ALGUNOS PROBLEMAS DE ÁLGEBRA PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE EBAU–EvAU–PEBAU… DE 2020

1. Andalucía, ordinaria 2020

Ejercicio 7. (2,5 puntos)

Considera $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a\\ 2a\\ 3a\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

a) Discute el sistema dado por $AX=B$, según los valores del parámetro a. (1,25 puntos)

b) Para a = 0, resuelve el sistema dado por $AX=B$. Calcula si es posible, una solución en la que $y+z=4$. (1,25 puntos)

Solución:

a) El rango de la matriz de coeficientes es 2, pues la matriz A tiene dos columnas iguales, pero el menor $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1\neq 0$.

Hay que estudiar el rango de la matriz ampliada, $M=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\ 1 & 0 & 1 & 2a\\ 4 & 1 & 4 & 3a\end{array}\right)$.

El menor $|M_1|=\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & 0 & 2a\\ 4 & 1 & 3a\end{vmatrix}=-2a+5a+a=4a$ $\to$ solo se anula si a = 0.

Por tanto:

- Si $a \neq 0$, el rango de M = 3, mientras que r(A) = 2. El sistema será incompatible.
- Si a = 0, se tendrá: $A=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 4 & 0\end{array}\right)=M$. Como ambas matrices tienen rango 2, el sistema será compatible indeterminado (y homogéneo).

b) Para a = 0, resulta un sistema compatible indeterminado: $\begin{cases} x+y+z=0\\ x+z=0\\ 4x+y+4z=0\end{cases}$.

Sobra una ecuación; luego queda:

$$\begin{cases} x+y+z=0\\ x+z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-x=0\\ z=-x\uparrow\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0\\ z=-x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t\\ y=0\\ z=-t\end{cases}.$$

Si se desea que $y+z=4$, entonces, la solución será: y = 0; z = 4 y x = –4.

2. Aragón, junio 20

2) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$:

a) (*1 punto*) Calcule, si es posible, $\left(A\cdot B^t\right)^{-1}$.

b) (*1 punto*) Compruebe que, $C^3=I$, donde I es la matriz identidad, y calcule C^{16}.

Solución:

a) $\left(A\cdot B^t\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

La matriz $\left(A\cdot B^t\right)=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ es inversible, pues tiene determinante distinto de 0: $\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-4$.

Su inversa puede calcularse resolviendo la ecuación $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\to$

$$\begin{pmatrix}3a+4c & 3b+4d\\ a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3a+4c=1\\ a=0\\ 3b+4d=0\\ b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4c=1\\ a=0\\ 3+4d=0\\ b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=1/4\\ a=0\\ d=-3/4\\ b=1\end{cases}.$$

Luego, $\left(A\cdot B^t\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1/4 & -3/4\end{pmatrix}$.

Es fácil comprobar que $\left(A\cdot B^t\right)\cdot\left(A\cdot B^t\right)^{-1}=I\to$

$$\left(A\cdot B^t\right)\cdot\left(A\cdot B^t\right)^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1/4 & -3/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

b) $C^2=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$; $C^3=C^2\cdot C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$.

Como,

$$C^{16}=C^{15}\cdot C=\left(C^3\right)^5\cdot C=I^5\cdot C=C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

3. Aragón, ordinaria 20

3) Resuelva el sistema matricial $\begin{cases} X-2Y=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$

Solución:
Puede resolverse aplicando el método de Gauss (reducción):
En esquema:

$$\begin{cases} X-2Y=A \\ 2X+3Y=B \end{cases} \Rightarrow_{E2-2E1} \begin{cases} X-2Y=A \\ 7Y=B-2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=A+2Y \\ Y=\frac{1}{7}(B-2A) \end{cases}.$$

Esto es:

$$Y=\frac{1}{7}\cdot\left[\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right] \Rightarrow$$

$$Y=\frac{1}{7}\cdot\left[\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 0 & -7 \\ 14 & 7 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Asturias, ordinaria 2020

Bloque 1.A Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería en la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? (1.25 puntos)

b) Además, si los precios del libro, la calculadora y el estuche hubieran sido, respectivamente, un 50 %, un 80 % y un 75 % de los precios iniciales de cada artículo, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio inicial de cada artículo. (1.25 puntos)

Solución:
a) Si x, y, z son los precios del libro, calculadora y estuche, respectivamente, entonces deben cumplirse las ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=57 \\ x=2(y+z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=57 \\ x-2y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow_{E2+2E1} \begin{cases} x+y+z=57 \\ 3x=114 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=38 \\ y+z=19 \end{cases}.$$

El libro cuesta 38 €.
El precio de la calculadora no puede determinarse. La suma de los precios de la calculadora y del estuche asciende a 19 €.

b) A partir de los porcentajes indicados se obtiene otra ecuación, que es:

$$0,50x+0,80y+0,75z=34 \to (x=38) \to$$

$$\to 0,50\cdot 38+0,80y+0,75z=34 \Rightarrow 0,80y+0,75z=15$$

Queda un nuevo sistema:

$$\begin{cases} y+z=19 \to y=19-z \\ 0,80y+0,75z=15 \end{cases} \Rightarrow 0,80\cdot(19-z)+0,75z=15 \Rightarrow -0,05z=-0,2 \Rightarrow z=4;\ y=15.$$

5. Asturias, ordinaria 2020

Bloque 1.B Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Discute el rango de A según los valores de $m \in \mathbb{R}$. (1 punto)

b) ¿Qué dimensiones ha de tener la matriz X para que sea posible la ecuación $A \cdot X = B$? (0.5 puntos)

c) Calcula la matriz X del apartado anterior para $m = 0$. (1 punto)

Solución:

a) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.

Se hace el determinante de $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} = m^2 - 1, \text{ que se anula si } m = \pm 1.$$

Por tanto,

- Si $m \neq \pm 1$, como $|A| \neq 0$, el rango de A será 3.
- Si $m = \pm 1$, como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, el rango de A será 2.

b) El producto de matrices puede hacerse en estas condiciones: $A_{n\times p} \cdot X_{p\times m} = B_{n\times m}$. Las columnas de la primera matriz deben coincidir con las filas de la segunda. La matriz producto tiene las filas de la primera y las columnas de la segunda.
Por tanto, para que pueda plantearse la ecuación $A_{3\times 3} \cdot X_{p\times m} = B_{3\times 2}$, la matriz X debe ser de tamaño 3×2.

c) Si existe la matriz inversa de A, que sucede si $m = 0$, entonces:

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

Cálculo de la inversa de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$; con $|A| = -1$

La matriz de los adjuntos es: $A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Baleares, ordinaria 2020, opción A

1. Donat el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} x+y=1, \\ ax+z=0, \\ x+(1+a)y+az=a+1, \end{cases}$$

determina el paràmetre a, i resol sempre que es pugui, de manera que el sistema:

(a) tengui solució única, (4 punts)

(b) tengui infinites solucions, (4 punts)

(c) no tengui solució. (2 punts)

Solución:

Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada,

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & a & a+1 \end{array}\right)=M$$

Si r(A) = r(M) = 3 → sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 → sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) → sistema incompatible: no tiene solución.

El determinante de A vale,

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix}=-(1+a)-(a^2-1)=-(a^2+a) \to \text{se anula si } a=-1 \text{ o } 0.$$

Con esto:

- Si $a \neq -1$ y 0, r(A) = r(M) = 3 → sistema compatible determinado: solución única.

- Si $a = -1$,

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)=M \to \text{puede observarse, en } M,\ F3=-F2 \Rightarrow \text{r}(A)=\text{r}(M)=2.$$

En este caso, la segunda y tercera ecuaciones están repetidas. El sistema es compatible indeterminado, equivalente a $\begin{cases} x+y \quad =1 \\ -x \quad +z=0 \end{cases}$.

- Si $a = 0$,

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)=M \to \text{puede observarse, en } M,\ F3=F1 \Rightarrow \text{r}(A)=\text{r}(M)=2.$$

En este caso, la primera y tercera ecuaciones están repetidas. El sistema es compatible indeterminado, equivalente a $\begin{cases} x+y \quad =1 \\ \qquad z=0 \end{cases}$.

Por tanto, se concluye:
(a) El sistema tiene solución única si $a \neq -1$ y 0,
Su solución puede calcularse por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a+1 & 1+a & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix}} = \frac{0}{-a^2-a} = 0\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & a+1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix}} = \frac{-a^2-a}{-a^2-a} = 1\,;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & a+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix}} = \frac{0}{-a^2-a} = 0\,.$$

(b) El sistema tiene infinitas soluciones si $a = -1$ o $a = 0$.

Si $a = -1$, el sistema es equivalente a $\begin{cases} x + y \quad = 1 \\ -x \quad + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ z = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$.

Si $a = 0$, el sistema es equivalente a $\begin{cases} x + y \quad = 1 \\ \quad z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{cases}$.

(c) El sistema nunca es incompatible.

7. Canarias, ordinaria 2020, grupo A

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{pmatrix}$

a. Halle los valores del parámetro k para los que la matriz A tiene inversa. 1 pto

b. Tomando el valor $k = -1$ en la matriz A, calcule la matriz X que verifica que: $A \cdot X = 24 \cdot I_3$, siendo I_3 la matriz identidad de orden 3. 1.5 ptos

Solución:

a) Una matriz tiene inversa si su determinante es distinto de 0.

Para facilitar los cálculos se extrae k de la 1ª columna y $k - 1$ de la 2ª fila.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{vmatrix} = k \cdot (k-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k-3 \end{vmatrix} = k \cdot (k-1) \cdot (k-3-1-1) = k \cdot (k-1) \cdot (k-5).$$

Luego, $|A| = 0$ si $k = 0$, 1 o 5.

Por tanto, siempre que k sea distinto de 0, 1 y 5, la matriz tendrá inversa.

c) Para $k = -1$ la matriz A es invertible, entonces:

$$A \cdot X = 24 I_3 \Rightarrow X = A^{-1} \cdot 24 I_3 = 24 \cdot \left(A^{-1} \cdot I_3\right) = 24 \cdot A^{-1}.$$

Para $k = -1$, la matriz es $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Su inversa es $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$; con $|A| = -12$.

La matriz de los adjuntos es: $A_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{-12} = -\dfrac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Por tanto:

$$X = 24 \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) \cdot \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & -2 & -4 \\ -4 & -10 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

8. Canarias, ordinaria 2020, grupo B

2. Una pequeña bombonería tiene en su almacén 24 kg de chocolate y 60 litros de leche, con los que elabora tres productos distintos: cajas de bombones, tabletas de chocolate y paquetes de chocolate en polvo. Del resto de los ingredientes se tienen reservas suficientes.

Se sabe que las cajas de bombones requieren 2 kg de chocolate y 6 litros de leche, las tabletas de chocolate requieren 4 kg de chocolate y 4 litros de leche, y cada paquete de chocolate en polvo requiere 1 kg de chocolate y 4 litros de leche. Se quiere fabricar un total de 12 unidades y con ello se consume todo el chocolate y toda la leche almacenados. ¿Cuántas unidades deben fabricarse de cada tipo de producto? 2.5 ptos

Solución:

Si se fabrican x cajas de bombones, y tabletas de chocolate y z paquetes de chocolate en polvo, entonces, con los datos del enunciado deben cumplirse las siguientes ecuaciones:

→ Chocolate: $2x+4y+z=24$.

→ Leche: $6x+4y+4z=60$.

→ Unidades: $x+y+z=12$.

Queda el siguiente sistema, que resolveré por Gauss:

$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ 2x+4y+z=24 \\ 6x+4y+4z=60 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-2E1 \\ E3-6E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=12 \\ 2y-z=0 \\ -2y-2z=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3+E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=12 \\ 2y-z=0 \\ -3z=-12 \Rightarrow z=4 \end{cases}.$$

Sustituyendo en las demás ecuaciones: $y = 2$; $x = 6$.

9. Cantabria, ordinaria 2020

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera la ecuación $AXA^t = B$ en donde $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, y A^t denota traspuesta de A.

1) [0.5 PUNTOS] Despeja la matriz X en la igualdad dada.

2) [0.5 PUNTOS] Comprueba que A es invertible y calcula su inversa.

3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

4) [1 PUNTO] Calcula X.

Solución:

1) Tanto la matriz A como su traspuesta son invertibles: tienen determinante distinto de 0. Por tanto, puede despejarse utilizando la inversa:

$$AXA^t = B \Rightarrow A^{-1}\left(AXA^t\right)\left(A^t\right)^{-1} = A^{-1}B\left(A^t\right)^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}B\left(A^t\right)^{-1}.$$

2) Como $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, la matriz A es invertible. Su inversa es $A^{-1} = \dfrac{\left(A_{ij}\right)^t}{|A|}$.

La matriz de los adjuntos es: $A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

3) La inversa de $A^t=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ es $\left(A^t\right)^{-1}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

Efectivamente, se cumple que $\left(A^t\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^t$.

4) $X=A^{-1}B\left(A^t\right)^{-1}\Rightarrow X=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow X=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & -4\\ 2 & 10\end{pmatrix}$.

10. Cantabria, ordinaria 2020

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

En un juego de mesa se pueden comprar tanques, submarinos y aviones por 1, 3 y 5 diamantes, respectivamente. El rival ha gastado 41 diamantes. Sabemos que tiene el doble de submarinos que de tanques, y que el número de submarinos más el de aviones es 10.

1) [1 PUNTO] Con la información dada, plantea un sistema de ecuaciones para hallar el número de tanques, submarinos y aviones que tiene el rival.

2) [0.5 PUNTOS] Clasifica el sistema.

3) [1 PUNTO] Resuelve el sistema.

Solución:

1) Sean *x*, *y*, *z* los valores que indican el número de tanques, submarinos y aviones comprados, respectivamente. Con esto:

$x+3y+5z=41;\ y=2x;\ y+z=10$

Se tiene el sistema: $\begin{cases}x+3y+5z=41\\ 2x-y\quad=0\\ \quad y+z=10\end{cases}$.

2) Como el determinante de la matriz de coeficientes no es nulo, el sistema es compatible determinado.

En efecto, $\begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=-1-6+10\neq 0$.

3) Aplicando transformaciones de Gauss:

$\begin{cases}x+3y+5z=41\\ 2x-y\quad=0\\ \quad y+z=10\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{matrix}E1-5E3\\ \\ \end{matrix}\begin{cases}x-2y\quad=-9\\ 2x-y\quad=0\\ \quad y+z=10\end{cases}\Rightarrow E2-2E1\begin{cases}x-2y\quad=-9\\ 3y\quad=18\\ y+z=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2y=-9\to x=3\\ y=6\\ y+z=10\to z=4\end{cases}$.

11. Castilla La Mancha, ordinaria 2020

1. *a)* **[1,25 puntos]** Determina razonadamente los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa

$$A=\begin{pmatrix}1 & a+1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & a\\ a & 0 & 1 & 0\\ a & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

b) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente todos los posibles valores x, y, z para que el producto de las matrices $C=\begin{pmatrix}x & 1\\ y & z\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ conmute.

Solución:

a) Una matriz es invertible si su determinante no vale 0.

Lo desarrollo por la tercera fila:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & a+1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1 & a\\ a & 0 & 1 & 0\\ a & 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix}a+1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & a\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1 & a+1 & 1\\ 0 & 2 & a\\ a & 0 & 0\end{vmatrix}$$ = (Desarrollados por la fila 3ª) =

$$=-2a\left(a^2+a-2\right)+a\left(a^2+a-2\right)=-a\cdot\left(a^2+a-2\right)=-a\cdot(a-1)\cdot(a+2)$$

Este determinante se anula si $a = 0$, $a = 1$ o $a = -2$.

Por tanto, la matriz no tiene inversa para esos valores de a.

b) Se desea que $C\cdot D=D\cdot C$. Esto es: $\begin{pmatrix}x & 1\\ y & z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & 1\\ y & z\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}3x+1 & x-1\\ 3y+z & y-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+y & 3+z\\ x-y & 1-z\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3x+1=3x+y\to y=1\\ x-1=3+z\\ 3y+z=x-y\\ y-z=1-z\end{cases}$$ ⇒ (como $y = 1$) ⇒

$$\Rightarrow\begin{matrix}E2\\ E3\end{matrix}\begin{cases}x-1=3+z\\ 3+z=x-1\end{cases}\Rightarrow z=x-4$$. Haciendo $x = t$: $\begin{cases}x=t\\ y=1\\ z=t-4\end{cases}$.

Luego, $C=\begin{pmatrix}t & 1\\ 1 & t-4\end{pmatrix}$.

12. Castilla La Mancha, ordinaria 2020

2. *a*) [**1,75 puntos**] Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax & -ay & -z & = & a \\ ax & -ay & & = & a \\ ax & +2y & -z & = & 1 \end{cases}.$$

b) [**0,75 puntos**] Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Solución:

a) Sea *A* la matriz de coeficientes y *M* la matriz ampliada,

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -a & -1 & a \\ a & -a & 0 & a \\ a & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) = M$$

Si r(*A*) = r(*M*) = 3 → sistema compatible determinado: solución única.
Si r(*A*) = r(*M*) < 3 → sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(*A*) < r(*M*) → sistema incompatible: no tiene solución.

El determinante de *A* vale,

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -a & -1 \\ a & -a & 0 \\ a & 2 & -1 \end{vmatrix} = F2 - F1 \begin{vmatrix} a & -a & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2a - a^2 = a(a+2) \to \text{se anula si } a = 0 \text{ o } -2.$$

Con esto:

- Si $a \neq 0$ y -2, r(*A*) = r(*M*) = 3 → sistema compatible determinado.

- Si $a = 0$,

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) = M \to \text{como la segunda fila es nula} \Rightarrow \text{ r}(A) = \text{r}(M) = 2.$$

En este caso, el sistema es compatible indeterminado.

- Si $a = -2$,

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) = M \to \text{como el menor } |M_1| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 6 + 4 \neq 0 \Rightarrow$$

⇒ r(*A*) = 2, r(*M*) =3. En este caso, el sistema es incompatible.

b) Si $a = 2$, el sistema es compatible determinado: $\begin{cases} 2x - 2y - z = 2 \\ 2x - 2y \quad = 2 \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases}$.

Por el método de Gauss:

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 2 \\ 2x - 2y \quad = 2 \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} E1 - E2 \\ \\ E3 - E2 \end{matrix} \begin{cases} -z = 0 \\ 2x - 2y \quad = 2 \\ 4y - z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 1 + y \\ 4y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 3/4 \\ y = -1/4 \end{cases}.$$

13. Castilla–León, ordinaria 2020

E1.- (Álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x - y + az = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x + ay - 2z = 0 \end{cases}$

a) Estudie la existencia y número de soluciones según los valores del parámetro real a. **(1,2 puntos)**

b) Resuélvalo, si es posible, para el valor del parámetro $a = -1$. **(0,8 puntos)**

Solución:

a) Puede observarse que el sistema es homogéneo; por tanto, siempre es compatible.

- Compatible determinado, con solución la trivial, si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de 0.
- Compatible indeterminado, con infinitas soluciones en otro caso.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & a & -2 \end{vmatrix} = a + a^2 = a(1+a) \to$ se anula si $a = -1$ o 0.

Con esto:

- Si $a \neq -1$ y 0, como r(A) = r(M) = 3 → sistema compatible determinado.

Con solución $x = y = z = 0$.

- Si a = 0, el sistema es equivalente a $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases}$.

Puede verse que las dos últimas ecuaciones están repetidas. Por tanto, el sistema tendrá infinitas soluciones.

El sistema queda equivalente a: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$. Su solución es: $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$.

- Si a = –1, el sistema es equivalente a $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$.

Como se observa fácilmente, la tercera ecuación es suma de las dos primeras. Por tanto, queda equivalente a: $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$.

b) Cuya solución es: $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x = z \uparrow \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - x = 0 \\ x = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} \to \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$.

14. Castilla–León, extraordinaria 2020

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix}$

a) Encontrar los valores de m y n para que se verifique:

$A^2 = A^t$ $\quad (A^t \equiv la\ traspuesta\ de\ A).$ **(1,2 puntos)**

b) ¿ Para qué valores de m y n la matriz A no es invertible ? **(0,8 puntos)**

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m+mn & n^2 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & n \end{pmatrix}$.

Si $A^2 = A^t \Rightarrow \begin{cases} 0 = m \\ n^2 = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = 1; n = 0 \end{cases}$.

b) La matriz A no es invertible si su determinante vale 0:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{vmatrix} = n \rightarrow$ No es invertible si $n = 0$.

15. Cataluña, ordinaria 2020

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k:

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ kx + 2y + 8z = 28 \\ 5x + y - kz = 23 + k \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k.
[1,25 punts]

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $k = 0$.
[1,25 punts]

Solución:

a) Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada,

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ k & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -k & 23+k \end{array}\right) = M \to \text{simplificamos: } A = \begin{array}{r} \\ \\ F3-F1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ k & 2 & 8 & 28 \\ 0 & 0 & -k-4 & 4+k \end{array}\right) = M.$$

Si r(A) = r(M) = 3 → sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 → sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) → sistema incompatible: no tiene solución.

El determinante de A vale,

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ k & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -k-4 \end{vmatrix} = -(10-k)\cdot(k+4) \to \text{se anula si } k = -4 \text{ o } 10.$$

Con esto:

- Si $k \neq -4$ y 10, r(A) = r(M) = 3 → sistema compatible determinado.
- Si $k = -4$,

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ -4 & 2 & 8 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = M \to \text{r}(A) = \text{r}(M) = 2.$$

En este caso, el sistema es compatible indeterminado.

- Si $k = 10$,

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 10 & 2 & 8 & 28 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \end{array}\right) = M \to \text{como el menor } |M_1| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 19 \\ 2 & 8 & 28 \\ 0 & -14 & 14 \end{vmatrix} = 504 - 644 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ r(A) = 2, r(M) =3. En este caso, el sistema es incompatible.

b) Si $k = 0$, el sistema es compatible determinado.

Tras la simplificación inicial queda: $\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ 2y + 8z = 28 \\ -4z = 4 \end{cases}$

Se resuelven despejando z en la tercera ecuación y sustituyendo…
Su solución es: $z = -1$; $y = 18$; $x = 1$.

16. Cataluña, extraordinaria 2020

4. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a-7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Estudieu el rang de la matriu A per als diferents valors del paràmetre a.
[1,25 punts]

b) Comproveu que per a $a = 4$ la matriu A és invertible i que es verifica que $A^{-1} = A^2$.
[1,25 punts]

Solución:
a) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.
El determinante de A vale,

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a-7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = a\cdot(-a+7+1)+3\cdot(-4-1) = -a^2+8a-15 \to \text{se anula si}$$

$$a = \frac{-8\pm\sqrt{64-60}}{-2} = \frac{-8\pm 2}{-2} = \begin{cases} 3 \\ 5 \end{cases}.$$

Con esto:

- Si $a \neq 3$ y 5, r(A) = 3.
- Si $a = 3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to$ su rango es 2; el menor $\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$.

Puede observarse que las columnas 1ª y 2ª están "repetidas": $C1 = -C2$.

- Si $a = 5 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to$ su rango es 2; el menor $\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$.

Puede observarse que $F3 = F1 - F2$.

b) Para $a = 4$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ es invertible ya que $|A| = 1 \neq 0$.

Su inversa es $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$, siendo $(A_{ij}) = Adj(A)$.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Efectivamente, $A^{-1} = A^2$. (También se podría ver que $A^3 = I \to A\cdot A^{-1} = A\cdot A^2 \Leftrightarrow I = A^3$).

17. Comunidad Valenciana, ordinaria 2020

Problema 4. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2\\b&0\\-1&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1&0&2\\-1&b&-1\end{pmatrix}$, que dependen del parámetro real b.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de b para que cada una de las matrices AB y BA tenga inversa. (3 *puntos*)

b) Los valores de b para que la matriz A^TA tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A. (3 *puntos*)

c) La inversa de A^TA, cuando dicha inversa exista. (4 *puntos*)

Solución:

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2\\b&0\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&2\\-1&b&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2b&0\\-b&0&2b\\-1&2b&-4\end{pmatrix}$; $B\cdot A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\-1&b&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\b&0\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&2\\b^2&-4\end{pmatrix}$.

- Una matriz tiene inversa siempre que su determinante sea distinto de 0.

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix}-3&2b&0\\-b&0&2b\\-1&2b&-4\end{vmatrix}=-3\cdot\begin{vmatrix}0&2b\\2b&-4\end{vmatrix}-2b\begin{vmatrix}-b&2b\\-1&-4\end{vmatrix}=12b^2-12b^2=0\to\text{ nunca tiene inversa.}$$

$$|B\cdot A|=\begin{vmatrix}-3&2\\b^2&-4\end{vmatrix}=12-2b^2\to\text{ tiene inversa si } 12-2b^2\neq 0\Rightarrow b\neq\pm\sqrt{6}\,.$$

b) $A\cdot A^T=\begin{pmatrix}1&2\\b&0\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&b&-1\\2&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&b&3\\b&b^2&-b\\3&-b&3\end{pmatrix}$.

$$\left|A\cdot A^T\right|=\begin{vmatrix}5&b&3\\b&b^2&-b\\3&-b&3\end{vmatrix}=5\left(2b^2\right)-b\cdot(6b)+3\cdot\left(-4b^2\right)=-8b^2\to\text{ tiene inversa si } b\neq 0.$$

$$A^T\cdot A=\begin{pmatrix}1&b&-1\\2&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\b&0\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b^2+2&0\\0&8\end{pmatrix}.$$

$\left|A^T\cdot A\right|=\begin{vmatrix}b^2+2&0\\0&8\end{vmatrix}=8\left(b^2+2\right)$, que es distinto de 0 para cualquier valor de b.

Luego, $A^T\cdot A=\begin{pmatrix}b^2+2&0\\0&8\end{pmatrix}$ siempre tiene inversa.

c) Como la inversa de cualquier matriz A es $A^{-1}=\dfrac{\left(A_{ij}\right)^T}{|A|}$, siendo $\left(A_{ij}\right)=Adj(A)$, se tendrá:

$$\left|A^T\cdot A\right|=8\left(b^2+2\right);\ Adj\left(A^T\cdot A\right)=\begin{pmatrix}8&0\\0&b^2+2\end{pmatrix}\Rightarrow\left(A^T\cdot A\right)^{-1}=\frac{1}{8\left(b^2+2\right)}\cdot\begin{pmatrix}8&0\\0&b^2+2\end{pmatrix}.$$

18. Comunidad Valenciana, extraordinaria 2020

Problema 4. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa. (3 *puntos*)

b) Dos constantes a, b de modo que $A^{-1} = A^2 + aA + bI$. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica la ecuación $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$ siendo I la matriz identidad. (3 *puntos*)

c) El valor de λ para que el sistema de ecuaciones $(A - \lambda I) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tenga infinitas soluciones. Para dicho valor de λ hallar todas las soluciones del sistema. (2+2 *puntos*)

Solución:

a) La matriz A tiene inversa ya que su determinante es distinto de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Su inversa es $A^{-1} = \dfrac{(A_{ij})^t}{|A|}$, siendo $(A_{ij}) = Adj(A)$.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Si $A^3 - 3A^2 + 3A - I = O \Rightarrow I = A^3 - 3A^2 + 3A \to$ (multiplicando por A^{-1}) $\to$
$A^{-1}I = A^{-1}\left(A^3 - 3A^2 + 3A\right) \Rightarrow A^{-1} = A^2 - 3A + 3I \Rightarrow a = -3;\ b = 3.$

c) El sistema $(A - \lambda I) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ es homogéneo.

Para que tenga infinitas soluciones es necesario que su matriz de coeficientes $(A - \lambda I)$ tenga rango menor que 3. Por tanto, su determinante debe valer 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$$

Si $\lambda = 1$, el sistema queda: $\begin{cases} 2y = 0 \\ 0 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = h \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \to$ es un sistema con dos grados de indeterminación.

19. Extremadura, ordinaria 2020

2. Discuta en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones: (2 puntos)

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & \lambda y & - & z & = 1 \\ -\lambda x & + & y & & & = \lambda \\ & & (\lambda+3)\,y & - & 2z & = 4 \end{array}\right\}$$

Solución:

a) Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & -1 & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda+3 & -2 & 4 \end{array}\right) = M$$

Si r(A) = r(M) = 3 $\to$ sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 $\to$ sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) $\to$ sistema incompatible: no tiene solución

El determinante de A vale: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda+3 & -2 \end{vmatrix} = -2 - \lambda(2\lambda) - (-\lambda(\lambda+3)) = -\lambda^2 + 3\lambda - 2 \to$

se anula si $\lambda = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$.

Por tanto:

- Si $\lambda \neq 1$ y 2, como $|A| \neq 0$, el sistema será compatible determinado: r(A) = r(M) = 3.
- Si $\lambda = 1$, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right) = M$.

El rango de A es 2, pues $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$; el rango de M también es 2, pues la columna de términos independientes repite los coeficientes la y.

En consecuencia, si $\lambda = 1$, el sistema será compatible indeterminado.

- Si $\lambda = 2$, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \end{array}\right) = M$.

El rango de A es 2, pues $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$; el rango de M también es 2, pues

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 6 - 2 = 0 \to$ puede observarse que $C4 = 2C2 + 3C3$.

Como r(A) = r(M) = 2, el sistema será compatible indeterminado.

20. Galicia, ordinaria 2020

1. Números y Álgebra:

Sean A y B las dos matrices que cumplen $A+B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 4 & -2\end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcular A^2-B^2. (Advertencia: en este caso, $A^2-B^2\neq(A+B)(A-B)$.)

b) Calcular la matriz X que cumple la igualdad $XA+(A+B)^T=2I+XB$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^T$ la traspuesta de $A+B$.

Solución:

a) $A+B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ y $A-B=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 4 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\to$ (sumando ambas igualdades) $2A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -4\\ 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$.

$\to$ (restando ambas igualdades) $2B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -4\\ 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 8\\ -4 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

Luego:

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\quad B^2=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 8\\ -4 & -7\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7 & 8\\ -4 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -8\\ 4 & 8\end{pmatrix}.$$

b) $XA+(A+B)^T=2I+XB\Rightarrow XA-XB=2I-(A+B)^T\Rightarrow$

$\Rightarrow X(A-B)=2I-(A+B)^T\Rightarrow X=\left(2I-(A+B)^T\right)\cdot(A-B)^{-1}$, pues dicha inversa existe.

La inversa de la matriz $A-B$ es $(A-B)^{-1}=\dfrac{\left(Adj(A-B)\right)^T}{|A-B|}$.

En este caso:

$$A-B=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 4 & -2\end{pmatrix};\ |A-B|=16;\ Adj(A-B)=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 4 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow(A-B)^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -4 & 0\end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$X=\left[\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}\right]\cdot\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -4 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}0 & 0\\ -4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -4 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

21. Galicia, extraordinaria 2020

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases}(m+3)x - m^2y = 3m, \\ (m+3)x + my = 3m+6.\end{cases}$

Solución:

Puede resolverse por reducción (método de Gauss).

$$\begin{cases}(m+3)x - m^2y = 3m \\ (m+3)x + my = 3m+6\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1\end{matrix}\begin{cases}(m+3)x - m^2y = 3m \\ \left(m+m^2\right)y = 6\end{cases} \to \text{despejando en } E2:$$

$$y = \frac{6}{m+m^2} = \frac{6}{m(m+1)} \to \text{esta expresión no está definida si } m = 0 \text{ o } m = -1.$$

Sustituyendo en $E2$: $(m+3)x + m\cdot\frac{6}{m(m+1)} = 3m+6 \Rightarrow (m+3)x = 3m+6-\frac{6}{m+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (m+3)x = \frac{3m^2+9m}{m+1} \Rightarrow x = \frac{3m(m+3)}{(m+1)(m+3)} \to$$ expresión que no está definida si $m = -1$ o $m = -3$.

Por tanto:

- Si $m \neq 0, -1$ y -3 no hay ninguna dificultad. El sistema es compatible determinado, con solución única.

La solución sería: $x = \frac{3m(m+3)}{(m+1)(m+3)} = \frac{3m}{m+1}$; $y = \frac{6}{m(m+1)}$.

- Si $m = 0$, el valor de y no tiene sentido (vale ∞): $y = \frac{6}{0}$. El sistema será incompatible.
- Si $m = -1$, se repite lo dicho: $y = \frac{6}{0}$. El sistema también es incompatible.
- Si $m = -3$, el sistema es compatible indeterminado. Observa que si no se simplifica en la solución general $x = \frac{0}{0}$, que es indeterminado.

El sistema sería: $\begin{cases}0x - 9y = -9 \\ 0x - 3y = -3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = t \\ y = 1\end{cases}$.

Nota: La discusión puede hacerse también estudiando el rango de la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} m+3 & -m^2 \\ m+3 & m\end{pmatrix} \to A = \begin{matrix} \\ F2-F1\end{matrix}\begin{pmatrix} m+3 & -m^2 \\ 0 & m+m^2\end{pmatrix} \Rightarrow |A| = (m+3)\left(m+m^2\right)\ldots$$

22. La Rioja, ordinaria 2020

4.– (2 puntos) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

a) Hallar α y β de tal forma que $A^2 = \alpha A + \beta I$, siendo I la matriz identidad.

b) Calcular A^5 utilizando la anterior identidad.

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\alpha A + \beta I = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha+\beta & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha+\beta & 0 \\ m\alpha & 0 & 2\alpha+\beta \end{pmatrix}.$$

Igualando ambas matrices se obtiene: $\begin{cases} 4 = 2\alpha+\beta \\ 4m = m\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 2\alpha+\beta \to \beta = -4 \\ \alpha = 4 \uparrow \end{cases}$.

Por tanto, $A^2 = 4A - 4I$.

b) $A^2 = 4A - 4I \Rightarrow A^4 = A^2 \cdot A^2 = (4A-4I)\cdot(4A-4I) = 4^2 (A-I)\cdot(A-I) = 2^4 \left(\underline{A^2} - 2A + I\right)$.

Sustituyendo de nuevo $A^2 = 4A - 4I \Rightarrow A^4 = 2^4 (\underline{4A-4I} - 2A + I) = 2^4 (2A - 3I)$.

Luego: $A^5 = A^4 \cdot A = 4^2 (2A - 3I)\cdot A = 2^4 \left(2\underline{A^2} - 3A\right) = 2^4 (8A - 8I - 3A) = 2^4 (5A - 8I)$.

Por tanto:

$$A^5 = 2^4 \cdot \left[\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 5m & 0 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \right] = 16 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5m & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 80m & 0 & 32 \end{pmatrix}$$

→ De otra forma (más rápido):

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 32m & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

$$A^5 = A \cdot A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 32m & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 80m & 0 & 32 \end{pmatrix}.$$

23. Madrid, ordinaria 2020

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} x+ay+z=a+1 \\ -ax+y-z=2a \\ -y+z=a \end{array}\right\}$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a.

b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $a=0$.

Solución:

a) Sea A la matriz de coeficientes *y* M la matriz ampliada.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{array}\right)=M$$

Si rango de A = rango de M = 3 $\to$ sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 $\to$ sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) > r(M) $\to$ sistema incompatible: no tiene solución

El determinante de A vale

$$|A|=a(a+1)$$

Se anula si a = 0 o a = –1.
Con esto:

- Si $a \neq 0$ y $-1 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.

- Si a = 0, se tendrá:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};\quad M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$ y $|A|=0 \Rightarrow$ r(A) = 2.

Como la fila 2ª y 3ª de M son proporcionales: $F3=-F2$, entonces, el rango de M también es 2. Luego, el sistema será compatible indeterminado.

- Si a = –1, se tendrá:

- $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};\quad M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ y $|A|=0 \Rightarrow$ r(A) = 2.

Pero, como el menor $M_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-3-1\neq 0 \Rightarrow r(M)=3$.

En este caso, el sistema será incompatible.

b) Para $a = 0$ el sistema es compatible indeterminado. Resulta equivalente a:

$$\begin{cases} x+z=1 \\ y-z=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=1+z \end{cases}.$$

Haciendo $z=t$ se obtiene la solución: $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$.

24. Madrid, ordinaria 2020

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275.8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63.6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

Solución:

Sean x, y, z los precios por kilo de dorada, lubina y rodaballo, respectivamente.

Con los datos del enunciado se obtiene:

$$13740000x+23440000y+7400000z=275800000 \to 1374x+2344y+740z=27580;$$

$$7400000z=63600000 \to 740z=6360 \to z=8,59 \text{ €}.$$

$$1374(y+0,11)+2344y+6360=27580 \Rightarrow 3718y=21068,86 \Rightarrow y=5,67 \text{ €}.$$

Luego, $x = 5,78$ €.

25. Madrid, extraordinaria 2020

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son $(1,1,1,1)$ y $(1,2,3,4)$, y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, **justificándolo apropiadamente**:

a) (0.5 puntos) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.
b) (0.5 puntos) Las tres filas de A son linealmente independientes.
c) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.
d) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.
e) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

Solución:

a) Para que la tercera fila sea combinación lineal de las dos primeras debe suceder que $F3=pF1+qF2$.

En este caso puede valer la suma directa: $F3=F1+F2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

b) Bastaría, por ejemplo, que el elemento a_{31} no cumpliese la relación anterior.

Puede valer: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Podría comprobarse haciendo el menor de orden 3, $|M|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&4\end{vmatrix}=-1-1+1=-1\neq 0$.

c) Vale la matriz anterior; y también $A=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&2&3&4\\-1&3&4&5\end{array}\right)$, pues es una matriz de rango 3.

En efecto, el menor $|M|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\-1&3&4\end{vmatrix}=-1-7+5=-3\neq 0$

d) Valdría la primera matriz dada: $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\2&3&4&5\end{pmatrix}$.

El rango de esta matriz es 2. (No puede ser 3, por la dependencia lineal de la fila 3; vale 2, pues el menor recuadrado es distinto de 0).

e) En la matriz inicial, hay que hacer que la dependencia lineal se rompa con el elemento a_{34}.

Puede valer: $A=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&2&3&4\\2&3&4&1\end{array}\right)$.

El menor $|M_1|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&3&4\end{vmatrix}=0$; mientras que $|M_2|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&4\\3&4&1\end{vmatrix}=-13+12-1=-2\neq 0$.

El rango de la matriz de coeficientes es 2; el de la matriz ampliada vale 3.

<u>Observación</u>:
Podría recordarse el criterio para la discusión de un sistema de ecuaciones lineales.
Si r(matriz coef)) = r(matriz amp) = 3 $\to$ sistema compatible determinado: solución única.
Si r(matriz coef)) = r(matriz amp) < 3 $\to$ sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(matriz coef)) < r(matriz amp) $\to$ sistema incompatible: no tiene solución

26. Madrid, extraordinaria 2020

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1 puntos) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.

b) (0.5 puntos) Calcular la matriz $C=A^2-2I$.

c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D=ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

Solución:

a) Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de 0.

En este caso, $\begin{vmatrix}0&-1&2\\2&1&-1\\1&0&1\end{vmatrix}=3-2=1$.

La matriz inversa es $A^{-1}=\dfrac{(Adj(A))^t}{|A|}$, donde $Adj(A)$ es la matriz de los adjuntos.

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}1&-3&-1\\1&-2&-1\\-1&4&2\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=(Adj(A))^t=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-2&4\\-1&-1&2\end{pmatrix}.$$

Comprobación: (debe cumplirse que $A\cdot A^{-1}=I$)

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}\boxed{0\quad -1\quad 2}\\2&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\boxed{1}&-1\\-3&\boxed{-2}&4\\-1&\boxed{-1}&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\boxed{0}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

b) $$A^2=\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&3\\1&-1&2\\1&-1&3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$C=A^2-2I=\begin{pmatrix}0&-1&3\\1&-1&2\\1&-1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1&3\\1&-3&2\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

c) $$D=\begin{pmatrix}0&-1&2\\2&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\5&-3\\2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-1&2\\13&5&-3\\4&2&0\end{pmatrix}.$$

Luego:

$$|D|=\begin{vmatrix}-4&-1&2\\13&5&-3\\4&2&0\end{vmatrix}=-4\cdot 6+1\cdot 12+2\cdot 6=0\ \rightarrow \text{Puede verse que } C1=2\cdot C2-C3.$$

27. Murcia, ordinaria 2020

2: Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) **[1 p.]** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o inversibles) y calcule sus matrices inversas.

b) **[1,5 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) Una matriz es regular cuando su determinante es distinto de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4+3 = -1; \quad |B| = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2+3 = 1.$$

La inversa de la matriz M es $M^{-1} = \dfrac{(Adj(M))^t}{|M|}$.

En este caso:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$Adj(B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) $AXB = A^t - 3B \Rightarrow A^{-1}\cdot(AXB)\cdot B^{-1} = A^{-1}\cdot\left(A^t - 3B\right)\cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}\cdot\left(A^t - 3B\right)\cdot B^{-1}$.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 38 \\ -18 & -23 \end{pmatrix}.$$

28. Navarra, ordinaria 2020

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+1)x+(a^2+a)y=2 \\ (-a-1)x-a^2y=0 \\ ay+(a^2-1)z=3-a \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2.5 puntos)

Solución:

Para aligerar los cálculos conviene simplificar el sistema inicial aplicando transformaciones de Gauss:

$$\begin{cases} (a+1)x+(a^2+a)y=2 \\ (-a-1)x-a^2y=0 \\ ay+(a^2-1)z=3-a \end{cases} \to E2+E1 \begin{cases} (a+1)x+(a^2+a)y=2 \\ ay=2 \\ ay+(a^2-1)z=3-a \end{cases} \to$$

$$\underset{E3-E2}{\to} \begin{cases} (a+1)x+(a^2+a)y=2 \\ ay=2 \\ (a^2-1)z=1-a \end{cases}.$$

Con esto, sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & a^2+a & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & 1-a \end{array}\right)=M$$

Si r(A) = r(M) = 3 → sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 → sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) < r(M) → sistema incompatible: no tiene solución

El determinante de A vale:

$$|A|=\begin{vmatrix} a+1 & a^2+a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{vmatrix}=a\cdot(a+1)\cdot(a^2-1) \to \text{Se anula si } a=-1,\ a=0 \text{ o } a=1.$$

Por tanto:

- Si $a\neq -1$, 0, 1, como $|A|\neq 0$, el sistema será compatible determinado: r(A) = r(M) = 3.
- Si $a=-1$, $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)=M$.

El rango de A es 1. El rango de M es 2, pues $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}=-16\neq 0$.

Por tanto, en este caso, el sistema será incompatible.

- Si $a = 0$: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) = M$.

El rango de A es 2: el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. El rango de M es 3, pues $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Por tanto, en este caso, el sistema será incompatible.

- Si $a = 1$, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = M \Rightarrow$ Rango de A = rango de B = 2: $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

El sistema será compatible indeterminado.

→ Solución cuando $a \neq -1$, 0, 1.
El sistema era:

$$\begin{cases} (a+1)x + (a^2+a)y = 2 \\ ay = 2 \\ (a^2-1)z = 1-a \end{cases} \to \text{despejando en } E2 \text{ y } E3\text{: } y = \frac{2}{a};\ z = \frac{1-a}{a^2-1} = \frac{-1}{a+1}.$$

Sustituyendo en $E1$: $(a+1)x + (a^2+a)\cdot\frac{2}{a} = 2 \Rightarrow (a+1)x = 2 - 2(a+1) \Rightarrow x = \frac{-2a}{a+1}$.

→ Solución cuando $a = 1$.
El sistema queda:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ y = 2 \\ 0z = 0 \end{cases}, \text{ cuya solución es: } \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}.$$

<u>**29**. Navarra, ordinaria 2020</u>

P5) Sean A y B dos matrices de tamaño 3×3 tales que $|A| = |B| = \frac{1}{2}$. Calcula $|C|$ teniendo en cuenta que la matriz C es la siguiente:

$$C = (2 \cdot A^t \cdot B^{-1})^2$$ (2.5 puntos)

<u>Solución</u>:
Hay que aplicar algunas propiedades de las determinantes:

$|A| = |A^t|$; $|kA| = k^n|A|$, n es el número de filas;

$|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$; $|A^2| = (|A|)^2$; $|A^k| = (|A|)^k$; $|A^{-1}| = (|A|)^{-1} = \frac{1}{|A|}$.

Con esto, como $|A| = |B| = \frac{1}{2} \Rightarrow |A^t| = \frac{1}{2}$ y $|B^{-1}| = 2$; luego:

$$|C| = \left|\left(2\cdot A^t\cdot B^{-1}\right)^2\right| = |C| = \left|\left(2\cdot A^t\cdot B^{-1}\right)\right|^2 = \left(2^3|A^t|\cdot|B^{-1}|\right)^2 = \left(2^3\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\right)^2 = 64.$$

30. País Vasco, ordinaria 2020

Ejercicio A1

Discutir el sistema $S(a)$ en función de a, siendo

$$S(a) = \begin{cases} ax - y + 2z = & 2 \\ x - 2y - z = & 1 \\ x + 2y + az = & 3. \end{cases}$$

Resolver en función de a, mediante el método de Cramer, en los casos en que sea posible.

Solución:

El método de Cramer puede aplicarse en sistemas con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y siempre que el determiante de la matriz de coeficientes sea distinto de 0.

$$|A(a)| = \begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a(-2a+2)+a+1+8 = -2a^2+3a+9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2a^2+3a+9=0 \Rightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{9+72}}{-4} = \frac{-3\pm 9}{-4} = \begin{cases} -3/2 \\ 3 \end{cases}.$$

Por tanto, el método de Cramer puede utilizarse siempre que $a \neq -\frac{3}{2}$ y 3.

La solución será:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}} = \frac{-4a+4+a+3+16}{-2\left(a+\frac{3}{2}\right)(a-3)} = \frac{-3a+23}{-2\left(a+\frac{3}{2}\right)(a-3)};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}} = \frac{a^2+3a-2a-2+4}{-2\left(a+\frac{3}{2}\right)(a-3)} = \frac{a^2+a+2}{-2\left(a+\frac{3}{2}\right)(a-3)};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}} = \frac{-8a+2+8}{-2\left(a+\frac{3}{2}\right)(a-3)} = \frac{-8a+10}{-2\left(a+\frac{3}{2}\right)(a-3)}.$$

31. País Vasco, extraordinaria 2020

Ejercicio B1

Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular razonadamente M^{2020}

Solución:

Se obtendrá aplicando el método de inducción.

1. Se observa que:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$M^3 = M \cdot M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};\ \ldots$$

2. Se supone (conjetura) que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$, para cualquier número natural *n*.

3. Se demuestra que está fórmula vale también para el siguiente, para *n* + 1.

En efecto:

$$M^{n+1} = M \cdot M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+n & 1 \end{pmatrix} \to \text{se cumple.}$$

Por tanto, la conjetura es cierta; como consecuencia, $M^{2020} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2020 & 1 \end{pmatrix}$.