € adicionales.

**1)** [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de ganar exactamente 400 €.

**2)** [0.5 PUNTOS] Calcula la probabilidad de ganar 400 € si sabemos que ha salido "Cara" en la moneda.

**3)** [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de que haya salido "Cara" sabiendo que hemos ganado 400 €.

Solución:

El espacio muestral es:

$E$ = {(1, $C$), (1, $X$), (2, $C$), (2, $X$), (3, $C$), (3, $X$), (4, $C$), (4, $X$), (5, $C$), (5, $X$), (6, $C$), (6, $X$)}.

Los premios correspondientes, en el mismo orden que los sucesos de $E$, son:

Premios: 400; 100; 500; 200; 600; 300; 700; 400; 800; 500; 900; 600.

1) Se ganan 400 € si se obtienen los sucesos (1, $C$) o (4, $X$).

Luego:

$$P(400\ €)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.$$

2) De los 6 sucesos con cara, hay 1 en el que se ganan los 400 €. Por tanto:

$$P\left(400\ € / C\right)=\frac{1}{6}.$$

3) Si se han ganado 400 €, se ha dado alguno de los sucesos (1, *C*) o (4, *X*). Por tanto:

$$P\left(C / 400\ €\right)=\frac{1}{2}.$$

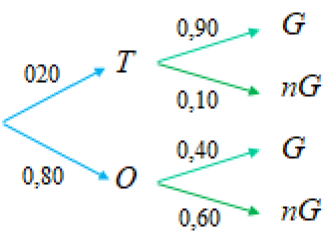
**15**. Cantabria, extraordinaria 2020

**Ejercicio 4** [2.5 PUNTOS]
Un tenista juega el 20% de sus partidos en tierra batida y el resto en otras superficies. Jugando en tierra batida gana el 90% de sus partidos, pero en otras superficies, solo consigue ganar el 40% de los partidos.

**1)** [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que gane un partido concreto, sin que sepamos en qué superficie juega.

**2)** [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que haya jugado un partido concreto en tierra batida sabiendo que ha ganado dicho partido.

Solución:
Con los datos del problema se puede confeccionar el diagrama de árbol adjunto.
*T* indica el suceso "tierra batida";
*O*, "otras superficies;
*G* el suceso "ganar"; *nG*, su contrario.




Con esto:

a) $P(G)=P(T)\cdot P(G/T)+P(O)\cdot P(G/O) \Rightarrow$
$$P(G)=0,20\cdot 0,90+0,80\cdot 0,40=0,50.$$

b) Por Bayes:
$$P(T/G)=\frac{P(T\cap G)}{P(G)}=\frac{0,20\cdot 0,90}{0,50}=\frac{18}{50}=0,36.$$

**16**. Cantabria, extraordinaria 2020

**Ejercicio 8** [2.5 PUNTOS]

En la Unión Europea hay aproximadamente 250 millones de hombres adultos, de los cuales 12 millones miden más de 190cm. En Holanda hay aproximadamente 7 millones de hombres adultos, cuya altura sigue una distribución normal con media 184 cm y desviación típica 7 cm.

Supongamos que elegimos un hombre adulto al azar de toda la Unión Europea.

**1)** [0.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que mida más de 190 cm.

**2)** [0.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que sea holandés.

**3)** [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de que mida más de 190 cm sabiendo que es holandés.

**4)** [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de que sea holandés sabiendo que mide más de 190 cm.

Solución:

1) De 250 millones de hombres adultos hay 12 millones que miden más de 190 cm, luego:

$$P(\text{Medir más de 190 cm}) = \frac{12}{250} = 0,048.$$

2) De 250 millones de hombres adultos en la UE, 7 millones son holandeses, luego:

$$P(\text{holandes}) = \frac{7}{250} = 0,028.$$

3) La altura de los adultos holandeses se distribuye según la normal $N(184, 7)$, que se tipifica haciendo el cambio $Z = \frac{X-184}{7}$.

Por tanto,

$$P(X > 190) = P\left(Z > \frac{190-184}{7}\right) \approx P(Z > 0,86) = 1 - P(Z < 0,86) = 1 - 0,8051 = 0,1949.$$

4) Si se designa por $H$ el suceso ser holandés, y por $M$, el suceso medir más de 190 cm, entonces, por Bayes

$$P(H/M) = \frac{P(H \cap M)}{P(M)} = \frac{P(H) \cdot P(M/H)}{P(M)} = \frac{\frac{7}{250} \cdot 0,1949}{0,048} \approx 0,1137.$$

**17**. Castilla y León, ordinaria 2020

**E9.- (Probabilidad y estadística)**

El peso de los alumnos de 2º de bachillerato de un instituto de León, sigue una distribución normal, de media 75 kg y de desviación típica 5. Si se elige al azar un alumno, calcular la probabilidad de que:

**a)** Tenga un peso entre 70 y 80 kg. **(1 punto)**

**b)** Tenga un peso superior a 85 kg. **(1 punto)**

Solución:

Se trata de una distribución normal $N(75, 5)$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-75}{5}$.

a) $P(70 < X < 80) = P\left(\frac{70-75}{5} < Z < \frac{80-75}{5}\right) = P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1)$

$= P(Z < 1) - (1 - P(Z < 1)) = 0{,}8413 - 1 + 0{,}8413 = 0{,}6826$.

b) $P(X > 85) = P\left(Z > \frac{85-75}{5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$.

**18**. Castilla y León, ordinaria 2020

**E10.- (Probabilidad y estadística)**

La probabilidad de que a un puerto llegue un barco de tonelaje bajo, medio o alto es 0,6, 0,3 y 0,1, respectivamente. La probabilidad de que necesite mantenimiento en el puerto es 0,25 para los barcos de bajo tonelaje, 0,4 para los de tonelaje medio y 0,6 para los de tonelaje alto.

**a)** Si llega un barco a puerto, calcule la probabilidad de que necesite mantenimiento. **(1 punto)**

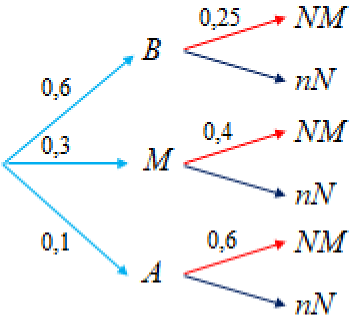
**b)** Si un barco ha necesitado mantenimiento, calcule la probabilidad de que sea de tonelaje medio. **(1 punto)**

Solución:

Los sucesos *B*, *M* **y** *A* indican barco de tonelaje bajo, medio o alto, respectivamente.

Con *NM* se designa el suceso "necesita mantenimiento"; *nN*, su contrario.

En el diagrama adjunto se indican las probabilidades de cada suceso.




a) La probabilidad de que un barco necesite mantenimiento será:

$$P(NM) = P(B) \cdot P(NM/B) + P(M) \cdot P(NM/M) + P(A) \cdot P(NM/A) =$$

$= 0{,}6 \cdot 0{,}25 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}33$.

b) Por la probabilidad condicionada:

$$P(M/NM) = \frac{P(M) \cdot P(NM/M)}{P(NM)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}4}{0{,}33} = \frac{12}{33} = 0{,}3636...$$

**19**. Castilla y León, extraordinaria 2020

**E9.- (Probabilidad y estadística)**

El consumo de azúcar en un determinado país, calculado en Kg (kilogramos) por persona y año, varía según una distribución normal de media 15 y desviación típica 5.

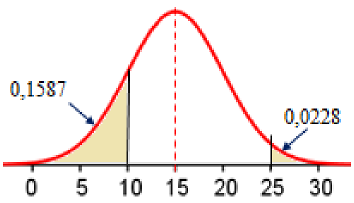
**a)** ¿Qué porcentaje de personas de ese país consumen menos de 10 Kg de azúcar al año? **(1 punto)**

**b)** ¿Cuál es el porcentaje de personas del país cuyo consumo anual de azúcar es superior a 25 Kg? **(1 punto)**

Solución:

Se trata de una distribución normal $N(15, 5)$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 15}{5}$.




a) $P(X < 10) = P\left(Z < \frac{10-15}{5}\right) = P(Z < -1) = 1 - P(Z < 1) =$

$= 1 – 0,8413 = 0,1587$.

b) $P(X > 25) = P\left(Z > \frac{25-15}{5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$.

Aproximadamente, un 2,28 % de personas consume más de 25 kg de azúcar al año.

20. Castilla y León, extraordinaria 2020

**E10.- (Probabilidad y estadística)**

Los estudiantes, que comienzan los estudios de Medicina, en el conjunto formado por las comunidades autónomas de Andalucía, Baleares y Castilla y León, se distribuyen de la siguiente forma: un 50% de Andalucía, un 15% de Baleares y un 35% provienen de Castilla y León. Los porcentajes de dichos estudiantes que no consiguen el título de Médico son los siguientes: 15% de Andalucía, 10% de Baleares y 5% de Castilla y León

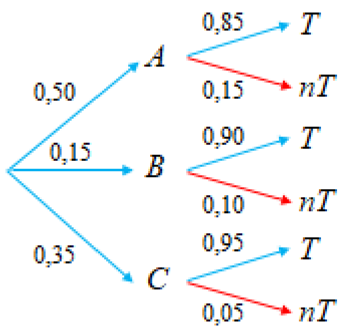
**a)** Calcular la probabilidad de que uno de dichos estudiantes, elegido al azar, no consiga el título de Licenciado en Medicina. **(1 punto)**

**b)** Si un alumno no consigue el título de Licenciado en Medicina, ¿es más probable que provenga de Andalucía o de Castilla y León? **(1 punto)**

Solución:

Sean los sucesos: *A*, estudiante de Andalucía; B, estudiante balear; y *C*, estudiante de Castilla y León.
Con *T* se designa el suceso “conseguir el título de médico”; *nT*, indica que el estudiante no consigue dicho título.

En el diagrama adjunto se indican las probabilidades de cada suceso.




a) La probabilidad de que uno de esos estudiantes elegido l azar no consiga el título de medicina será:

$$P(nT) = P(A)\cdot P(nT/A) + P(B)\cdot P(nT/B) + P(C)\cdot P(nT/C) =$$

$$= 0{,}50 \cdot 0{,}15 + 0{,}15 \cdot 0{,}10 + 0{,}35 \cdot 0{,}05 = 0{,}1075.$$

b) Por la probabilidad condicionada:

$$P(A/nT) = \frac{P(A)\cdot P(nT/A)}{P(nT)} = \frac{0{,}50\cdot 0{,}15}{0{,}1075} = \frac{750}{1075} \approx 0{,}70\,;$$

$$P(C/nT) = \frac{P(C)\cdot P(nT/C)}{P(nT)} = \frac{0{,}35\cdot 0{,}05}{0{,}1075} = \frac{175}{1075} \approx 0{,}16\,.$$

Es más probable (0,70 frente a 0,16), que el alumno que no consigue el título provenga de Andalucía.

## 21. Castilla–La Mancha, ordinaria 2020

8. *a*) En un servicio de emergencias el 60 % de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30 % con el naranja y el 10 % con el rojo. Se sabe que el porcentaje de avisos recibidos que son falsas alarmas es 3 % en el caso de código amarillo, 2 % en el naranja y 1 % en el rojo. Si se recibe un aviso,

a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?

a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el aviso recibido no ha sido falsa alarma, ¿qué probabilidad hay de que haya sido un aviso código rojo o naranja?

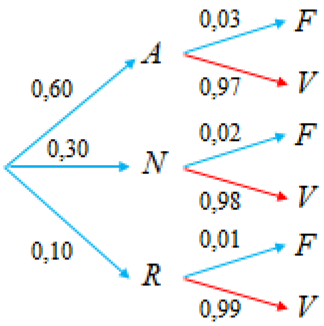
*b*) Si en una centralita se reciben 9 avisos,

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que la centralita reciba 2 o menos avisos naranjas?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que todos los avisos sean amarillos o naranjas?

Solución:

a) La situación se resume en el diagrama de árbol adjunto. Las letras *A*, *N* y *R* indican avisos clasificados con código amarillo, naranja y rojo, respectivamente. Con *F* y *V* se designa falsa o verdadera alarma, también respectivamente.




a1) La probabilidad de que se trate de una falsa alarma será:

$$P(F)=P(A)\cdot P(F/A)+P(N)\cdot P(F/N)+P(R)\cdot P(F/R)$$

$= 0,6 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,1 \cdot 0,01 = 0,025$.

Por tanto, la probabilidad de la alarma sea cierta será:

$P(V)=1-P(F) = 1 - 0,025 = 0,975$.

a2) Si la alarma no es falsa, la probabilidad que fuese un aviso de código rojo o naranja es:

$$P(N \text{ o } R/V)=\frac{P(N \text{ o } R)\cdot P(N \text{ o } R/V)}{P(V)}=\frac{0,3\cdot 0,98+0,1\cdot 0,99}{0,975}=\frac{0,393}{0,975}\approx 0,4031.$$

b1) Sea *X* la variable que mide el número de avisos naranjas; se distribuye como una binomial *B*(9, 0,3).

→ $p$ = 0,30 es la probabilidad de que el aviso sea naranja; $q = 1 - p = 0,7$, la probabilidad de que sea amarillo o rojo.

Con esto:

$$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) =$$

$$=\binom{9}{0}\cdot 0,3^0\cdot 0,7^9+\binom{9}{1}\cdot 0,3^1\cdot 0,7^8+\binom{9}{2}\cdot 0,3^2\cdot 0,7^7=1\cdot 0,7^9+9\cdot 0,3^1\cdot 0,7^8+\frac{9\cdot 8}{2}\cdot 0,3^2\cdot 0,7^7=0,4628.$$

→ Puede recordarse que $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$.

b2) En este caso, la binomial es *B*(9, 0,9).

→ $p$ = 0,90 es la probabilidad de que el aviso sea amarillo o naranja; $q = 1 - p = 0,1$, la probabilidad de que sea rojo.

Luego,

$$P(X=9) = \binom{9}{9}\cdot 0,9^9=0,3874.$$

**22**. Castilla–La Mancha, extraordinaria 2020

8. *a*) El 70 % de los usuarios de instagram tiene menos de 34 años, el 25 % entre 34 y 54 años (ambos incluídos) y el 5 % más de 54 años. Se sabe que acceden a diario a dicha red: el 98 % de los menores de 34 años, el 40 % de los usuarios entre 34 y 54 años (ambos incluídos) y el 10 % de los mayores de 54 años. Si se selecciona un usuario al azar:

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si el usuario seleccionado al azar confiesa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluídos)?

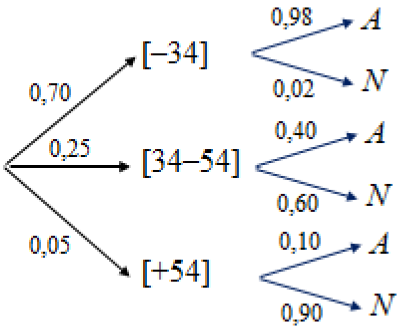
   *b*) El tiempo que un usuario de la red instagram pasa conectado a diario a dicha red social sigue una ley normal de media 53 minutos y desviación típica 10 minutos.

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que un usuario seleccionado al azar se conecte más de 30 minutos al día?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué porcentaje de usuarios (tanto por ciento) se conectan entre 40 y 67 minutos al día?

Solución:

a) La situación se resume en el diagrama de árbol adjunto. Las letras *A* y *N* indican que un usuario accede o no, diariamente, a Instagram.




a1) La probabilidad de que se un usuario elegido al azar no acceda a Instagram será:

$$P(N) = P([-34]) \cdot P(N/[-34]) + P([34-54]) \cdot P(N/[34-54]) + P([+54]) \cdot P(N/[+54])$$

$= 0{,}70 \cdot 0{,}02 + 0{,}25 \cdot 0{,}60 + 0{,}05 \cdot 0{,}90 = 0{,}209.$

Por tanto, la probabilidad de que el elegido acceda a Instagram será:

$P(A) = 1 - P(N) = 1 - 0{,}209 = 0{,}791.$

a2) Si el usuario dice que accede diariamente a Instagram, la probabilidad de que tenga entre 34 y 54 años será:

$$P([34-54]/A) = \frac{P([34-54]) \cdot P(A/[34-54])}{P(A)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}40}{0{,}791} = \frac{100}{791} \approx 0{,}1264.$$

b) La distribución es una normal $N(53, 10)$ → Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-53}{10}$.

b1) $P(X > 30) = P\left(Z > \dfrac{30-53}{10}\right) = P(Z > -2{,}3) = P(Z < 2{,}3) = 0{,}9893.$

b2) $P(40 < X < 67) = P\left(\dfrac{40-53}{10} < Z < \dfrac{67-53}{102}\right) = P(-1{,}3 < Z < 1{,}4) =$

$= P(Z < 1{,}4) - P(Z < -1{,}3) = P(Z < 1{,}4) - (1 - P(Z < 1{,}3)) =$

$= 0{,}9192 - (1 - 0{,}9032) = 0{,}8224.$

El 82,24 % de los usuarios están conectados entre 40 y 67 minutos a Instagram.

**23**. Extremadura, ordinaria 2020

9. Una librería compra lotes de material escolar a tres empresas $A$, $B$ y $C$. A la empresa $A$ le compra el 40 % de los lotes, a $B$ el 25 % y a $C$ el resto. De la empresa $A$ le viene defectuoso el 1 % de los lotes, de $B$ el 2 % y de $C$ el 3 %. Elegido un lote al azar, se pide:

   a) Calcule la probabilidad de que sea defectuoso. (1 punto)

   b) Si sabemos que no es defectuoso, calcule la probabilidad de que lo haya fabricado la empresa $B$. (1 puntos)

Solución:

Se conoce la probabilidad de los siguientes sucesos.

$P(A)=0,40$; $P(B)=0,25$; $P(C)=1-0,40-0,25=0,35$.

Si $D$ indica que el lote es defectuoso, se sabe también que:

$P(D/A)=0,01$; $P(D/B)=0,02$; $P(D/C)=0,03$.

a) Por la probabilidad total, la probabilidad de que un lote sea defectuoso es:

$$P(D)=P(A)\cdot P(D/A)+P(B)\cdot P(D/B)+P(C)\cdot P(D/C)=$$

$= 0,40 \cdot 0,01 + 0,25 \cdot 0,02 + 0,35 \cdot 0,03 = 0,0195.$

Por tanto, la probabilidad de que el lote no sea defectuoso es:

$P(\overline{D})=1-P(D) = 1 – 0,01955 = 0,9805.$

b) Por la probabilidad condicionada, se tendrá:

$$P(B/\overline{D})=\frac{P(B)\cdot P(\overline{D}/B)}{P(\overline{D})}=\frac{0,25\cdot 0,98}{0,9805}=\frac{2450}{9805}\approx 0,25.$$

**24**. Extremadura, ordinaria 2020

10. Se ha hecho un estudio de un famoso jugador de baloncesto de la ACB y se sabe que tiene una probabilidad de encestar un triple del 60 %. Si realiza 8 tiros a canasta

    a) Calcule la probabilidad de que enceste 5 triples. (0,75 puntos)

    b) Calcule la probabilidad de que enceste al menos 2. (0,75 puntos)

    c) Determine la media y la desviación típica de la distribución. (0,5 puntos)

Solución:

Sea $X$ la variable que mide el número de triples encestados. Se distribuye como una binomial $B(8, 0,6)$.

→ $p$ = 0,6 es la probabilidad de encestar; $q = 1 – p = 0,4$, la probabilidad de no encestar.

Con esto:

a) $P(X=5)=\binom{8}{5}\cdot 0,6^5\cdot 0,4^3=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 0,6^5\cdot 0,4^3=56\cdot 0,6^5\cdot 0,4^3=0,2787$.

b) $P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\binom{8}{0}\cdot 0,6^0\cdot 0,4^8-\binom{8}{1}\cdot 0,6^1\cdot 0,4^7=$

$=1-0,4^8-8\cdot 0,6^1\cdot 0,4^7=0,9915$.

c) La binomial $B(n, p)$ tiene media $\mu = np$ y desviación típica $\sigma=\sqrt{npq}$.

En este caso: $\mu = 8 \cdot 0,6 = 4,8$; $\sigma=\sqrt{8\cdot 0,6\cdot 0,4}=1,3856$.

**25**. Extremadura, extraordinaria 2020

9. Se realizaron dos debates electorales, uno el lunes y otro el martes. Se hizo una encuesta a 1.500 personas para estimar la audiencia, de las cuales: 1.100 personas vieron el debate del lunes, 1.000 vieron el debate del martes y 300 no vieron ninguno. Eligiendo al azar a uno de los encuestados:

   a) Calcule la probabilidad de que viera los dos debates. (1 punto)

   b) Si vio el debate del lunes, calcule la probabilidad de que viera el del martes. (1 punto)

Solución:

Sean $L$ y $M$ los sucesos una persona "ve el debate el lunes" y "ve el debate el martes", respectivamente. Con $\overline{L \cup M}$ se designa el suceso no ver ninguno de los debates.

Se sabe que:

$$P(L)=\frac{1100}{1500}=\frac{11}{15};\ P(M)=\frac{1000}{1500}=\frac{10}{15};\ P\left(\overline{L\cup M}\right)=\frac{300}{1500}=\frac{3}{15}\Rightarrow$$

$$P(L\cup M)=1-P\left(\overline{L\cup M}\right)=\frac{12}{15}.$$

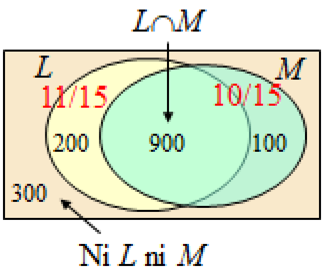
a) La probabilidad de que una persona viera algún debate:

$$P(L\cup M)=P(L)+P(M)-P(L\cap M)\Rightarrow P(L\cap M)=P(L)+P(M)-P(L\cup M)\Rightarrow$$

$$=\frac{11}{15}+\frac{10}{15}-\frac{12}{15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}.$$

b) Por la probabilidad condicionada,

$$P(M/L)=\frac{P(L\cap M)}{P(L)}=\frac{9/15}{11/15}=\frac{9}{11}.$$




Nota: Podría hacerse un diagrama de Venn como el adjunto.

**26**. Extremadura, extraordinaria 2020

10. El radio de un pistón se distribuye según una distribución normal de media 5 cm y desviación típica de 0,01 cm.

   a) Calcule la probabilidad de que un pistón tenga un radio mayor que 5,01 cm. (1 punto)

   b) Calcule la probabilidad de que un pistón tenga un radio entre 4,98 y 5 cm. (1 punto)

Solución:

La variable $X$ que mide el radio del pistón se distribuye normalmente, según la $N(5,\ 0{,}01)$. Se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-5}{0{,}01}$.

Con esto:

a) $P(X>5{,}01)=P\left(Z>\dfrac{5{,}01-5}{0{,}01}\right)=P(Z>1)=1-P(Z<1)$ = 1 – 0,8413 = 0,1587.

b) $P(4{,}98\le X\le 5)=P\left(\dfrac{4{,}98-5}{0{,}01}\le Z\le\dfrac{5-5}{0{,}01}\right)=P(-2\le Z\le 0)$ =

$=P(Z\le 0)-P(Z\le -2)=0{,}5-\left(1-P(Z\le 2)\right)$ = 0,5 – (1 – 0,9772) = 0,4772.

## 27. Galicia, ordinaria 2020

**7. Estadística y Probabilidad:**

Se seleccionan 250 pacientes para estudiar la eficacia de un nuevo medicamento. A 150 de ellos se les administra el medicamento, mientras que el resto son tratados con un placebo. Sabiendo que se curaron el 80% de los que tomaron el medicamento, ¿cuál es la probabilidad de que, seleccionado un paciente al azar, tomara el placebo o no se curara?

Solución:

Sean $M$ y $\overline{M}$ los sucesos tomar el medicamento o el placebo, respectivamente.

Con $C$ y $\overline{C}$ de denotan los sucesos curarse y no curarse.

Se sabe que:

$$P(M)=\frac{150}{250}=0,6 \to P\left(\overline{M}\right)=0,4 .\ P(C/M)=0,80 \to P\left(\overline{C}/M\right)=0,20 .$$

Supondré que la probabilidad de curarse si se toma el placebo es 0:

$$P\left(C/\overline{M}\right)=0 \to P\left(\overline{C}/\overline{M}\right)=1 .$$

La probabilidad de que un paciente, seleccionado al azar, tomara el placebo o no se curara, es la suma de los que toman el placebo más los que tomando el medicamento no se curan.

En total será:

$$P\left(\overline{M}\cup\overline{C}\right)=P\left(\overline{M}\right)+P\left(M\cap\overline{C}\right)=P\left(\overline{M}\right)+P(M)\cdot P\left(\overline{C}/M\right) = 0.4+0,6\cdot 0,20=0,52 .$$

Otra opción

Para los 250 pacientes seleccionados puede confeccionarse la siguiente tabla.

| | Medicamento | Placebo | Total |
|---|---|---|---|
| Tratamiento | 150 | 100 | 250 |
| Se curan | 0,80 · 150 = 120 | 0 | 120 |
| No se curan | 0,20 · 150 = 30 | 100 | 130 |

De los 250 pacientes hay 130 que no se curan (con medicamento o sin él).

Luego, $P\left(\overline{M}\cup\overline{C}\right)=\frac{130}{250}=0,52$.

## 28. Galicia, ordinaria 2020

**8. Estadística y Probabilidad:**

En una cadena de montaje, el tiempo empleado para realizar un determinado trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos y desviación típica 4 minutos. Calcule la probabilidad de que se haga ese trabajo en un tiempo comprendido entre 16 y 26 minutos.

Solución:

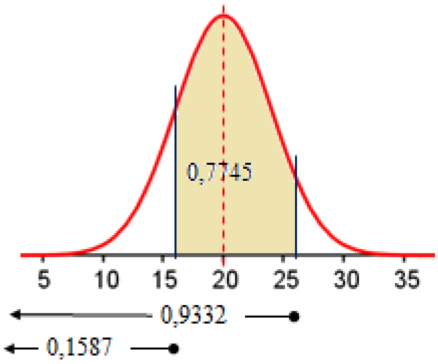
Se trata de una normal: $N(20, 4)$. Se tipifica haciendo el cambio $Z=\frac{X-20}{4}$.

Con esto:

$$P(16<X<26)=P\left(\frac{16-20}{4}<Z<\frac{26-20}{4}\right)=$$

$$= P(-1<Z<1,5)=P(Z<1,5)-P(Z<-1) =$$

= 0,9332 – 1 + 0,8413 = 0,9332 – 0,1587 = 0,7745.



**29**. Galicia, extraordinaria 2020

**7. Estadística y Probabilidad:**

El 57% de los estudiantes matriculados en la Universidad de Cambridge son naturales del Reino Unido y, de entre todos esos, el 83% aprueban con honores. Además, el porcentaje global de aprobados con honores es del 80%. Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar no haya nacido en el Reino Unido sabiendo que aprobó con honores.

Solución:

Sean $UK$ y $OT$ los sucesos ser natural del Reino Unido o de cualquier otro sitio, respectivamente; y sea $H$ el suceso aprobar con honores.

Se sabe que:

$$P(UK)=0,57 \to P(OT)=0,43;\ P(H/UK)=0,83.$$

Además, $P(H)=0,80$.

Por la probabilidad total,

$$P(H)=P(UK)\cdot P(H/K)+P(OT)\cdot P(H/OT) \Rightarrow 0,80=0,57\cdot 0,83+P(OT)\cdot P(H/OT)$$

$$\Rightarrow P(OT)\cdot P(H/OT)=0,3269.$$

Por la probabilidad condicionada,

$$P(OT/H)=\frac{P(OT)\cdot(H/OT)}{P(H)}=\frac{0,3269}{0,80}=\frac{1}{8}=0,4086.$$

**30**. Galicia, extraordinaria 2020

**8. Estadística y Probabilidad:**

a) En una determinada población de árboles, el 20% tienen más de 30 años. Si se eligen 40 árboles al azar, calcule la probabilidad de que solamente 4 de ellos tengan más de 30 años. El número total de árboles es tan grande que se puede asumir elección con reemplazo.

b) Si $X$ sigue una distribución normal de media 15 y $P(X \le 18) = 0.6915$, ¿cuál es la desviación típica?

Solución:

a) El experimento puede tratarse como una binomial $B(40, 0,2)$, que puede aproximarse mediante una normal: $N\left(40\cdot 0,2,\ \sqrt{40\cdot 0,2\cdot 0,8}\right) \approx N(8,\ 2,53)$. A su vez, esta normal se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-8}{2,53}$.

$\to$ La binomial $B(n, p)$ se puede aproximar mediante la normal de media $\mu = np$ y desviación típica $\sigma=\sqrt{npq}$, siempre que $np \ge 5$ y $nq \ge 5$. En este caso: $n = 40$; $p = 0,2$, es la probabilidad de que un árbol tenga más de 30 años; $q = 0,8$.

Con esto:

$$P(X=4)=P(3,5<X'<4,55) \to \text{debe hacerse la corrección de continuidad.}$$

Luego:

$$P(X=4)=P(3,5<X'<4,5)=P\left(\frac{3,5-8}{2,53}<Z<\frac{4,5-8}{2,53}\right)\approx P(-1,78<Z<-1,38) =$$

$$= P(1,38<Z<1,78)=P(Z<1,78)-P(Z<1,38) = 0,9625-0,9162=0,0463.$$

b) Se trata de una normal $N(15, \sigma)$.

Como $P(X\le 18)=P\left(Z\le\dfrac{18-15}{\sigma}\right)=0,6915 \Rightarrow$ (Tabla normal) $=\dfrac{18-15}{\sigma}=0,5\Rightarrow \sigma=6$.

**31**. Islas Canarias, ordinaria 2020, Grupo A

4. El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras de chorro de tinta viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1500 horas y una desviación típica de 200 horas.

   a. ¿Qué porcentaje de esas impresoras fallarán antes de 1000 horas de funcionamiento? 1.25 ptos

   b. ¿Qué porcentaje de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1000 y 2000 horas de uso? 1.25 ptos

Solución:

El tiempo, *X*, que transcurre hasta la primera avería de esas impresoras se ajusta a la distribución normal *N*(1500, 200).

Se tipifica haciendo el cambio: $Z = \dfrac{X-1500}{200}$.

Con esto:

a) $P(X<1000) = P\left(Z < \dfrac{1000-1500}{200}\right) = P(Z<-2,5) =$

$= 1-P(Z<2,5) = 1-0,9938 = 0,0062 \to 0,62$ %.

b) $P(1000<X<2000) = P\left(\dfrac{1000-1500}{200} < Z < \dfrac{2000-1500}{8200}\right) = P(-2,5<Z<2,5) =$

$= P(Z<2,5) - P(Z<-2,5) = P(Z<2,5) - (1-P(Z<2,5))$ = 0,9938 – 0,0062 = 0,9876.

El 98,76 % de las impresoras tendrá la primera avería entre las 1000 y 2000 horas de uso.

**32**. Islas Canarias, ordinaria 2020, Grupo B

4. Se sabe que el 8% de los análisis de comprobación del níquel en una aleación de acero son erróneos. Se realizan 10 análisis.

   a. Se afirma que la probabilidad de que 3 o más análisis sean erróneos es menor que el 3%. Justifique si es cierto. 1.25 ptos

   b. Se afirma que la probabilidad de obtener exactamente 3 análisis erróneos es menor que el 3%. Justifique si es cierto. 0.75 ptos

   c. Si se realizan 100 análisis, justifique si el número esperado de análisis correctos es igual a 8 0.5 ptos

Solución:

Sea *X* la variable que mide aleaciones erróneas. Se distribuye como una binomial *B*(10, 0,08).
→ *p* = 0,08 es la probabilidad de aleación errónea; *q* = 1 – *p* = 0,92, la probabilidad de esté bien.

Con esto:

a) $P(X\geq 3) = 1-P(X<3) = 1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2) =$

$= 1-\binom{10}{0}\cdot 0,08^0\cdot 0,92^{10} - \binom{10}{1}\cdot 0,08^1\cdot 0,92^9 - \binom{10}{2}\cdot 0,08^2\cdot 0,92^8 =$

$= 1-0,92^{10} - 10\cdot 0,08^1\cdot 0,92^9 - \dfrac{10\cdot 9}{2\cdot 1}\cdot 0,08^2\cdot 0,92^8 \approx 0,0401 \to 4,01$ %.

La probabilidad de que 3 o más análisis sean erróneos es del 4,01 %; que no es menor el 3 %.

b) $P(X=3)=\binom{10}{3}\cdot 0,08^3\cdot 0,92^7=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 0,08^3\cdot 0,92^7=0,03427...$ → 3,427 %.

La probabilidad de obtener exactamente 3 análisis erróneos es del 3,427 %.

c) La binomial $B(n, p)$ tiene media $\mu = np$ y desviación típica $\sigma=\sqrt{npq}$.

En este caso: $\mu$ = 100 · 0,08 = 8.

Por tanto, deben esperarse 8 análisis erróneos y 92 correctos.

**33**. Islas Canarias, extraordinaria 2020, Grupo A

4. Si una bombilla fluorescente presenta un 90% de posibilidades de tener una vida útil de al menos 800 horas, seleccionando 20 bombillas fluorescentes de este tipo, justificar si las siguientes afirmaciones son ciertas:
   a. Al seleccionar exactamente 18 bombillas fluorescentes, más del 30% tienen una vida útil de al menos 800 horas. 1 pto
   b. La probabilidad de que dos bombillas fluorescentes o menos NO tengan una duración de al menos 800 horas es menor que 0,7 1 pto
   c. El valor esperado de bombillas con una vida útil de al menos 800 horas si se toma una muestra de 100 bombillas fluorescentes es igual a 10 0.5 ptos

Solución:

La probabilidad de que una de esas bombillas tenga una vida superior a 800 h es $p$ = 0,9; la de su contrario, $q$ = 0,1.

Si se seleccionan 20 bombillas de ese tipo, el número de ellas, $X$, que dura más de 800 h puede medirse como una binomial $B(20, 0,9)$.

a) Esta pregunta no está bien formulada. Si se han seleccionado 20 de esas bombillas, la cuestión debería formularse en los siguientes términos: a) El porcentaje de que 18 bombillas (entre las 20 seleccionadas) tengan una vida útil superior a 800 horas es más del 30 % .

Con esto,

$$P(X=18)=\binom{20}{18}\cdot 0,9^{18}\cdot 0,1^2=\frac{20\cdot 19}{2\cdot 1}\cdot 0,9^{18}\cdot 0,1^2=0,2852 \to 28,52\ \%.$$

Es menos del 30 %.

→ Puede recordarse que $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$.

b) La probabilidad de que 2 o menos de las 20 bombillas no tenga una duración superior a 800 h es la misma que la probabilidad de que 18, 19 o 20 tengan una duración superior a 800 h.

Esto es:

$$P(X=18)+P(X=19)+P(X=20)=$$

$$=\binom{20}{18}\cdot 0,9^{18}\cdot 0,1^2+\binom{20}{19}\cdot 0,9^{19}\cdot 0,1^1+\binom{20}{20}\cdot 0,9^{20}\cdot 0,1^0=$$

$$=\frac{20\cdot 19}{2\cdot 1}\cdot 0,9^{18}\cdot 0,1^2+20\cdot 0,9^{19}\cdot 0,1^1+1\cdot 0,9^{20}\cdot 0,1^0 = 0,28518 + 0,27017 + 0,12158 = 0,67693.$$

Evidentemente esa probabilidad es menor que 0,7.

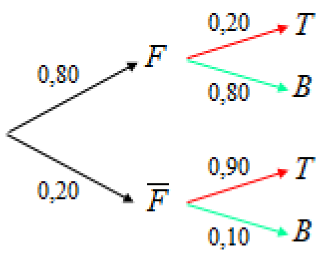
c) La binomial $B(n, p)$ tiene media $\mu = np$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq}$.
Si $n = 100$ y $p = 0,9$, entonces: $\mu = 90$.

**34**. Islas Canarias, extraordinaria 2020, Grupo B

4. Mi despertador no funciona muy bien, pues el 20% de las veces no suena. Cuando suena, llego tarde a clase el 20% de las veces; pero si no suena, la probabilidad de que llegue tarde es 0,9
   a. Represente el diagrama de árbol del problema. 0.5 ptos
   b. Justifique si el porcentaje de veces que llego tarde a clase y ha sonado el despertador es mayor que el 20%. 0.75 ptos
   c. Justifique si la probabilidad de que no llegue tarde a clase es menor que 0,5 0.75 ptos
   d. Si un día llego tarde a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya sonado el despertador? 0.5 ptos

Solución:

a) Se designa por $F$ el suceso "el despertador funciona" y por $\overline{F}$ su contrario: "no funciona"; y por $T$ y $B$, los sucesos llegar tarde y llegar bien, respectivamente.
Con los datos del problema se puede confeccionar el diagrama de árbol de la derecha.




b) La probabilidad de que ha sonado el despertador y llegó tarde es:

$$P(F \cap T) = P(F) \cdot P(T/F) = 0,80 \cdot 0,20 = 016.$$

Ese porcentaje es el 16 %, menor que el 20 %.

c) La probabilidad de que llegue tarde a clase es:

$$P(T) = P(F) \cdot P(T/F) + P(\overline{F}) \cdot P(T/\overline{F}) = 0,80 \cdot 0,20 + 0,20 \cdot 0,90 = 0,34.$$

El 34 % de las veces llega tarde; el 66 % de las veces llega bien.

d) Por la probabilidad condicionada:

$$P(F/T) = \frac{P(F) \cdot P(T/F)}{P(T)} = \frac{0,80 \cdot 0,20}{34} = \frac{16}{34} \approx 0,4706.$$

El 47,06 % de las veces que llegó tarde le sonó el despertador.

**35**. La Rioja, ordinaria 2020

**9.– (2 puntos)** En una clase de primero de primaria el 50 % de los niños practica natación, el 20 % practica baloncesto y el 5 % ambos deportes.

a) Calcular la probabilidad de que un niño elegido al azar no practique ni natación ni baloncesto.

b) Calcular la probabilidad de que un niño practique natación si juega al baloncesto.

Solución:

Se designan por $N$ y $B$ los sucesos practicar natación y baloncesto, respectivamente.

Se conoce que:

$$P(N)=0,5;\ P(B)=0,20,\ P(N\cap B)=0,05.$$

a) Por la probabilidad de la unión de sucesos se tiene:

$$P(N\cup B)=P(N)+P(B)-P(N\cap B) \Rightarrow P(N\cup B)=0,5+0,2-0,05=0,65.$$

La probabilidad de que un niño no practique ningún deporte será:

$$P\left(\overline{N\cup B}\right)=1-P(N\cup B)=1-0,65=0,35.$$

b) Por la probabilidad condicionada:

$$P(N/B)=\frac{P(N\cap B)}{P(B)}=\frac{0,05}{0,20}=0,25.$$

**36**. La Rioja, ordinaria 2020

**10.– (2 puntos)** Se sabe que dos poblaciones distintas $X$ e $Y$ se distribuyen según una Normal de media 25. Además $P(X\geq 27)=P(Y\geq 30)=0{,}1587$. Calcular sus respectivas varianzas.

Solución:

Las distribuciones $X \sim N(25, \sigma_1)$ e $Y \sim N(25, \sigma_2)$ se tipifican haciendo el cambio $Z=\frac{X-25}{\sigma_1}$ e $Z=\frac{Y-25}{\sigma_2}$, respectivamente.

→ Para $X \sim N(25, \sigma_1)$:

Si $P(X\geq 27)=0,1587 \Rightarrow P\left(Z>\frac{27-25}{\sigma_1}\right)=0,1587 \Leftrightarrow P\left(Z>\frac{2}{\sigma_1}\right)=0,1587 \Rightarrow$

$$P\left(Z<\frac{2}{\sigma_1}\right)=1-0,1587=0,8413.$$

Por los valores de probabilidad dados en la tabla $N(0, 1)$, se tiene que: $\frac{2}{\sigma_1}=1 \Rightarrow \sigma_1=2$.

Por tanto, la varianza de la población $X$ vale $\sigma_1^2=4$.

→ Para $Y \sim N(25, \sigma_2)$:

Si $P(Y \geq 30) = 0{,}1587 \Rightarrow P\left(Z > \frac{30-25}{\sigma_2}\right) = 0{,}1587 \Leftrightarrow P\left(Z > \frac{5}{\sigma_2}\right) = 0{,}1587 \Rightarrow$

$P\left(Z < \frac{5}{\sigma_2}\right) = 0{,}8413$.

Luego, $\frac{5}{\sigma_2} = 1 \Rightarrow \sigma_2 = 5$. Por tanto, la varianza de la población $Y$ vale $\sigma_2^{\,2} = 25$.

**37**. La Rioja, extraordinaria 2020

**9.– (2 puntos)** La estancia vacacional de una familia en un hotel sigue una distribución Normal, de media 15 días y desviación típica 4 días.

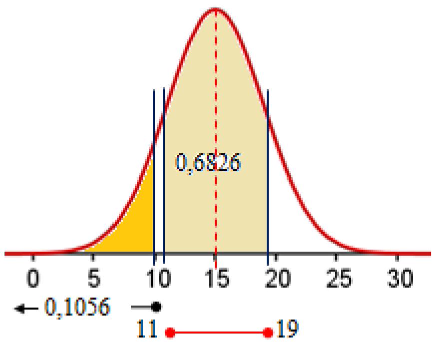
a) Calcular la probabilidad de que la estancia de una familia sea inferior a 10 días.

b) Calcular la probabilidad de que la estancia esté comprendida entre 11 y 19 días.

Solución:

La distribución es una normal $N(15, 4)$ → Se tipifica haciendo el cambio $Z = \frac{X-15}{4}$.

Co esto:




a) $P(X < 10) = P\left(Z < \frac{10-15}{4}\right) =$

$= P(Z < -1{,}25) = 1 - P(Z < 1{,}25) =$

$= 1 – 0{,}8944 = 0{,}1056$.

b) $P(11 < X < 19) = P\left(\frac{11-15}{4} < Z < \frac{19-15}{4}\right) =$

$= P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1) =$

$= P(Z < 1) - (1 - P(Z < 1))$ = 0,8413 – (1 – 0,8413) = 0,6826.

**38**. La Rioja, extraordinaria 2020

**10.– (2 puntos)** En una clase de 35 alumnos, asisten 30 de ellos. Se sabe que aprueban todas las asignaturas el 80 % de los alumnos que asisten a clase y el 10 % de los que no asisten. Se elige un alumno al azar.

a) Calcular el procentaje de alumnos que aprueba la asignatura.

b) Sabiendo que el alumno ha suspendido, calcular la probabilidad de que un alumno haya asistido a clase.

Solución:

Sean $C$ y $\overline{C}$ los sucesos "asistir a clase" y su contrario, respectivamente; y sean $A$ y $S$, los sucesos "aprobar la asignatura" y "suspender la asignatura", también respectivamente.
Atendiendo a los datos del enunciado, se sabe:

$$P(C)=\frac{30}{35}=\frac{6}{7} \Rightarrow P\left(\overline{C}\right)=1-\frac{6}{7}=\frac{1}{7}; \quad P(A/C)=0,80;\ P\left(A/\overline{C}\right)=0,10.$$

a) Por la probabilidad total:

$$P(A)=P(C)\cdot P(A/C)+P\left(\overline{C}\right)\cdot P\left(A/\overline{C}\right)=\frac{6}{7}\cdot 0,80+\frac{1}{7}\cdot 0,10=\frac{4,9}{7}=0,7.$$

El 70 % de los alumnos aprueba la asignatura.
El 30 % de los alumnos suspenden: $P(S)=0,30$.

b) Por la probabilidad condicionada:

$$P(C/S)=\frac{P(C\cap S)}{P(S)}=\frac{P(C)\cdot P(S/C)}{P(S)}=\frac{\frac{6}{7}\cdot 0,20}{0,30}=\frac{4}{7}=0,57.$$

## 39. Madrid, ordinaria 2020

**A.4. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30%. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40%, en el tercero del 50% y en el cuarto del 60%. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.

b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.

c) (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

Solución:

Designamos por $A_i$ y $F_i$ los sucesos acierto y fallo, respectivamente, en el lanzamiento i.

Se sabe que:

$$P(A_1)=0,3 \text{ y } P(F_1)=0,7; \quad P(A_2)=0,4 \text{ y } P(F_2)=0,6;$$

$$P(A_3)=0,5 \text{ y } P(F_3)=0,5; \quad P(A_4)=0,6 \text{ y } P(F_4)=0,4.$$

a) El globo explota antes el cuarto disparo si se acierta con alguno de los tres primeros.

Como

$P$(acertar con alguno de los tres primeros disparos) = 1 – $P$(fallar con los tres disparos) ⇒

⇒ $P$(acertar con alguno de los tres primeros disparos) = $1-0,7\cdot 0,6\cdot 0,5=0,79$.

b) El globo sigue intacto tras el cuarto disparo cuando se fallan los cuatro disparos.

Por tanto,

$P$(globo intacto…) = $P$(cuatro fallos) = $0,7\cdot 0,6\cdot 0,5\cdot 0,4=0,084$.

c) El experimento puede estudiarse como una binomial $B(10,\ 0,85)$: número de ensayos, $n$ = 10; probabilidad de acierto, $p$ = 0,85; probabilidad de error, $q$ = 0,15.

Si $X$ es la variable aleatoria que mide el número de globos explotados, se tendrá:

$$P(X=6)=\binom{10}{6}\cdot 0,85^6\cdot 0,15^4=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 0,85^6\cdot 0,15^4=210\cdot 0,85^6\cdot 0,15^4=0,0401.$$

→ Puede recordarse que $\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$.

## 40. Madrid, ordinaria 2020

**B.4. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Se consideran dos sucesos $A$ y $B$ tales que $P(A)=0.5$, $P(B)=0.25$ y $P(A\cap B)=0.125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

a) (0.5 puntos) Sea $C$ otro suceso, incompatible con $A$ y con $B$. ¿Son compatibles los sucesos $C$ y $A\cup B$?

b) (0.5 puntos) ¿Son $A$ y $B$ independientes?

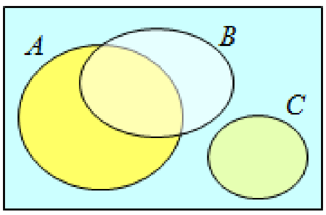
c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\bar{A}\cap\bar{B})$ (donde $\bar{A}$ denota el suceso complementario al suceso $A$).

d) (0.75 puntos) Calcular $P(\bar{B}|A)$.

Solución:

a) Los sucesos $C$ y $A\cup B$ son incompatibles, pues en caso contrario $C$ sería compatible con $A$ o con $B$.

La situación puede representarse mediante un diagrama de Venn.




b) Los sucesos $A$ y $B$ son independientes si

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B).$$

Como $P(A)\cdot P(B)=0,5\cdot 0,25=0,125=P(A\cap B)$ los sucesos son independientes.

c) Por una de las leyes de De Morgan: $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$.

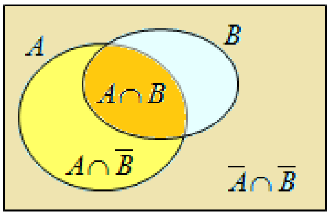
Como $P(A\cup B)=0,5+0,25-0,125=0,625 \Rightarrow P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-0,625=0,375$

d) Por la probabilidad condicionada:

$$P(\overline{B}/A)=\frac{P(\overline{B}\cap A)}{P(A)}=\frac{0,375}{0,5}=0,75.$$

Puede verse que

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=0,5-0,125=0,375.$$




## <u>**41**. Madrid, extraordinaria 2020</u>

**A.4. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Se tienen tres urnas $A$, $B$ y $C$. La urna $A$ contiene $4$ bolas rojas y $2$ negras, la urna $B$ contiene $3$ bolas de cada color y la urna $C$ contiene $6$ bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:

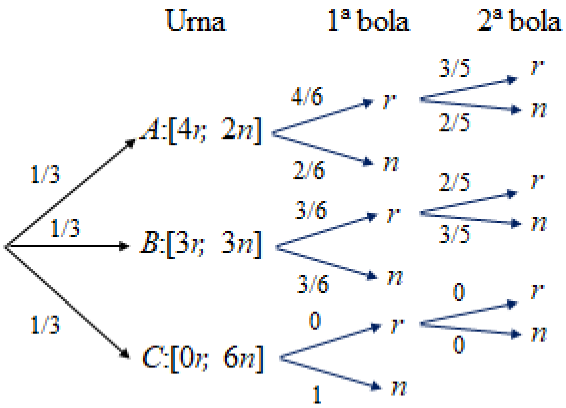
a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.
b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.
c) (0.5 puntos) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.

<u>Solución</u>:

La probabilidad de elegir cada urna es 1/3:

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}.$$

La secuencia y probabilidades asociadas a cada suceso se indican en el diagrama de árbol adjunto.




Con esto:

a) $P(1^a r)=P(A)\cdot P(r/A)+P(B)\cdot P(r/B)+P(C)\cdot P(r/C)=$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{7}{18}.$$

b) $P(1^a r;2^a n)=P(A)\cdot P(1^a r/A)\cdot P(2^a n/A)+P(B)\cdot P(1^a r/B)\cdot P(2^a n/B)=$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{17}{90}.$$

c) Por Bayes:

$$P(2^a n/1^a r)=\frac{P(1^a r;2^a n)}{P(1^a r)}=\frac{\frac{17}{90}}{\frac{7}{18}}=\frac{17}{35}.$$

**42**. Madrid, extraordinaria 2020

**B.4. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes $X, Y$. Sabemos que $P(X) = 0.4$ y que $P(X \cap \overline{Y}) = 0.08$ (donde $\overline{Y}$ es el suceso complementario de $Y$). Se pide:

a) (1 punto) Calcular $P(Y)$.

b) (0.5 puntos) Calcular $P(X \cup Y)$.

c) (1 punto) Si $X$ es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede $X$, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

Solución:

Dos sucesos $X$ e $Y$ son independientes cuando $P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y)$.

Si dos sucesos son independientes, sus contrarios también lo son.

a) Como $P(X \cap \overline{Y}) = 0,08$ y $P(X \cap \overline{Y}) = P(X) \cdot P(\overline{Y}) \Rightarrow 0,08 = 0,4 \cdot P(\overline{Y}) \Rightarrow P(\overline{Y}) = 0,2$.

Por tanto:

$$P(Y) = 1 - P(\overline{Y}) = 1 - 0,2 = 0,8.$$

b) De $P(X \cap Y) = P(X) \cdot P(Y) \Rightarrow P(X \cap Y) = 0,4 \cdot 0,8 = 0,32$.

Como $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) \Rightarrow P(X \cup Y) = 0,4 + 0,8 - 0,32 = 0,88$.

c) De $P(X) = 0,4 \Rightarrow P(\overline{X}) = 0,6$.

Luego, la probabilidad de éxito, $P(E) = p = 0,6$; la de fracaso, $q = 0,4$.

El experimento es una binomial, $B(8,\ 0,6)$.

La probabilidad de haber tenido 2 éxitos al menos es $P(E \geq 2) = 1 - P(E = 0) - P(E = 1)$.

$$P(E \geq 2) = 1 - P(E = 0) - P(E = 1) = 1 - \binom{8}{0} \cdot 0,6^0 \cdot 0,4^8 - \binom{8}{1} \cdot 0,6^1 \cdot 0,4^7 =$$

$$= 1 - 1 \cdot 0,4^8 - 8 \cdot 0,6 \cdot 0,4^7 \approx 0,9915.$$

**43**. Murcia, ordinaria 2020

**7:** Una urna tiene 2 bolas blancas y 3 bolas rojas. Consideramos la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que se obtienen al repetir nueve veces el siguiente experimento: se saca una bola de la urna y, después de anotar el color, se devuelve la bola a la urna.

a) **[1 p.]** ¿Qué tipo de distribución sigue dicha variable aleatoria y cuáles son sus parámetros?

b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que el número de bolas anotado sea menor o igual que 4?

Solución:

Si en la urna hay 2 bolas blancas y 3 bolas rojas, la probabilidad de extraer bola blanca es $p=P(B)=\frac{2}{5}$; siendo la probabilidad de extraer bola roja, $q=P(R)=\frac{3}{5}$.

a) Si el experimento se repite 9 veces, la variable $X$ que mide el número de bolas blancas extraídas se comporta como una binomial: $B\left(9,\ \frac{2}{5}\right) \to n=9;\ p=P(B)=\frac{2}{5};\ q=1-p=\frac{3}{5}$.

b) La media de la distribución es: $\mu=np=9\cdot\frac{2}{5}=\frac{18}{5}=3,6$.

Su desviación típica: $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{9\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{54}}{5}$.

c) $P(X\le 4)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=$

$$=\binom{9}{0}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^9+\binom{9}{1}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^1\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^8+\binom{9}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^7+\binom{9}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^6+\binom{9}{4}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^5=$$

$$=1\cdot\left(\frac{3^9}{5^9}\right)+9\cdot\left(\frac{2\cdot 3^8}{5^9}\right)+\frac{9\cdot 8}{2}\cdot\left(\frac{2^2\cdot 3^7}{5^9}\right)+\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2}\cdot\left(\frac{2^3\cdot 3^6}{5^9}\right)+\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2}\cdot\left(\frac{2^4\cdot 3^5}{5^9}\right)=\frac{1432485}{1953125}\approx 0,7334.$$

$\to$ El valor de $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$. En particular, $\binom{9}{4}=\frac{9!}{4!\cdot(9-4)!}=\frac{9!}{4!\cdot 5!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=126$.

**44**. Murcia, ordinaria 2020

**8:** En una determinada población, el 40 % de los individuos lee diariamente la prensa y el 75 % ve diariamente las noticias en la televisión. Además, el 25 % de los individuos lee la prensa y ve las noticias en la televisión diariamente.

a) **[0,5 p.]** ¿Son independientes los sucesos "leer diariamente la prensa" y "ver diariamente las noticias en la televisión"?

b) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo lea la prensa diariamente pero no vea las noticias en la televisión?

c) **[1 p.]** Si un individuo lee la prensa diariamente, ¿cuál es la probabilidad de que también vea las noticias en la televisión?

Solución:

Sean los sucesos:

$L$ = leer la prensa; $V$ = ver la televisión.

Se conocen las siguientes probabilidades:

$P(L)=0,40$; $P(V)=0,75$; $P(L\cap V)=0,25$.

a) Los sucesos $L$ y $V$ serán independientes si $P(L\cap V)=P(L)\cdot P(V)$.

Como $P(L)\cdot P(V)=0,40\cdot 0,75=0,3\neq 0,25=P(L\cap V)$, los sucesos leer la prensa y ver la televisión no son independientes.

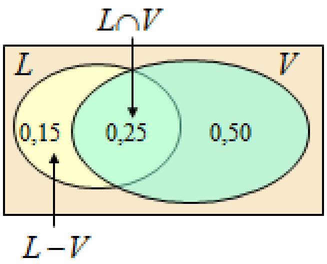
b) El suceso "leer la prensa, pero no ver la televisión" es $L-V=L-(L\cap V)$.

Su probabilidad es:

$P(L-V)=P(L-(L\cap V))=P(L)-P(L\cap V)=0,40-0,25=0,15$.

c) Por la probabilidad condicionada:

$$P(V/L)=\frac{P(L\cap V)}{P(L)}=\frac{0,25}{0,40}=\frac{5}{8}=0,625.$$




Nota. Puede confeccionarse un diagrama de Venn como el adjunto.

**45**. Murcia, extraordinaria 2020

**7:** El peso de los recién nacidos, medido en kilogramos (kg), sigue una distribución normal de media $\mu = 2,8$ kg y desviación típica $\sigma$. Se sabe que solo el $20,05\,\%$ de ellos pesa más de 3 kg.

a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese más de 2,6 kg?

b) **[1 p.]** Calcule la desviación típica de esta distribución normal.

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2,9 kg?

IMPORTANTE: Trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal.

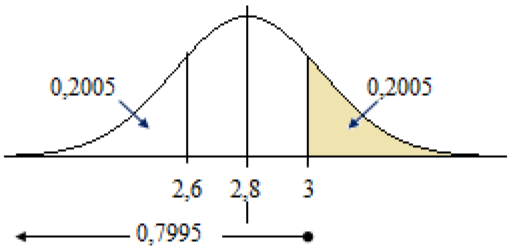
Solución:

El peso $X$ de los recién nacidos se distribuye según la normal $N$(2,8, σ). Se tipifica mediante el cambio $Z = \dfrac{X - 2,8}{\sigma}$.

Si $P(X > 3) = 0,2005 \Rightarrow P(X < 3) = 0,7995$.

Como $P(X < 3) = P\left(Z < \dfrac{3 - 2,8}{\sigma}\right) = 0,7995 \Rightarrow$

$P\left(Z < \dfrac{0,2}{\sigma}\right) = 0,7995$.




a) Por tanto,

$$P(X > 2,6) = P\left(Z > \frac{2,6 - 2,8}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{-0,2}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{0,2}{\sigma}\right) = 0,7995.$$

b) Si $P\left(Z < \dfrac{0,2}{\sigma}\right) = 0,7995$, por la tabla $N$(0, 1), se tiene que $\dfrac{0,2}{\sigma} = 0,84 \Rightarrow \sigma = 0,2381$.

c) En consecuencia,

$$P(X < 2,9) = P\left(Z < \frac{2,9 - 2,8}{0,2381}\right) = P(Z < 0,42) = 0,6628.$$

**46**. Murcia, extraordinaria 2020

**8:** Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 4 negras y 3 rojas, y la urna B contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras. Además, se tiene un dado que tiene 2 caras marcadas con la letra A y 4 caras marcadas con la letra B. Se lanza el dado y se saca una bola al azar de la urna que indica el dado.

a) **[0,75 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea verde?

b) **[0,75 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?

c) **[1 p.]** Si bola extraída es verde, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

Solución:

Sean los sucesos:

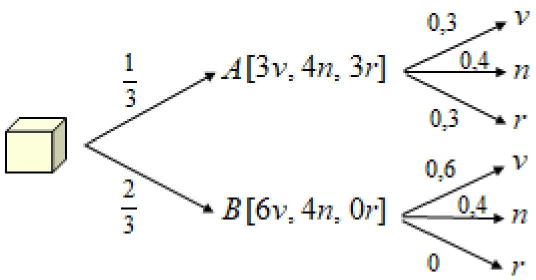
*A* = urna A; *B* = urna B.

*v*, *n* y *r* = bola de color verde, negro y rojo, respectivamente.

Al lanzar el dado se tiene:

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3};\ P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

La probabilidad de extraer bola verde, negra o roja de cada una de las urnas se indica en el diagrama de árbol adjunto.




a) Por la probabilidad total, la probabilidad de que esa bola sea verde será:

$$P(v)=P(A)\cdot(v/A)+P(B)\cdot P(v/B)\ =\ \frac{1}{3}\cdot 0,3+\frac{2}{3}\cdot 0,6=0,5.$$

b) La probabilidad de que esa bola sea roja será:

$$P(r)=P(A)\cdot(r/A)+P(B)\cdot P(r/B)\ =\ \frac{1}{3}\cdot 0,3+\frac{2}{3}\cdot 0=0,1.$$

c) Por la probabilidad condicionada (Bayes):

$$P(B/v)=\frac{P(B)\cdot P(v/B)}{P(v)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 0,6}{0,5}=0,8.$$

**47**. País Vasco, ordinaria 2020

**Ejercicio A5**

En una empresa el 70 por ciento de sus trabajadoras están satisfechas con su contrato, y entre las satisfechas con su contrato el 80 por ciento gana más de 1000 euros. Entre las no satisfechas solo el 20 por ciento gana más de 1000 euros. Si se elige una trabajadora al azar:

a)¿ Cuál es la probabilidad de que gane más de 1000 euros?

b) Si gana más de 1000 euros, ¿ cuál es la probabilidad que esté satisfecha con su contrato?

c) ¿ Cuál es la probabilidad de que gane menos de 1000 euros y esté satisfecha con su contrato? 4

Solución:

Se consideran los sucesos:

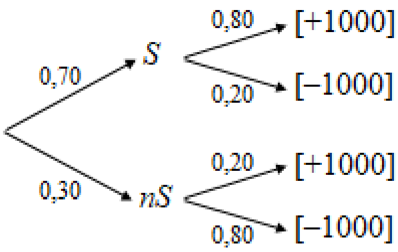
$S \rightarrow$ estar satisfecho con su contrato;

$nS \rightarrow$ no estar satisfecho;

$[+1000] \rightarrow$ ganar más de 1000 euros;

$[-1000] \rightarrow$ ganar menos de 1000 euros.

Con los datos del problema se puede confeccionar el diagrama de árbol adjunto.




a) Por la probabilidad total, la probabilidad ganar más 1000 euros será:

$$P([+1000]) = P(S)\cdot P(+1000/S]) + P(nS)\cdot P(+1000/nS) =$$

$$= 0,70\cdot 0,80 + 0,30\cdot 0,20 = 0,62 .$$

b) Por la probabilidad condicionada (Bayes):

$$P(S/[+1000]) = \frac{P(S)\cdot P([+1000]/S)}{P([+1000])} = \frac{0,70\cdot 0,80}{0,62} = \frac{56}{62} \approx 0,9032 .$$

c) $P([-1000] \cap S) = P(S)\cdot P([-1000]/S) = 0,70\cdot 0,20 = 0,14$ .

**48**. País Vasco, ordinaria 2020

**Ejercicio B5**

En un garaje hay 30 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrarse o no un automóvil, con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es de 0,4, se pide:

a) Identificar y describir este modelo de probabilidad.

b) Hallar la probabilidad de que cierto día haya 8 automóviles aparcados.

c) Hallar la probabilidad de que un día haya entre 10 y 20 automóviles aparcados.

Solución:

a) Es un experimento binomial $B(n, p)$, con $n = 30$, $p = 0{,}40$ (la probabilidad de que el aparcamiento esté ocupado) y $q = 0{,}60$ (probabilidad de que no esté ocupado). Esto es, una binomial $B(30,\ 0{,}4)$.

Como $n$ es relativamente grande, $np = 30 \cdot 0{,}4 = 12 > 5$ y $nq = 30 \cdot 0{,}6 = 18 > 5$, esta binomial puede aproximarse mediante la normal de media $\mu = np$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq}$; que a su vez se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$.

Esto es: $B(30,\ 0{,}4) \sim N\left(30\cdot 04,\ \sqrt{30\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}\right) \approx N(12,\ 2{,}6833) \to Z = \dfrac{X-12}{2{,}6833}$.

b) Utilizando la binomial:

$$= P(X=8) = \binom{30}{8}\cdot 0{,}4^{8}\cdot 0{,}6^{22} = \frac{30!}{8!\cdot(30-8)!}\cdot 0{,}4^{8}\cdot 0{,}6^{22} = 0.05048709682.$$

$\rightarrow$ Aproximando con la normal, haciendo la corrección de continuidad:

$$P(X=8) = P(7{,}5 < X' < 8{,}5) = P\left(\frac{7{,}5-12}{2{,}6833} < Z < \frac{8{,}5-12}{2{,}6833}\right) = P(-1{,}68 < Z < -1{,}30) =$$

$$= P(Z < 1{,}68) - P(Z < 1{,}30) = 0{,}9535 - 0{,}9032 = 0{,}0503.$$

Puede observarse que los resultados son aproximados.

c) $P(10 \le X \le 20) = P(9{,}5 < X' < 20{,}5) = P\left(\dfrac{9{,}5-12}{2{,}6833} < Z < \dfrac{20{,}5-12}{2{,}6833}\right) =$

$$= P(-0{,}93 < Z < 3{,}17) = P(Z < 3{,}17) - P(Z < -0{,}93) = P(Z < 3{,}17) - (1 - P(Z < 0{,}93)) =$$

$$= 0{,}9992 - (1 - 0{,}8238) = 0{,}8230.$$

**49**. País Vasco, extraordinaria 2020

**Ejercicio A5**

Una máquina produce recipientes cuyas capacidades se distribuyen según una distribución normal $N(10; 0,1)$. Un fabricante considera que un recipiente es defectuoso si su capacidad no está entre 9,8 y 10,1. Calcular:

a) La probabilidad de que un recipiente sea considerado defectuoso.

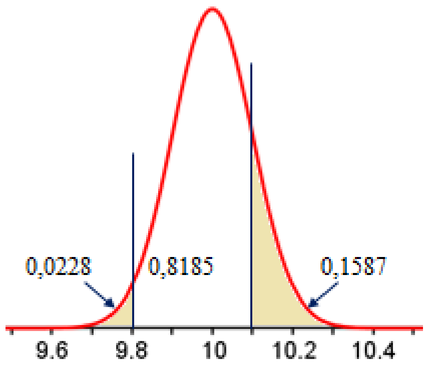
b) Si se han fabricado 1500 recipientes, ¿cuántos se esperan defectuosos?

Solución:

a) La normal $X \sim N(10,\ 0,1)$ se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-10}{0,1}$.

Si un recipiente es defectuoso cuando $X < 9,8$ o $X > 10,1$, entonces, la probabilidad de que sea defectuoso es:

$$P(X < 9,8) + P(X > 10,1) =$$
$$= P\left(Z < \frac{9,8-10}{0,1}\right) + P\left(Z > \frac{10,1-10}{0,1}\right) =$$
$$= P(Z < -2) + P(Z > 1) =$$
$$= (1 - P(Z < 2)) + (1 - P(Z < 1)) =$$
$$= 1 - 0,9772 + (1 - 0,8413) = 0,1815.$$




b) Entre 1500 recipiente, el número esperado de defectuosos será:

$n = 1500 \cdot 0,1815 = 272,25 \to 273$.

**50**. País Vasco, extraordinaria 2020

**Ejercicio B5**

En un instituto el 40 por ciento de sus alumnos tiene el cabello castaño, el 35 por ciento tiene los ojos azules y el 15 por ciento tiene el cabello castaño y los ojos azules. Se escoge una persona al azar:

a) Si tiene los cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga los ojos azules?
b) Si tiene los ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño ni los ojos azules?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga el cabello castaño o los ojos azules?

Solución:

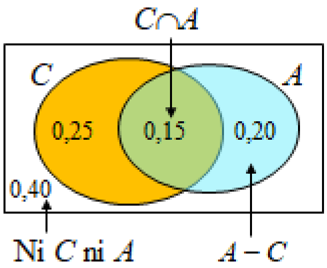
Sean los sucesos:

$C$ = tener el cabello castaño $\to P(C) = 0,40$;

$A$ = tener los ojos azules $\to P(A) = 0,35$;

También se sabe que, $P(C \cap A) = 0,15$.

Con estos datos puede confeccionarse el diagrama de Venn adjunto.




a) Por la probabilidad condicionada:

$$P(A/C) = \frac{P(C \cap A)}{P(C)} = \frac{0,15}{0,40} = \frac{3}{8} = 0,375.$$

b) La probabilidad teniendo los ojos azules no tener el cabello castaño es;

$$P\left(\overline{C}/A\right)=\frac{P\left(\overline{C}\cap A\right)}{P\left(A\right)}=\frac{0,20}{0,35}=\frac{4}{7}\approx 0,5714$$

c) No tener los ojos azules ni el cabello castaño es el suceso $\overline{C\cup A}$, el contrario de tener los ojos azules o el cabello castaño:

$P\left(\overline{C\cup A}\right)=1-P\left(C\cup A\right)$ = $1-\left[P\left(C\right)+P\left(A\right)-P\left(C\cap A\right)\right]$ =

= 1 – 0,40 – 0,35 + 0,15 = 0,40.

d) Tener el cabello castaño o los ojos azules es el suceso $C\cup A$. Su probabilidad es, que se ha calculado antes es:

$P\left(C\cup A\right)=P\left(C\right)+P\left(A\right)-P\left(C\cap A\right)$ = 0,40 + 0,35 – 0,15 = 0,60.