ALGUNOS PROBLEMAS DE ANÁLISIS PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE EBAU–EvAU–PEBAU … DE 2019

1. Andalucía, junio 19

Ejercicio 2A. (2,5 puntos) Sea la función f: (0, +∞) → **R** definida por $f(x)=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1, 1). (Sugerencia: cambio de variable $t=e^x$).

Solución:

Si se hace el cambio $t=e^x \Rightarrow dt=e^x dx \Rightarrow dt=t dx \Rightarrow dx=\dfrac{dt}{t}$.

Por tanto:

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x}dx=\int \frac{1+t}{1-t}\cdot\frac{dt}{t}=\int \frac{1+t}{(1-t)\cdot t}dt.$$

La última integral puede hacerse por descomposición en fracciones simples.

$$\frac{1+t}{(1-t)\cdot t}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{t}=\frac{At+B(1-t)}{(1-t)\cdot t}\Rightarrow 1+t=At+B(1-t)\Rightarrow 1+t=B+t(A-B)\Rightarrow$$

B = 1; A = 2.

Luego,

$$\int \frac{1+t}{(1-t)\cdot t}dt=\int \frac{2}{1-t}dt+\int \frac{1}{t}dt=-2\ln(1-t)+\ln t+c.$$

Deshaciendo el cambio, la primitiva pedida es $F(x)=\int f(x)dx=-2\ln\left(1-e^x\right)+x+c$.

Si su gráfica pasa por el punto (1, 1) ⇒ $F(1)=1 \to 1=-2\ln(1-e)+1+c \Rightarrow c=2\ln(1-e)$.

Por tanto, $F(x)=-2\ln\left(1-e^x\right)+x+2\ln(1-e)$.

Si se quiere que esté definida en el intervalo (0, +∞) habría que poner valores absolutos; esto es,

$$F(x)=-2\ln\left|1-e^x\right|+x+2\ln|1-e|.$$

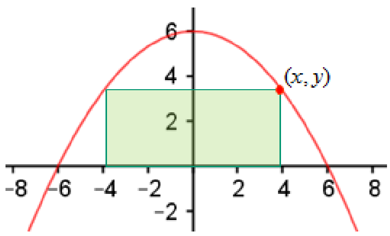
2. Andalucía, septiembre 19. Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Dada la función $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=6-\frac{1}{6}x^2$, calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido entre la gráfica de f y la recta $y=0$.

Solución:

La situación es la que se muestra en la figura adjunta.

Si (x, y) es el punto de la parábola buscado, entonces, el área del rectángulo es:



$$S=2x\cdot y,\text{ donde } y=6-\frac{1}{6}x^2\Rightarrow$$

$$S=2x\left(6-\frac{1}{6}x^2\right)=12x-\frac{1}{3}x^3.$$

El máximo de S se obtiene en la solución de $S´=0$ que hace negativa a $S´´$.

Derivando,

$$S´=12-x^2;\ S´´=-2x.$$

La derivada primera se anula en $x=\pm\sqrt{12}=\pm 2\sqrt{3}$. En $x=2\sqrt{3}$, la derivada segunda es negativa.

Las dimensiones del rectángulo son: largo, $2x=4\sqrt{3}$; alto, $y=6-\frac{1}{6}\cdot 12=4$.

<u>**3**. Andalucía, septiembre 19. Opción A</u>

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Determina la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ sabiendo que es derivable, que su función derivada cumple

$$f'(x)=\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

($\ln$ denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de f pasa por el punto $(1,0)$.

<u>Solución</u>:

La función $f(x)=\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

Una primitiva se puede encontrar haciendo el cambio $x=t^2$.

Con esto: $\sqrt{x}=t$; $dx=2tdt$.

Sustituyendo:

$$\int\frac{\ln t^2}{t}2tdt=\int\frac{2\ln t}{t}2tdt=\int 4\ln t\ dt \to \text{esta integral debe hacerse por partes.}$$

Haciendo $u=\ln t; dv=dt \Rightarrow du=\frac{1}{t}dt; v=t$, luego:

$$\int 4\ln t\ dt=4\left(t\cdot\ln t-\int dt\right)=4t\ln t-4t+c.$$

Deshaciendo el cambio,

$f(x)=4\sqrt{x}\cdot\ln\sqrt{x}-4\sqrt{x}+c \to$ como su gráfica pasa por (1, 0), $0=-4+c\Rightarrow c=4$.

La función buscada es, $f(x)=4\sqrt{x}\cdot\ln\sqrt{x}-4\sqrt{x}+4$.

<u>**4**. Andalucía, septiembre 19. Opción B</u>

Ejercicio 2.- Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=xe^{-x^2}$.

(a) [1,25 puntos] Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados y los extremos relativos de f (abscisas en los que se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) [1,25 puntos] Determina $a>0$ de manera que sea $\frac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de f en el intervalo $[0,a]$ y el eje de abscisas.

<u>Solución</u>:

a) Puntos de corte con los ejes.

Si x = 0, $f(0)=0$: punto (0, 0). Si y = 0, $0=xe^{-x^2} \Rightarrow x$ = 0: punto (0, 0).

La función solo corta en (0, 0).

Derivando:

$$f(x)=xe^{-x^2} \Rightarrow f'(x)=e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}=\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}\to$$

$$\to f''(x)=-2xe^{-x^2}-4xe^{-x^2}+4x^3e^{-x^2}=\left(-6x+4x^3\right)e^{-x^2}.$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 1-2x^2=0\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{6}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)e^{-1/2}>0\,;\ f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(-\frac{6}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)e^{-1/2}<0\,.$$

Por tanto:

- en $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ se tiene un mínimo, cuya ordenada es $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}\approx -0,43$.
- en $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ se tiene un máximo, cuya ordenada es $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}\approx 0,43$.

b) Para $x > 0$, $f(x)=xe^{-x^2}$ toma valores positivos. Por tanto, el área entre la curva de *f* y el eje *OX*, en el intervalo [0, *a*], viene dada por la integral definida $\int_0^a xe^{-x^2}dx$.

Esta integral es inmediata:

$$\int_0^a xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^a\left(-2xe^{-x^2}\right)dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^a=-\frac{1}{2}e^{-a^2}+\frac{1}{2}e^0=-\frac{1}{2}e^{-a^2}+\frac{1}{2}.$$

Como se desea que esa área valga $\frac{1}{4}$, entonces:

$$-\frac{1}{2}e^{-a^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow -\frac{1}{2}e^{-a^2}=-\frac{1}{4}\Rightarrow e^{-a^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\ln e^{-a^2}=\ln(1/2)\Rightarrow -a^2=\ln(1/2)\Rightarrow a=\sqrt{-\ln(1/2)}\approx 0,83\,.$$

5. Aragón, junio 2019, opción A

3.

a) (*1,5 puntos*) Un rectángulo tiene sus vértices en los puntos $(0,0),(a,0),(0,b)$ y (a,b), donde $a>0$ y $b>0$ y además el punto (a,b), está situado en la curva de ecuación:

$$y=\frac{1}{x^2}+9$$

De entre todos los rectángulos que cumplen esas condiciones determine el rectángulo de área mínima y calcule dicha área mínima.

b) (*1 punto*) Determine:

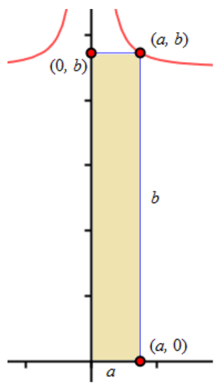
$$\int\frac{1}{9-x^2}\,dx$$

c) (*1,5 puntos*) Determine el valor de la constante k para que se verifique que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1}=2$$

Solución:

a) La situación gráfica es la adjunta.



El rectángulo tiene base *a* y altura *b*, siendo $b=\frac{1}{a^2}+9$.

Su área será $S=a\cdot b=a\cdot\left(\frac{1}{a^2}+9\right)=\frac{1}{a}+9a$.

El mínimo de *S* se da en algún punto que anule la derivada *S´* y haga positiva a *S´´*.

Derivando respecto a *a*:

$S' = -\frac{1}{a^2} + 9 \to S' = -\frac{1}{a^2} + 9 = 0 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{3}$; debe elegirse la solución positiva, $a = \frac{1}{3}$.

Como $S'' = \frac{2}{a^3}$ es positiva para $a = \frac{1}{3}$, se confirma la validez de esa solución.

Por tanto, el punto pedido es $(a,\ b) = \left(\frac{1}{3},\ f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{3},\ 18\right)$.

Los vértices del rectángulo son los puntos: (0, 0); (0, 18); $\left(\frac{1}{3},\ 18\right)$; $\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$.

El área del rectángulo será: $S = \frac{1}{3} 18 = 6$ u^2.

b) $\int \frac{1}{9-x^2} dx$ debe hacerse por descomposición en fracciones simples.

$$\frac{1}{9-x^2} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{3+x} = \frac{A(3+x)+B(3-x)}{9-x^2} \Rightarrow 1 = A(3+x)+B(3-x) \Rightarrow$$

$$1 = 3A+3B+(A+B)x \Rightarrow \begin{cases} 3A+3B=1 \\ A-B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A+3B=1 \\ 3A-3B=0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{6}; B = \frac{1}{6}.$$

Luego,

$$\int \frac{1}{9-x^2} dx = \int \frac{1/6}{3-x} dx + \int \frac{1/6}{3+x} dx = -\frac{1}{6}\ln(3-x) + \frac{1}{6}\ln(3+x) + c = \frac{1}{6}\ln\frac{3+x}{3-x} + c.$$

c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2+kx+3}{x^3-x^2-x+1} = \left[\frac{5+k}{0}\right]$. Para que exista ese límite es necesario que 5 + k valga 0. En cualquier otro caso, el límite valdrá ∞. Por tanto, k = –5.

Comprobamos que el resultado es correcto:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+2x-5}{3x^2-2x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x\to 1} \frac{6x+2}{6x-2} = \frac{8}{4} = 2.$$

6. Aragón, junio 2019, opción B

3. Considere la función:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

a) (*1,5 puntos*) Determine las asíntotas de la función, si existen.

b) (*1 punto*) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función, si existen.

c) (*1,5 puntos*) Determine la integral $\int_1^3 f(x)dx$.

Solución:

a) La función dada, $f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$, tiene dos asíntotas: una vertical, la recta x = –1; y otra horizontal, la recta y = 0. En efecto:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{-2}{0} = \pm\infty;\ \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{\infty}{\infty} = (L'H) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

b) Derivando:

$$f'(x)=\frac{(x+1)^2-(x-1)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)-(x-1)\cdot 2}{(x+1)^3}=\frac{-x+3}{(x+1)^3}$$ → se anula en $x = 3$.

Con esto:

- Si $x < -1$, como $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $-1 < x < 3$, como $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $x > 3$, $f'(x)<0$ y $f(x)$ decrece.
- Puede observarse que en $x = 3$ la función tiene un máximo.

c) La integral $\int \frac{x-1}{(x+1)^2}dx$ puede escribirse como suma de dos integrales inmediatas. Así:

$$\int \frac{x-1}{(x+1)^2}dx=\int \frac{x+1-2}{(x+1)^2}dx=\int\left(\frac{x+1}{(x+1)^2}-\frac{2}{(x+1)^2}\right)dx=\int \frac{1}{x+1}dx-\int \frac{2}{(x+1)^2}dx =$$

$$= \ln(x+1)+\frac{2}{x+1}+c.$$

Con esto,

$$\int_1^2 \frac{x-1}{(x+1)^2}dx=\left[\ln(x+1)+\frac{2}{x+1}\right]_1^3=\ln 4+\frac{1}{2}-(\ln 2+1)=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

7. Aragón, septiembre 2019, opción A

3.

a) (*1 punto*) Determine el límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln((1+x)^2)}-\frac{1}{x}\right)$$

b) (*1 punto*) Determine el valor de la constante k para que la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-1}{x-1}, & \text{si } x\neq 1\\ k-x, & \text{si } x=1\end{cases}$$

sea continua en $x=1$.

c) (*2 puntos*) La curva $y=x^2+1$ divide al rectángulo limitado por los vértices $A:(0,1)$, $B:(2,1)$, $C:(0,5)$ y $D:(2,5)$ en dos partes. Determine el área de cada una de esas dos partes.

Solución:

a) Operando:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln\left((1+x)^2\right)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{2\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty\right).$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\cdot\ln(1+x)}\right)=\left[\frac{0}{0}\right] \to \text{L`Hôpital} \to \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}\right)=\left[\frac{0}{0}\right] \to$$

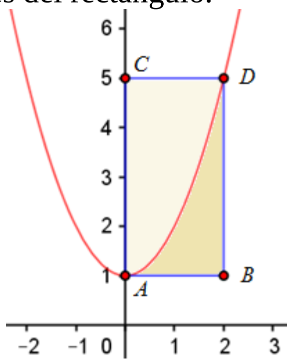
$$\to (\text{L´H}) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}}\right)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

b) Será continua cuando $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1} = (L'H) = \lim_{x\to 1} \frac{4x^3}{1} = 4.$$

Como $f(1) = k-1$, debe cumplirse que $k-1=4 \Rightarrow k=5$.

c) Las regiones son las sombreadas en la figura adjunta.
Puntos de la parábola son: (0, 1); (2, 5); (–2, 5). Dos de ellos son vértices del rectángulo.



El área de la región más clara viene dada por la integral definida,

$$\int_0^2 \left(5-\left(x^2+1\right)\right)dx = \int_0^2 \left(4-x^2\right)dx =$$

$$\left.\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^2 = 8-\frac{8}{3} = \frac{16}{3} \text{ u}^2.$$

El área de la región más oscura es:

$$\int_0^2 \left(\left(x^2+1\right)-1\right)dx = \int_0^2 x^2 dx = \left.\left(\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^2 = \frac{8}{3} \text{ u}^2.$$

Puede observarse que entre las dos suman 8, que es el área del rectángulo.

8. Aragón, septiembre 2019, opción B

3.

a) (*1 punto*) Considere la función:

$$f(x) = \frac{2x^3+kx^2+x+3}{x^2+2}$$

Determine el valor de k para que la función $f(x)$ tenga como asíntota oblicua, cuando $x\to+\infty$, la recta $y=2x-1$.

b) (*1,5 puntos*) Determine

$$\int x(\ln(x))^2 dx$$

c) (*1,5 puntos*) Determine, si existen, los máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$$

Solución:

a) La recta $y = mx+n$ (en este caso, $y = 2x-1$) es asíntota oblicua de la gráfica de $f(x)$ cuando se cumple que:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+kx^2+x+3}{x\left(x^2+2\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+kx^2+x+3}{x^3+2x} = 2 \text{ (no depende de } k\text{)}.$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x)-mx\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3+kx^2+x+3}{\left(x^2+2\right)} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{kx^2-3x+3}{x^2+21}\right) = k = -1.$$

b) $\int x\left(\ln(x)\right)^2 dx$ debe hacerse por partes.

Si $u = (\ln x)^2 \Rightarrow du = \frac{2}{x}(\ln x)dx$

$dv = xdx \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2}$.

Luego: $\int x(\ln(x))^2\,dx = \dfrac{x^2}{2}\cdot(\ln x)^2 - \int x(\ln(x))\,dx$ → Otra vez por partes.

$u' = \ln x \Rightarrow du' = \dfrac{1}{x}dx$; $dv' = xdx \Rightarrow v' = \dfrac{x^2}{2}$.

Luego:

$$\int x(\ln(x))^2\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot(\ln x)^2 - \left(\frac{x^2}{2}\cdot(\ln x) - \int \frac{x}{2}dx\right) = \frac{x^2}{2}\cdot(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\cdot(\ln x) + \frac{x^2}{4} + c.$$

c) Derivando $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{x^2}$; $f'''(x) = -\dfrac{6}{x^4} + \dfrac{2}{x^3}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow -\frac{-1+x}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1; \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{2-x}{x^3} = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Como $f''(1) = \dfrac{2}{1^3} - \dfrac{1}{1^2} = 1 > 0$, en $x = 1$ se tiene un mínimo relativo.

Como $f'''(2) = -\dfrac{6}{2^4} + \dfrac{2}{2^3} = -\dfrac{1}{2^3} \neq 0$, en $x = 2$ se tiene un punto de inflexión.

9. Asturias, junio 19, opción A

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{2+e^x}$.

a) Calcula su dominio de definición y sus asíntotas. (1 punto)

b) Mediante el cambio de variable $t = e^x$, calcula $\int \dfrac{2}{2+e^x}dx$ (1.5 puntos)

Solución:

a) La función $f(x) = \dfrac{2}{2+e^x}$ está definida para todo número real x: el denominador $2+e^x > 0$ para todo x.

Tiene dos asíntotas horizontales, una hacia $+\infty$ y otra hacía $-\infty$, pues:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{2+e^x} = \frac{2}{2+0^+} = 1; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2+e^x} = \frac{2}{2+\infty} = 0.$$

Las asíntotas son las rectas $y = 1$ (hacia $-\infty$); e $y = 0$, hacia $+\infty$.

b) Si $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow dx = \dfrac{1}{e^x}dt = \dfrac{1}{t}dt$. Luego:

$$\int \frac{2}{2+e^x}dx = \int \frac{2}{2+t}\cdot\frac{1}{t}dt = \int \frac{2}{(2+t)\cdot t}dt.$$

La última integral puede hacerse por descomposición en fracciones simples.

$$\frac{2}{(2+t)\cdot t} = \frac{A}{2+t} + \frac{B}{t} = \frac{At + B(2+t)}{(2+t)\cdot t} \Rightarrow 2 = At + B(2+t) \Rightarrow 2 = 2B + t(A+B) \Rightarrow$$

$B = 1$; $A = -1$.

Luego,

$$\int \frac{2}{(2+t)\cdot t}dt = \int \frac{-1}{2+t}dt + \int \frac{1}{t}dt = -\ln(2+t) + \ln t + c\,.$$

Deshaciendo el cambio, la integral pedida vale:

$$\int \frac{2}{2+e^x}dx = -\ln\left(2+e^x\right) + \ln e^x + c = -\ln\left(2+e^x\right) + x + c\,.$$

10. Asturias, junio 19, opción B

2. Dada la curva $y = \dfrac{1}{3+x^2}$.

a) Expresa la función $m(x)$ que da la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto x. (1 punto)

b) Calcula el valor x donde se alcanza la máxima pendiente. (1.5 puntos)

Solución:

a) La pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ viene dada por su derivada.

Como

$$y = \frac{1}{3+x^2} \Rightarrow y' = m(x) = \frac{-2x}{\left(3+x^2\right)^2}\,.$$

b) La pendiente, $m(x)$, es máxima en los puntos en los que $m'(x) = 0$ y $m''(x) < 0$.

Nota: La pendiente de una curva es máxima (o mínima) en sus puntos de inflexión. En esos puntos la recta tangente atraviesa a la curva.

$$m'(x) = \frac{-2\cdot\left(3+x^2\right)^2 + 2x\cdot 2\left(3+x^2\right)\cdot 2x}{\left(3+x^2\right)^4} = \frac{-2\cdot\left(3+x^2\right) + 2x\cdot 2\cdot 2x}{\left(3+x^2\right)^3} = \frac{6x^2-6}{\left(3+x^2\right)^3}\,.$$

$$m'(x) = 0 \to x = -1;\, x = 1.$$

$$m''(x) = \frac{12x\cdot\left(3+x^2\right)^3 - \left(6x^2-6\right)\cdot 3\left(3+x^2\right)^2\cdot 2x}{\left(3+x^2\right)^6} = \frac{12x\cdot\left(3+x^2\right) - \left(6x^2-6\right)\cdot 6x}{\left(3+x^2\right)^4} = \frac{-24x^3+72x}{\left(3+x^2\right)^4}$$

Como $m''(-1) < 0$, en $x = -1$ se encuentra el máximo buscado.

En $x = 1$ se da el mínimo de la pendiente, pues $m''(1) > 0$.

11. Asturias, julio 19, opción A

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+1}$

a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (1 punto)

b) Halla, si existen: máximos y mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)

c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

Solución:

a) La función $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+1}$ está definida para todo número real $x \neq -1$; en ese punto se anula el denominador: $x+1=0$.

Tiene dos asíntotas: una vertical, en $x = -1$; otra horizontal, hacia $+\infty$.

En efecto:

$$\lim_{x\to -1} \frac{e^{-x}}{x+1} = \frac{e}{0} = \pm\infty\,;\quad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-x}}{x+1} = \frac{e^{-\infty}}{\infty+1} = \frac{0}{\infty} = 0\,.$$

Las asíntotas son las rectas $x = –1$ e $y = 0$.

b) Derivando:

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{-e^{-x}(x+1)-e^{-x}}{(x+1)^2}=\frac{-e^{-x}(x+2)}{(x+1)^2} \to \text{se anula en } x=-2.$$

Con esto:

- Si $x < –2$, como $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $–2 < x < –1$, como $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

En consecuencia, en $x = –2$ se tiene un máximo relativo

- Si $x > –1$, $f'(x)<0$ y $f(x)$ decrece.
- Por tanto, no hay mínimos.

c) Para hacer un esbozo de su gráfica conviene estudiar la posición de la curva respecto de las asíntotas.

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{e^{-x}}{x+1}=\frac{e}{0^-}=-\infty:$$

$\to$ a la izquierda de –1 la función se va hacia $-\infty$;

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{e^{-x}}{x+1}=\frac{e}{0^+}=+\infty:$$

$\to$ por la derecha de –1 la función tiende hacia $+\infty$;

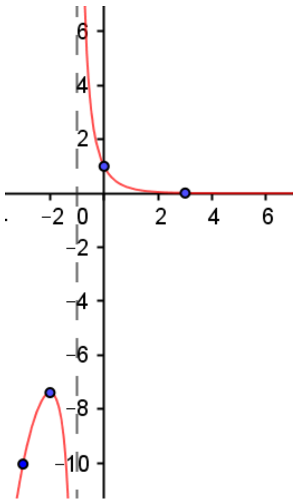
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{-x}}{x+1}=\frac{0^+}{+\infty}=0^+:$$

$\to$ para valores muy grande de x la función se “pega” al eje OX por encima de él.

Además, puede observarse que la función nunca corta al eje OX.

Algunos valores.

$(–3, –e^3/2) \approx (–3, –10{,}04)$; $(–2, –e^2)$, máximo; $(0, 1)$;
$(1, e^{-1}/2) \approx (1, 0{,}18)$; $(3, e^{-3}/4) \approx (3, 0{,}012)$



12. Asturias, julio 19, opción B

2. Dadas las curvas $y = x^2/2$, $y = 4/x$.

a) Calcula sus puntos de corte. (0.5 puntos)

b) Esboza una gráfica de las curvas en el intervalo $[1, 3]$. (1 punto)

c) Calcula el área que delimitan entre ellas en el intervalo $[1, 3]$. (1 punto)

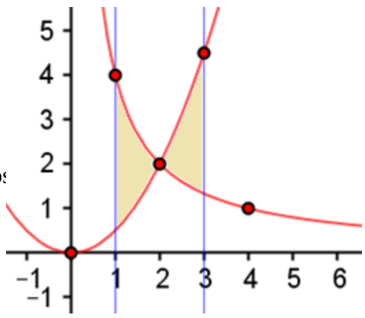
Solución:

a) Los puntos de corte son las soluciones del sistema: $\begin{cases} y = x^2/2 \\ y = 4/x \end{cases}$.

Igualando: $\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{4}{x} \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x=2$. Punto (2, 2).

b) Como las curvas son las de una parábola y una hipérbola equilátera, sus gráficas pueden trazarse dando valores. Son las que se observan a la derecha.

c) El área pedida es la de la región sombreada en la figura. Su valor es:



$$S=\int_1^2\left(\frac{4}{x}-\frac{x^2}{2}\right)dx+\int_2^3\left(\frac{x^2}{2}-\frac{4}{x}\right)dx\Rightarrow$$

$$S=\left(4\ln x-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_1^2+\left(\frac{x^3}{6}-4\ln x\right)\Bigg|_2^3=$$

$$=4\ln 2-\frac{8}{6}-\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{27}{6}-4\ln 3-\left(\frac{8}{6}-4\ln 2\right)=2+8\ln 2-4\ln 3 \text{ u}^2.$$

13. Baleares, junio 19, opción A

2. Les funcions $f(x)=x^4+ax^2+bx$ i $g(x)=x-cx^2$ passen pel punt $(1,0)$. Determinau els coeficients a, b i c perquè tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt i calculau-la.
(10 punts)

Solución:

→ Si pasan por el punto (1, 0), entonces $f(1)=0$ y $g(1)=0$:

$f(1)=0\Rightarrow 1+a+b=0$; $g(1)=0\Rightarrow 1-c=0\Rightarrow c=1$.

→ Si tienen la misma recta tangente en el punto (1, 0), entonces $f'(1)=g'(1)$:

$g'(x)=1-2x\to g'(1)=-1$; $f'(x)=4x^3+2ax+b\to f'(1)=4+2a+b=-1$.

Resolviendo $\begin{cases}1+a+b=0\\4+2a+b=-1\end{cases}\Rightarrow a=-4; b=3$.

Por tanto: $a=-4$; $b=3$; $c=1$.

Las funciones serán: $f'(x)=x^4-4x^2+3x$; $g(x)=x-x^2$.

La recta tangente será:

$y-g(1)=g'(1)(x-1)\to y-0=-1\cdot(x-1)\Rightarrow y=-x+1$.

14. Cantabria, junio 19. (EXAMEN N.º 2)

Ejercicio 2

Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{sen(x)}{2x} & \text{si } x<0\\[2mm] \dfrac{a-x^2}{2+x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

1) [1 PUNTOS] Determine, si existe, el valor de a que haga a la función continua en $x=0$.

2) [1.5 PUNTOS] Calcule el valor de a para que f tenga un extremo relativo en $x=2$. ¿Es este extremo un máximo o mínimo local?

3) [0.5 PUNTOS] Sea $g(x)$ una función integrable, si $\int_0^3 g(x)dx=4$ y $\int_2^3 g(x)dx=6$, ¿Cuánto vale $\int_0^2 g(x)dx$?

Solución:

1) La función dada será continua en $x=0$ cuando los límites laterales en ese puno sean iguales:

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{2x} = \frac{0}{0} \to \text{(aplicando L´Hôpital)} \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{a-x^2}{2+x} = \frac{a}{2} \to \text{para que } \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1.$$

2) Para $x = 2$, $f(x) = \dfrac{a-x^2}{2+x}$: tendrá un máximo relativo en $x = 2$ si $f´(2) = 0$.

Derivando:

$$f´(x) = \frac{-2x\cdot(2+x)-(a-x^2)\cdot 1}{(2+x)^2} = \frac{-x^2-4x-a}{(2+x)^2} \to f´(2) = \frac{-4-8-a}{(2+2)^2} = 0 \Rightarrow a = -12.$$

Luego, $f´(x) = \dfrac{-x^2-4x+12}{(2+x)^2}$.

La derivada segunda es:

$$f´´(x) = \frac{(-2x-4)\cdot(2+x)^2-(-x^2-4x+12)\cdot 2(2+x)}{(2+x)^4} = \frac{(-2x-4)\cdot(2+x)-(-x^2-4x+12)\cdot 2}{(2+x)^3}$$

$$\Rightarrow f´´(x) = \frac{-32}{(2+x)^3}.$$

Como $f´´(2) < 0$, en $x = 2$ se da un máximo relativo.

3) Para cualquier función integrable, si $a < c < b$, se cumple:

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^c g(x)dx + \int_c^b g(x)dx \to \text{en este caso: } \int_0^3 g(x)dx = \int_0^2 g(x)dx + \int_2^3 g(x)dx.$$

Como, $\displaystyle\int_0^3 g(x)dx = 4$ y $\displaystyle\int_2^3 g(x)dx = 6 \Rightarrow 4 = \int_0^2 g(x)dx + 6 \Rightarrow \int_0^2 g(x)dx = -2$.

<u>**15**. Cantabria, julio 19. (EXAMEN N.º 2)</u>

Ejercicio 2

Sea $f(x)$ la función definida en $(0,\infty)$ dada por $f(x) = x\ln(x)$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

1) [1 PUNTO] Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

2) [2 PUNTOS] Calcule $\displaystyle\int_2^e f(x)dx$.

<u>Solución</u>:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0\cdot(-\infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \to \text{(aplicando L´Hôpital)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

b) La integral indefinida Luego: $\displaystyle\int x(\ln(x))\,dx$ debe hacerse por partes.

Tomando:

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$; $dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$.

se tiene:

$$\int x(\ln(x))\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot(\ln x) - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\cdot(\ln x) - \frac{x^2}{4} + c.$$

Por tanto,

$$\int_2^e x\ln(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\cdot(\ln x) - \frac{x^2}{4}\right]_2^e = \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{e^2}{4} - (2\ln 2 - 1) = \frac{e^2}{4} + 1 - 2\ln 2.$$

16. Castilla y León, junio 19, opción A

E4.- a) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x\,\text{sen}(x)}$. **(1 punto)**

b) Calcular el área encerrada por las gráficas de $f(x) = 4x$ y de $g(x) = x^3$ en el intervalo $[0,2]$, probando anteriormente que en dicho intervalo $f \geq g$. **(1 punto)**

Solución:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x\sin(x)} = \frac{1-1}{0\cdot 0} = \frac{0}{0} \to$ (Aplicando L´Hôpital):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{\sin(x)+x\cos(x)} = \frac{0}{0} = (L´H) = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)} = -\frac{1}{2}.$$

b) En [0, 2], $f(x) \geq g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) \geq 0$.

$f(x) - g(x) = 4x - x^3 = x\cdot(4 - x^2) \to$ como en [0, 2] ambos factores son positivos, se cumple la relación dada.

Como, efectivamente, en [0, 2], $f(x) \geq g(x)$, el área pedida viene dada por:

$$\int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^2 (4x - x^3)\,dx = \left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 = 8 - 4 = 4 \text{ u}^2.$$

17. Castilla y León, junio 19, opción B

E4.- a) Sea $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$. Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. **(1 punto)**

b) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{x\,\text{sen}(x)}{3\cos(x)-3}$. **(1punto)**

Solución:

a) La función $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$ es decreciente y positiva en el intervalo [0, 2].

En efecto:

$\to$ su derivada,

$$f´(x) = \frac{2(x^2+3x+1) - (2x+3)\cdot(2x+3)}{(x^2+3x+1)^2} = \frac{-2x^2-6x-7}{(x^2+3x+1)^2}$$ < 0 para valores de $x \geq 0$, pues

$-2x^2 - 6x - 7 < 0$ si $x > 0$; lo que significa que la función es decreciente.

$\to$ como $f(2)=\dfrac{7}{11}>0$.

$\to$ se deduce que es positiva en el intervalo [0, 2].

En consecuencia, el área pedida viene dada por la integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+3x+1}dx$.

Su valor es:

$$\int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+3x+1}dx=\ln\left(x^2+3x+1\right)\Big|_0^2=\ln 11-\ln 1=\ln 11 \text{ u}^2.$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{3\cosn(x)-3}=\frac{0}{3-3}=\frac{0}{0}$ $\to$ (Aplicando L´Hôpital):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{3\cos(x)-3}=\left(L´H\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)+x\cos(x)}{-3\sin(x)}=\frac{0}{0}=$$

$$=\left(L´H\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)}{-3\cos(x)}=-\frac{2}{3}.$$

18. Castilla y León, julio 19, opción B

E4.- a) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{e^x-\cos x}$ **(1 punto)**

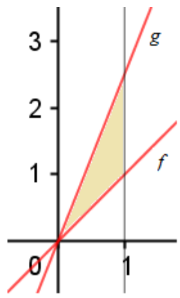
b) Calcular a, siendo $a>1$, para que el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)=x$, $g(x)=ax$ y $x=1$ sea 1. **(1 punto)**

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-\cos x}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}$ $\to$ (Aplicando L´Hôpital):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-\cos x}=\left(L´H\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{e^x+\sin x}=\frac{1}{1}=1.$$

b) Las gráficas de las funciones $f(x)=x$ y $g(x)=ax$ se cortan en el punto (0, 0); además, si $a>1$, para valores de $x>0$ se cumple que $g(x)>f(x)$. En consecuencia, el área de la región del plano comprendida entre sus gráficas y $x=1$ viene dada por la integral $\displaystyle\int_0^1\left(ax-x\right)dx$ $\to$



$$\int_0^1\left(ax-x\right)dx=\left(\frac{a-1}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{a-1}{2}.$$

Como se desea que esa área valga 1, entonces: $\dfrac{a-1}{2}=1\Rightarrow a=3$.

19. Castilla–La Mancha, junio 19

1A. a) Determina el valor de *a* y de *b* para que la siguiente función *f(x)* sea derivable en todo R

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+2 & si \quad x\le 1 \\ a\sqrt{x}-\dfrac{b}{x^2} & si \quad x>1 \end{cases} \quad \text{(1,5 puntos)}$$

b) Comprueba si la función $f(x)=x^2-4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [–3; 3]. (1 punto)

Solución:

a) La función $f(x)$ será derivable en todo **R** cuando lo sea en el punto $x = 1$, que es el único punto que presenta dificultades. Para ello deben cumplirse dos cosas:

1) que sea continua en $x = 1$, lo que exige que $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$;

2) que sea derivable en $x = 1$, lo que exige que $\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^+} f'(x)$;

→ Continuidad:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(ax^2+bx+2\right)=a+b+2;\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(a\sqrt{x}-\frac{b}{x^2}\right)=a-b.$$

Como deben ser iguales: $a+b+2=a-b\Rightarrow 2b+2=0\Rightarrow b=-1$.

Luego:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-x+2 & \text{si } x\le 1 \\ a\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x>1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2ax-1 & \text{si } x<1 \\ \dfrac{a}{2\sqrt{x}}-\dfrac{2}{x^3} & \text{si } x>1 \end{cases}.$$

→ Derivabilidad:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(2ax-1\right)=2a-1;\quad \lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{a}{2\sqrt{x}}-\frac{2}{x^3}\right)=\frac{a}{2}-2.$$

Como deben ser iguales: $2a-1=\dfrac{a}{2}-2\Rightarrow 4a-2=a-4\Rightarrow a=-\dfrac{2}{3}$.

Luego:

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{2}{3}x^2-x+2 & \text{si } x\le 1 \\ -\dfrac{2}{3}\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x>1 \end{cases}.$$

b) El teorema de Rolle dice:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo [*a*, *b*] y derivable en el intervalo (*a*, *b*), y además $f(a) = f(b)$, entonces, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c)=0$.

La función $f(x)=x^2-4$ es continua y derivable en todo **R**; en particular en el intervalo [–3, 3].

Como, además, $f(-3)=f(3)=5$, se deduce que la función verifica las hipótesis de Rolle; luego existe un punto $c \in (-3, 3)$ tal que $f'(c)=0$.

Ese punto es $x = 0$, que en este caso es la abscisa del vértice de la parábola dada.

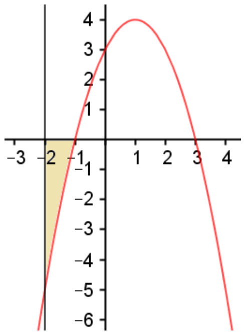
20. Castilla–La Mancha, junio 19, opción A

2A. a) Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, la recta $x = -2$ y el eje de abscisas. **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$. **(1 punto)**

Solución:

a) El recinto es el sombreado en la figura adjunta. (La parábola puede trazarse dando valores; corta al eje *OX* en los puntos –1, 3; en el intervalo de integración la función toma valores negativos).



Su área viene dada por:

$$-\int_{-2}^{-1}\left(-x^2+2x+3\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{3}+2-\left(-\frac{8}{3}+2\right)=\frac{7}{3}\ \text{u}^2.$$

b) La ecuación de la recta tangente a $g(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$ es: $y-g(4)=g´(4)\cdot(x-4)$.

La ecuación de la normal será: $y-g(4)=-\dfrac{1}{g´(4)}\cdot(x-4)$.

Como $g´(x)=-2x+2 \Rightarrow g´(4)=-6$; luego, la normal será:

$$y-(-5)=\frac{1}{6}\cdot(x-4) \Leftrightarrow y=\frac{1}{6}x-\frac{34}{6}.$$

21. Castilla–La Mancha, junio 19, opción B

1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}} \qquad \text{b) } \lim_{x\to -1}\frac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}$$

(1,25 puntos por límite)

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}=\left(\frac{2}{2}\right)^{\frac{1}{0}}=\left[1^{\infty}\right]$.

Puede hacerse aplicando logaritmos y la regla de L´Hôpital.

$$\ln\left(\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\ln\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}\ln\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)\right)=[\infty\cdot 0] =$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln\left(\dfrac{2e^{x-1}}{x+1}\right)}{\dfrac{x-1}{x}}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=(L´H)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln 2e^{x-1}-\ln(x+1)}{1-\dfrac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x^2}}\right)=\frac{1}{2}.$$

Por tanto, $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}=e^{1/2}=\sqrt{e}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\left(\frac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)$ → (Aplicando L´Hôpital) → $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{-2xe^{x^2-1}-1}{2x+4}=\frac{1}{2}$.

22. Castilla–La Mancha, junio 19, opción B

1B. a) Demuestra que la ecuación $\operatorname{sen} x - 2x + 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, \pi]$. **(1,5 puntos)**
b) Calcula razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación anterior cuando $x \in [-200, 200]$. **(1 punto)**

Solución:
a) Hay que aplicar el teorema de Bolzano a la función $f(x) = \sin x - 2x + 1$, que es continua en el intervalo $[0, \pi]$.
El teorema dice lo siguiente: "Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".
Esto significa que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución entre *a* y *b*; esa solución es el valor *c* cuya existencia afirma el teorema.
En este caso, como $f(0) = \sin 0 - 2 \cdot 0 + 1 = 1 > 0$ y $f(\pi) = \sin \pi - 2 \cdot \pi + 1 = -2\pi < 0$, se deduce que la función tiene una raíz real en el intervalo $[0, \pi]$.

b) Si $f(x) = \sin x - 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = \cos x - 2$. Como la derivada es negativa en todo **R**, entonces, la función siempre es decreciente. Por consiguiente, solo corta una vez al eje *OX*.
Luego la ecuación $\sin x - 2x + 1 = 0$ solo tiene una raíz en el intervalo $[-200, 200]$.

23. Castilla–La Mancha, julio 19, opción B

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)e^{-x}\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx$ **(1,25 puntos por integral)**

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

Solución:
a) $\displaystyle\int (x+1)e^{-x}dx = \int xe^{-x}dx + \int e^{-x}dx$.

La primera integral debe hacerse por partes; la segunda es inmediata: $\int e^{-x}dx = -e^{-x}$

Haciendo $\left\{\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{-x}dx \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{array}\right.$, se tiene: $\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}$.

Luego, $\displaystyle\int (x+1)e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} - e^{-x} = -(x+2)e^{-x}$.

Por tanto: $\displaystyle\int_0^1 (x+1)e^{-x}dx = \left[-(x+2)e^{-x}\right]_0^1 = -3e^{-1} + 2$.

b) Si $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow 2dt = \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$.

Sustituyendo:
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+t^2\right)}dx = \int \frac{2}{\left(1+t^2\right)}dt = 2\arctan t + c.$$

Deshaciendo el cambio: $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = 2\arctan\sqrt{x} + c$.

24. Cataluña, junio 19

4. Considereu la funció $f(x)=\dfrac{2x^3-5x+4}{1-x}$.

a) Calculeu-ne el domini i estudieu-ne la continuïtat. Té cap asímptota vertical?
[1 punt]

b) Observeu que $f(-2)=-\dfrac{2}{3}$, $f(0)=4$ i $f(2)=-10$. Raoneu si, a partir d'aquesta informació, podem deduir que l'interval (–2, 0) conté un zero de la funció. Podem deduir-ho per a l'interval (0, 2)? Trobeu un interval determinat per dos enters consecutius que contingui, com a mínim, un zero d'aquesta funció.
[1 punt]

Solución:

a) La función $f(x)=\dfrac{2x^3-5x+4}{1-x}$ no está definida en el punto $x = 1$; por tanto, en ese punto la función no es continua.

Como $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-5x+4}{1-x}=\dfrac{1}{0}=\pm\infty \Rightarrow$ la recta $x = 1$ es asíntota vertical de la función.

b) Se trata de una aplicación del teorema de Bolzano, que dice: "Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a)<0<f(b)$ o $f(a)>0>f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c)=0$".

Esto significa que la ecuación $f(x)=0$ tiene una solución (un cero) entre a y b; esa solución es el valor c cuya existencia afirma el teorema.

- Para el intervalo [–2, 0], la función cumple las hipótesis del teorema: es continua y, además, $f(-2)=-\dfrac{2}{3}<0$ y $f(0)=4>0$. Por tanto, la función tiene un cero en ese intervalo.
- En el intervalo [0, 2], la función no cumple las hipótesis del teorema: es discontinua en $x = 1$. Por tanto, no puede asegurarse que la función tenga un cero en ese intervalo.

- Como $f(-2)=-\dfrac{2}{3}<0$ y $f(-1)=\dfrac{7}{2}>0$, la función dada, que es continua en el intervalo [–2, –1], tiene un cero entre los números –2 y –1.

25. Cataluña, septiembre 19

4. Considere la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica en aquellos puntos en los que la recta tangente es horizontal.
[1 punto]

b) Calcule las coordenadas del punto de la gráfica de la función $f(x)$ en que la pendiente de la recta tangente es máxima.
[1 punto]

Solución:

a) La tangente es horizontal en los puntos con derivada 0.

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2} \to f'(x)=0 \text{ en } x=0.$$

La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ es:

$$y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0) \to y-1=0 \Rightarrow y=1.$$

b) La pendiente de la recta tangente es máxima (o mínima) en los puntos de inflexión, puntos en los que $f''(x)=0$.

$$f''(x)=\frac{-2\left(1+x^2\right)^2-(-2x)\cdot 2\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{-2\left(1+x^2\right)+8x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{-2+6x^2}{\left(1+x^2\right)^3};$$

$$f''(x)=0 \text{ cuando } -2+6x^2=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Será máxima en la solución que haga negativa a $f'''(x)$, cuya expresión es,

$$f'''(x)=\frac{12x\left(1+x^2\right)^3-\left(-2+6x^2\right)3\left(1+x^2\right)^2\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^6}=\frac{12x\left(1+x^2\right)-\left(-2+6x^2\right)3\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4} \to$$

$$f'''(x)=\frac{24x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4} \Rightarrow f'''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)<0;\ f'''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)>0.$$

Luego, la pendiente de la recta tangente es máxima en el punto

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right).$$

26. Cataluña, septiembre 19

6. Considere la función $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$.

a) Calcule el dominio de la función *f*, los puntos de corte de la gráfica de *f* con los ejes de coordenadas, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.
[1 punto]

b) Calcule el área de la región del plano determinada por la gráfica de la función *f*, las rectas $x = 1$ y $x = \mathrm{e}$, y el eje de abscisas.
[1 punto]

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ está definida cuando $x > 0$. Dom(*f*) = (0, +∞).

No corta al eje *OY*, pues la *x* nunca toma el valor 0.

Corte con eje *OX*: si $y = 0 \Rightarrow \ln(x)=0 \Rightarrow x = 1$, punto (1, 0).

Derivando:

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln(x)\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2} \to \text{se anula en } x = e.$$

- Si $0<x<e$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $x>e$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

Se puede deducir que en $x = e$, la función tiene el máximo.

b) En el intervalo $(1, e)$ la función toma valores positivos. Por tanto, el área pedida viene dada por la integral definida $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx$.

Una primitiva de $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ puede obtenerse haciendo el cambio de variable $\ln(x)=t$, pues $dt=\dfrac{1}{x}dx$; de donde:

$$\int\frac{\ln(x)}{x}dx=\int\ln(x)\cdot\frac{1}{x}dx=\int tdt=\frac{t^2}{2} \to \int\frac{\ln(x)}{x}dx=\frac{(\ln x)^2}{2}.$$

Por tanto,

$$\int_1^e\frac{\ln(x)}{x}dx=\left.\frac{(\ln x)^2}{2}\right|_1^e=\frac{1}{2}\ \text{u}^2.$$

27. Comunidad Valenciana, junio 19

Problema A.3. Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. (3 *puntos*)

b) La representación gráfica de la curva $y = f(x)$. (2 *puntos*)

c) El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ a la función $g(x) = f(x) + ax$. (1 *punto*)

d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)\,dx$, $\int xe^{-x}\,dx$. (4 *puntos*)

Solución:

a) Tiene una asíntota horizontal, tanto hacia $-\infty$ como hacia $+\infty$, pues:

$$\lim_{x\to\pm\infty} xe^{-x^2} = [\infty\cdot 0] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L'H) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0.$$

La asíntota es la recta $y = 0$.

Derivando:

$$f(x) = xe^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = \left(1-2x^2\right)e^{-x^2}.$$

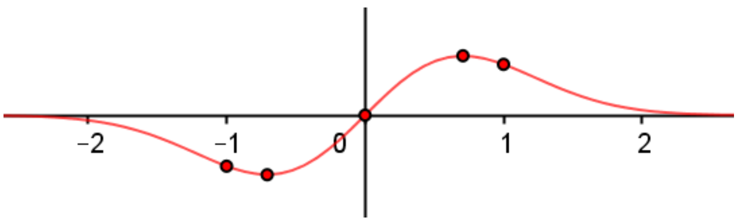
La derivada se anula cuando $1-2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

- Si $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decrece.
- Si $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crece. En $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ hay un mínimo.
- Si $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decrece. En $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ hay un máximo.

b) Dando algunos valores y teniendo en cuenta lo visto en el apartado a) se obtiene la gráfica siguiente.

Puntos:

$(-1, -e^{-1})$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}\right) \approx (-0,707, -0,43)$; $(0, 0)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}\right) \approx (0,707, 0,43)$; $(1, e^{-1})$.



c) Teorema de Rolle: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), y además $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

La función, $g(x) = xe^{-x^2} + ax$, es continua y derivable en el intervalo $[0, 1]$. Debe cumplir que $g(0) = g(1)$.

Como $g(0) = 0$ y $g(1) = e^{-1} + a \Rightarrow e^{-1} + a = 0 \Rightarrow a = -e^{-1}$.

d) La primera integral es inmediata:

$$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int\left(-2xe^{-x^2}\right)dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c\,.$$

La segunda integral, $\int xe^{-x}dx$ debe hacerse por partes.

Se toma:

$$u = x \Rightarrow du = dx\,; \quad dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}\,.$$

Por tanto:

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c\,.$$

28. Comunidad Valenciana, junio 19

Problema B.3. Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son (0, 0) y (250, 0), respectivamente, siendo 1km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1, 0) y (0, 1).

El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0,\ \frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

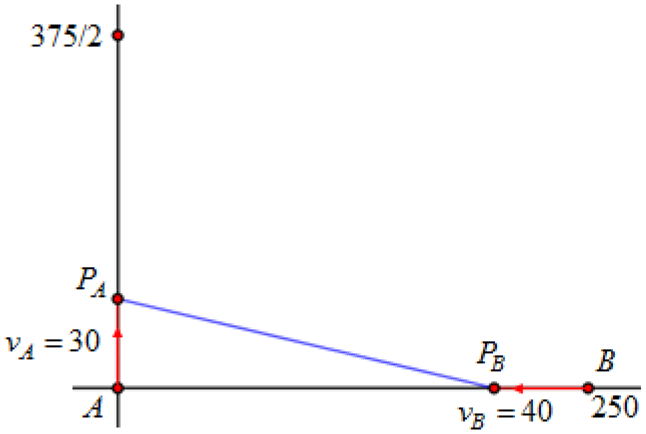
a) La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse. (2 *puntos*)

b) El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f a lo largo del trayecto. (4 *puntos*)

c) Los valores de t para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima. (4 *puntos*)

Solución:

Un esquema de la situación planteada se da en la figura adjunta.



En el instante t, el móvil A, que lleva una velocidad de 30 km/h, habrá recorrido $30t$ km. Estará en el punto $P_A = (0,\ 30t)$.

En ese mismo instante t, el móvil B, que lleva una velocidad de 40 km/h (hacia la izquierda), habrá recorrido $40t$ km. Estará en el punto $P_B = (250 - 40t,\ 0)$.

La distancia entre ellos viene determinada por la función:

$$f(t) = d(P_A, P_B) = \sqrt{(30t)^2 + (250 - 40t)^2} \Rightarrow f(t) = \sqrt{2500t^2 - 20000t + 62500}\,.$$

b) El tiempo que tarda A es $T_A = \dfrac{375/2}{30} = 6,25$ h.

El tiempor que tarda B es: $T_B = \dfrac{250}{40} = 6,25$. Tardan el mismo tiempo.

Derivando e igualando a 0:

$$f'(t)=\frac{5000t-20000}{2\sqrt{2500t^2-20000t+62500}}=0\Rightarrow t=4.$$

Con esto:

- Si $0\le t<4$, como $f'(t)<0$, la función decrece (la distancia entre los móviles disminuye).
- Si $4<t\le 6{,}25$ como $f'(t)>0$, la función crece (la distancia entre los móviles aumenta).

c) De lo dicho más arriba se deduce que la distancia mínima se da en el instate t = 4 (a las 4 horas). Esa distancia es de $f(4)=\sqrt{22500}=150$ km.

Como $f(0)=250$ km y $f(6,25)=\dfrac{375}{2}=187,5$ km, la distancia máxima será la inicial, 250 km. (A partir del momento inicial la distancia decrece, hasta ser de 150 km cuando t = 4; desde ese momento hasta t = 6,25 la distancia crece, hasta ser de 187,5 km).

29. Comunidad Valenciana, julio 19

Problema B.3. Un proyectil está unido al punto $(0,2)$ por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y=4-x^2$ de extremos $(-2,0)$ y $(2,0)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x,4-x^2)$ de la curva $y=4-x^2$ y el punto $(0,2)$. (2 *puntos*)

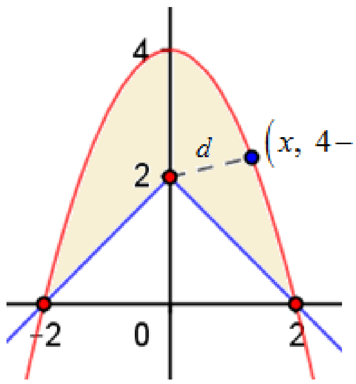
b) Los puntos de la curva $y=4-x^2$ a mayor distancia absoluta del punto $(0,2)$ para $-2\le x\le 2$. (2 *puntos*)

c) Los puntos de la curva $y=4-x^2$ a menor distancia absoluta del punto $(0,2)$ para $-2\le x\le 2$. (2 *puntos*)

d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y=4-x^2$ e $y=2-|x|$ cuando $-2\le x\le 2$. (4 *puntos*)

Solución:

La situación gráfica es la dada en la figura adjunta.



a) La distancia entre los puntos (0, 2) y $\left(x,\ 4-x^2\right)$ viene dada por

$$d=\sqrt{x^2+\left(4-x^2-2\right)^2}=\sqrt{x^2+\left(2-x^2\right)^2}$$

b) Los puntos de la curva a mayor distancia del punto (0, 2), con $-2\le x\le 2$, son (–2, 0) y (2, 0).

Esa distancia es $d=\sqrt{8}$. (Se confirmará más abajo).

c) Hay que calcular el mínimo de $d(x)=\sqrt{x^2+\left(2-x^2\right)^2}$.

Derivando:

$$d'(x)=\frac{2x-2\cdot 2x\cdot\left(2-x^2\right)}{2\sqrt{x^2+\left(2-x^2\right)^2}}=\frac{x\left(-3+2x^2\right)}{\sqrt{x^2+\left(2-x^2\right)^2}}\to \text{se hace 0 en } x=0 \text{ y en } x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Obviamente, los puntos son los asociados a $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$: puntos $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\ \frac{5}{2}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\ \frac{5}{2}\right)$.

Lo podemos ver con detalle.

$\rightarrow$ Si $-2 < x < -\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow d'(x) < 0$, luego $d(x)$ decrece;

$\rightarrow$ Si $-\sqrt{\frac{3}{2}} < x < 0 \Rightarrow d'(x) > 0$, luego $d(x)$ crece.

Por tanto, en $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ se tiene un mínimo. Punto $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$.

$\rightarrow$ Si $0 < x < \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow d'(x) < 0$, luego $d(x)$ decrece.

Por tanto, en $x = 0$ se tiene un máximo relativo. Punto (0, 4).

$\rightarrow$ Si $\sqrt{\frac{3}{2}} < x < 2 \Rightarrow d'(x) > 0$, luego $d(x)$ crece.

Por tanto, en $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ se tiene un mínimo. Punto $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$.

Los puntos $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right)$ son los que están a menor distancia.

d) El área pedida es la del recinto sombreado en la figura. Su valor es:

$$S = \int_{-2}^{0}\left(4 - x^2 - (2 + x)\right)dx + \int_{0}^{2}\left(4 - x^2 - (2 - x)\right)dx \Rightarrow$$

$$S = 2\cdot\int_{0}^{2}\left(2 - x^2 + x\right)dx = = 2\cdot\left(2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = 2\cdot\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{20}{3} \text{ u}^2.$$

$\rightarrow$ También puede hacerse restando a $\int_{-2}^{2}\left(4 - x^2\right)dx$ el área del triángulo:

$$S = 2\cdot\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 - 4 = 2\cdot\left(\frac{16}{3}\right) - 4 = \frac{20}{3}.$$

<u>**30**. Extremadura, junio 19, opción A</u>

3. Demuestre que la ecuación

$$\operatorname{sen}(x^2) = x - 1$$

tiene una solución positiva. Razone la respuesta, exponiendo el teorema (o resultado) que justifique la solución. **(2 puntos)**

<u>Solución</u>:

Se trata de una aplicación del teorema de Bolzano, que dice: "Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

Esto significa que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución entre *a* y *b*; esa solución es el valor *c* cuya existencia afirma el teorema.

En este caso puede considerarse la función $f(x)=\sin\left(x^2\right)-x+1$, que es continua en todo **R**; en particular para valores positivos, en $\mathbf{R}^+$.

- Como $f\left(0\right)=-1<0$ y $f(1)=\sin 1-1+1=\sin 1>0$, en el intervalo [0, 1], la función cumple las hipótesis del teorema. Por tanto, puede asegurarse que existe un punto $c \in (0, 1)$ tal que $f(c)=0$. Esto es, $f(c)=\sin\left(c^2\right)-c+1=0 \Rightarrow \sin\left(c^2\right)=c-1$: la solución de la ecuación es c.

<u>**31**. Islas Canarias, julio 19, opción A</u>

1. Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$

Calcular los valores de a, b y c sabiendo que se cumplen las condiciones siguientes:

- Dos de sus extremos relativos se encuentran en los puntos de abcisa $x = 0$ y $x = -2$
- La función corta el eje OX en el punto $x = 1$

Dar la expresión de la función resultante. (2,5 ptos)

<u>Solución</u>:
Si la función dada corta al eje OX en el punto $x = 1$, entonces $f(1)=0$.
Esto es: $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+7 \Rightarrow f(1)=1+a+b+c+7=0$.
Si la función tiene extremos relativos en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 2$, entonces $f'(0)=f'(-2)=0$.
Derivando:

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c \Rightarrow \begin{cases} f'(0)=0 \to c=0 \\ f'(-2)=0 \to -32+12a-4b=0 \end{cases}.$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 1+a+b+c+7=0 \\ f'(0)=0 \to c=0 \\ f'(-2)=0 \to -32+12a-4b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-8 \\ 12a-4b=32 \end{cases} \Rightarrow a=0; b=-8.$$

La función resultante es: $f(x)=x^4-8x^2+7$.

32. Galicia, junio 19 (Opción A)

2. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Mediante integración por partes, demuestra que $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C$. Luego, demuestra la misma igualdad mediante derivación.

b) Si $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad x \in (0, \mathrm{e}], \\ ax + b & \text{si} \quad x \in (\mathrm{e}, \infty), \end{cases}$ di qué relación tiene que existir entre los parámetros a y b para que f sea continua y cuáles tienen que ser sus valores para que f sea derivable.

c) Calcula el área de la región encerrada por el eje X, la recta $x = 4$ y la gráfica de $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad x \in (0, \mathrm{e}], \\ \frac{x}{\mathrm{e}} & \text{si} \quad x \in (\mathrm{e}, \infty). \end{cases}$

Solución:

a) Por partes.

$$\int \ln x \, dx \to \text{ Tomando:}$$

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx; \quad dv = dx \Rightarrow v = x.$$

Luego:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

Derivando:

$$F(x) = x(\ln x - 1) + C \Rightarrow F'(x) = (\ln x - 1) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x - 1 + 1 = \ln x \text{ .ç}$$

b) $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \in (0, e] \\ ax + b & \text{si } x \in (e, \infty) \end{cases}$.

→ Continuidad en $x = e$:

$$\lim_{x \to e^-} f(x) = \lim_{x \to e^-} (\ln x) = \ln e = 1; \ \lim_{x \to e^+} f(x) = \lim_{x \to e^+} (ax + b) = a \cdot e + b.$$

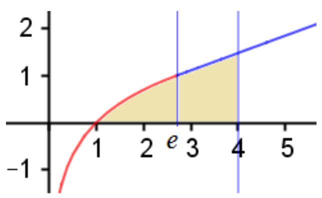
Será continua si los límites laterales son iguales: $a \cdot e + b = 1 \Rightarrow b = 1 - a \cdot e$.

→ Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \in (0, e) \\ a & \text{si } x \in (e, \infty) \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to e^-} f'(x) = \lim_{x \to e^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{e}; \ \lim_{x \to e^+} f'(x) = \lim_{x \to e^+} a = a.$$

Será derivable si las derivadas laterales valen lo mismo: $\frac{1}{e} = a$.

Como $b = 1 - a \cdot e$, sustituyendo $\Rightarrow b = 1 - \frac{1}{e} \cdot e = 0$.



c) El recinto comprendido entre el eje X, la recta $x = 4$ y la función $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \in (0, e] \\ x/e & \text{si } x \in (e, \infty) \end{cases}$ es el sombreado en la figura adjunta.

→ No es necesario dibujarlo, pero hay que ver que la x varía entre 1 y 4; que desde 1 hasta e la función que interviene es $f(x) = \ln x$; y, entre e y 4, $f(x) = \frac{x}{e}$.

El área viene dada por la suma de las integrales

$$\int_1^e (\ln x) \, dx + \int_e^4 \frac{x}{e} dx = (x \ln x - x)\Big|_1^e + \left(\frac{x^2}{2e}\right)\Bigg|_e^4 = 1 + \left(\frac{8}{e} - \frac{e}{2}\right) \text{ u}^2.$$

33. Galicia, julio 19 (Opción B)

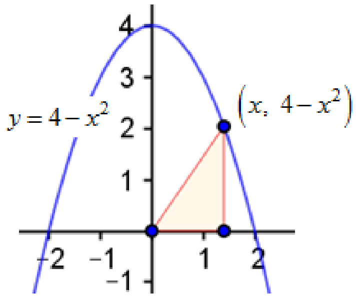
2. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) De entre todos los triángulos rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y, obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.

b) Enuncia los teoremas de Bolzano y de Rolle.

Solución:

a) El triángulo es el que se muestra en la figura.



Su área es $S = \dfrac{x\cdot\left(4 - x^2\right)}{2} = \dfrac{4x - x^3}{2}$.

Su máximo se obtiene en la solución de $S' = 0$ que hace negativa a S''.

$$S' = \frac{4 - 3x^2}{2} \to S' = 0 \text{ si } 4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Como debe ser del primer cuadrante, $x = +\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; y como $S'' = -3$, para ese valor se encentra el máximo buscado.

Los catetos valen: $x = +\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $4 - \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{8}{3}$.

La hipotenusa: $\sqrt{\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\dfrac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{4}{3} + \dfrac{64}{9}} = \sqrt{\dfrac{76}{9}} = \dfrac{2\sqrt{19}}{3}$.

b) Teorema de Bolzano. Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de Rolle. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) que verifica $f(a) = f(b)$: entonces existe, al menos, un punto $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = 0$.

34. La Rioja, julio 19, propuesta A y B

3.– (3 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}.$$

(I) Analiza la continuidad y derivabilidad de la función f.

(II) Razona si se puede aplicar, o no, el teorema de Rolle en el intervalo $[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$. En caso afirmativo, calcula el valor $c \in \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a que se refiere el teorema de Rolle.

(III) Halla el área encerrada por f y el eje de abcisas en el intervalo $[\frac{3}{2}, 4]$.

Solución:

(I) La función $f(x)=\frac{|x|}{x^2-1}=\begin{cases}\frac{-x}{x^2-1} & \text{si } x<0\\ \frac{x}{x^2-1} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$.

Esta función no es continua ni derivable en los puntos $x = –1$ y $x = 1$, por no estar definida en ellos.
En el punto $x = 0$ hay que estudiarlo con detenimiento.
→ Continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x^2-1}=0;\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x^2-1}=0.$$

Como los límites laterales son iguales, la función es continua en $x = 0$.

→ Derivabilidad:

$$f´(x)=\begin{cases}\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2} & \text{si } x<0\\ \frac{-x^2-1}{\left(x^2-1\right)^2} & \text{si } x>0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-} f´(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}=1;\ \lim_{x\to 0^+} f´(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2-1}{\left(x^2-1\right)^2}=-1.$$

Como las derivadas laterales no valen lo mismo, la función no es derivable en $x = 0$.

(II) El teorema de Rolle dice: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $\left[x_1, x_2\right]$ y derivable en el intervalo $\left(x_1, x_2\right)$, y además $f(x_1)=f(x_2)$, entonces existe al menos, un punto $x_0\in\left(x_1, x_2\right)$ tal que $f´(x_0)=0$.

Como la función dada no es derivable en el intervalo $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, no puede aplicarse el teorema de Rolle.

(III) En el intervalo $\left[\frac{3}{2},\ 4\right]$ la función es $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$, que es positiva en dicho intervalo.
Por tanto, el área pedida es:

$$S=\int_{3/2}^{4}\frac{x}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)\Big|_{3/2}^{4}=\frac{1}{2}\left(\ln 15-\ln\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{15}{5/4}=\frac{1}{2}\ln 12\ \text{u}^2.$$

35. Madrid, junio 19, opción A

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dada $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, donde ln denota el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$.

b) (1 punto) Encontrar un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.

Solución:

a) La asíntota, si existe, debe ser hacia $+\infty$. (La función no está definida si $x \le 0$).

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L'H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow$$ La asíntota es la recta $y = 0$.

b) La tangente es horizontal en los puntos en los que $f'(x) = 0$.

Derivando:

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2} \to$$ se anula si $1-\ln(x) = 0 \Rightarrow x = e$.

Estudiando el signo de la derivada a izquierda y derecha de $x = e$ se deduce:

- Si $0 < x < e$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función crece.
- Si $x > e$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece.

Por tanto, en $x = e$ se tiene un máximo de la función.

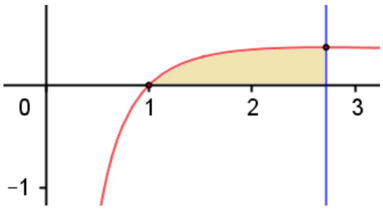
c) La curva $y = \frac{\ln(x)}{x}$ corta al eje OX en $x = 1$. A la derecha de $x = 1$ la curva está por encima del eje OX; luego, el área encerrada por $y = \frac{\ln(x)}{x}$ y el eje OX, desde 1 hasta e, viene dada por la integral definida:

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e = \frac{1}{2}\left((\ln e)^2 - (\ln 1)^2\right) = \frac{1}{2} \text{ u}^2.$$

Una primitiva de esa función es "inmediata", pues:

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int \frac{1}{x}\cdot(\ln(x))\, dx = \left(\int f'(x)\cdot f(x) dx = \frac{(f(x))^2}{2}\right) = \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

Aunque no se pide, el área pedida es la de la región sombreada en la figura adjunta.



36. Madrid, junio 19, opción B

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar su dominio.

b) (1.5 puntos) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) (0.5 puntos) Calcular los límites laterales $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$.

Solución:

a) La función está definida siempre que $4x^2 - x^4 \geq 0$.

Como $4x^2 - x^4 = x^2\cdot(4 - x^2) = x^2\cdot(2-x)\cdot(2+x) \Rightarrow$ el dominio de definición viene dado por los puntos del intervalo [–2, 2].

b) Derivando e igualando a 0:

$$f'(x) = \frac{8x - 4x^3}{2\sqrt{4x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow 8x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x(2 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = -\sqrt{2};\ x = \sqrt{2}.$$

Por tanto:

- Si $-2 < x < -\sqrt{2}$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función crece.
- Si $-\sqrt{2} < x < 0$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece. (En $x = -\sqrt{2}$ se tiene un máximo).
- Si $0 < x < \sqrt{2}$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función crece. (En $x = 0$ se tiene un mínimo, aunque en ese punto la función no es derivable).
- Si $\sqrt{2} < x < 2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece. (En $x = \sqrt{2}$ se tiene un máximo).

c) Para hacer este límite puede tenerse en cuenta que:

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4} = \sqrt{x^2(4 - x^2)} = |x|\cdot\sqrt{4 - x^2}$$

(La función nunca toma valores negativos. Por tanto, al extraer x del radicando debe tenerse eso en cuenta; por ese motivo debe ponerse $|x|$).

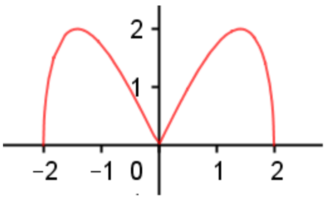
Con esto:

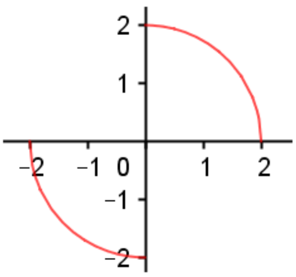
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|\cdot\sqrt{4-x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x\cdot\sqrt{4-x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left(-\sqrt{4-x^2}\right) = -2;$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|\cdot\sqrt{4-x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cdot\sqrt{4-x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{4-x^2}\right) = 2.$$

Observación:

Las gráficas de $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$ y de $y = \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x}$, que doy a continuación, aclaran los resultados.





37. Madrid, julio 19, opción A

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

a) (1.25 puntos) Sean f y g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:

$$f(1)=1,\ f'(1)=2,\ g(1)=3,\ g'(1)=4.$$

Dada $h(x)=f((x+1)^2)$, use la regla de la cadena para calcular $h'(0)$. Dada $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, calcule $k'(1)$.

b) (1.25 puntos) Calcule la integral $\int (\operatorname{sen} x)^4(\cos x)^3 dx$. (Se puede usar el cambio de variables $t=\operatorname{sen} x$.)

Solución:

a) Si $h(x)=f\left((x+1)^2\right) \Rightarrow h'(x)=f'\left((x+1)^2\right)\cdot 2(x+1)$.

Sustituyendo $\left(f(1)=1,\ f'(1)=2\right) \Rightarrow h'(0)=f'\left((0+1)^2\right)\cdot 2(0+1)=f'(1)\cdot 2=2\cdot 2=4$.

Si $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow k'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

Sustituyendo $\left(f(1)=1,\ f'(1)=2,\ g(1)=3,\ g'(1)=4\right) \Rightarrow$

$$k'(1)=\frac{f'(1)\cdot g(1)-f(1)\cdot g'(1)}{(g(1))^2}=\frac{2\cdot 3-1\cdot 4}{3^2}=\frac{2}{9}.$$

b) $\int (\sin x)^4(\cos x)^3 dx$.

Si se hace $t=\sin x \Rightarrow dt=(\cos x)dx$; $(\cos x)^2=1-(\sin x)^2=1-t^2$.

Sustituyendo:

$$\int (\sin x)^4(\cos x)^3 dx=\int (\sin x)^4(\cos x)^2(\cos x)dx=\int t^4\left(1-t^2\right)dt=$$

$$=\int \left(t^4-t^6\right)dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+c=\frac{(\sin x)^5}{5}-\frac{(\sin x)^7}{7}+c.$$

38. Madrid, julio 19, opción B

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ tal que $F'(t)=t^2(10-t)$.

a) (1 punto) Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.

b) (1 punto) Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.

c) (0.5 puntos) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

Solución:

a) $F(t)=\int F'(t)dt=\int t^2(10-t)dt=\int\left(10t^2-t^3\right)dt=\dfrac{10}{3}t^3-\dfrac{1}{4}t^4+c$.

Como $F(0)=6 \Rightarrow c=6$. Luego $F(t)=\dfrac{10}{3}t^3-\dfrac{1}{4}t^4+6$.

b) El máximo de $F(t)$ se obtiene en la solución de $F'(t)=0$ que hace negativa a $F''(t)$.

$\to F'(t)=t^2(10-t)=0$ si $t=0$ o $t=10$.

$\to$ $F''(t) = 20t - 3t^2$, siendo $F''(0) = 0$ y $F''(10) = -100 < 0 \Rightarrow$ en t = 10 se obtiene el máximo buscado.

c) El brote dura hasta $F(t) = 0$; hasta la solución de $\frac{10}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + 6 = 0 \Rightarrow$

$40t^3 - 3t^4 + 72 = 0$.

El Teorema de Bolzano dice: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado [a, b] y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Si la función es $f(t) = 40t^3 - 3t^4 + 72$, que es continua en todo **R**, entonces:

$\to$ $f(10) > 0$; $f(20) < 0$ $\Rightarrow$ la solución está entre 10 y 20;

$\to$ $f(15) = 40\cdot 15^3 - 3\cdot 15^4 + 72 < 0$ $\Rightarrow$ la solución está entre 10 y 15;

$\to$ $f(12) = 40\cdot 12^3 - 3\cdot 12^4 + 72 = 6984 > 0$ $\Rightarrow$ la solución está entre 12 y 15;

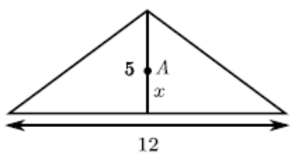
$\to$ $f(13) = 40\cdot 13^3 - 3\cdot 13^4 + 72 = 2269 > 0$ $\Rightarrow$ la solución está entre 13 y 15;

$\to$ $f(14) = 40\cdot 14^3 - 3\cdot 14^4 + 72 = -5416 < 0$ $\Rightarrow$ la solución está entre 13 y 14.

El brote se cura durante el día 14.

39. Murcia, junio 19, opción B

B.2: Considere un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observe la figura:



a) **[0,5 p.]** Demuestre que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{x^2 + 36}$.

b) **[1,5 p.]** Calcule el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.

c) **[0,5 p.]** Calcule dicha cantidad mínima.

Solución:

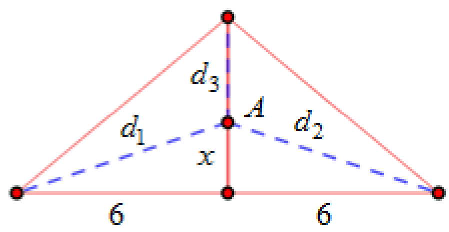
a) Es obvio (Pitágoras) que:

$d_1 = d_2 = \sqrt{6^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + 36}$;

y que $d_3 = 5 - x$.

Por tanto, la suma de esas distancias viene dada por la expresión:

$f(x) = d_1 + d_2 + d_3 = 2\cdot\sqrt{x^2 + 36} + 5 - x$



b) La función f será mínima en la solución de $f' = 0$ que haga positiva a f''.

Derivando e igualando a 0:

$$f'(x)=\frac{2\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+36}}-1=\frac{2x-\sqrt{x^2+36}}{\sqrt{x^2+36}}$$ → se hace 0 cuando $2x-\sqrt{x^2+36}=0$.

$$2x-\sqrt{x^2+36}=0 \Rightarrow 2x=\sqrt{x^2+36} \Rightarrow 4x^2=x^2+36 \Rightarrow 3x^2=36 \Rightarrow x=\sqrt{12}=2\sqrt{3}.$$

(La solución negativa llevaría al punto *A* fuera del triángulo: se descarta).
La derivada segunda es:

$$f'(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+36}}-1 \Rightarrow f''(x)=\frac{2\sqrt{x^2+36}-2x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+36}}}{\left(\sqrt{x^2+36}\right)^2}=\frac{144}{\left(x^2+36\right)\sqrt{x^2+36}}.$$

Como $f''\left(2\sqrt{3}\right)>0$, para ese valor de *x* se obtiene la suma de distancias mínima.

c) Esa a suma es: $f\left(2\sqrt{3}\right)=2\cdot\sqrt{12+36}+5-2\sqrt{3}=6\sqrt{3}+5$.

40. Murcia, septiembre 19

A.2: a) **[1,5 p.]** Calcule los extremos relativos (máximos y mínimos) de $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{e^x}$, definida para todo valor de $x\in\mathbb{R}$. Determine también los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) **[1 p.]** Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{e^x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(2x+2)e^x-\left(x^2+2x\right)e^x}{\left(e^x\right)^2}=\dfrac{2-x^2}{e^x} \to f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

Con esto:

- Si $x<-\sqrt{2}$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece;
- Si $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Por tanto, en $x=-\sqrt{2}$ la función tiene un mínimo.
- Si $x>\sqrt{2}$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Por tanto, en $x=\sqrt{2}$ la función tiene un máximo.

b) Debe hacerse aplicando L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}.$$

41. Murcia, septiembre 19

B.2: a) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$.

b) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$ que pasa por el punto $(1,2)$.

c) **[1 p.]** Calcule el límite $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}$.

Solución:

a) La integral $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$ puede hacerse mediante el cambio $x=t^2$, que implica $dx=2tdt$.

Con esto:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx=\int \frac{t}{1+t^2}\cdot 2tdt=\int \frac{2t^2}{1+t^2}dt\ .$$

Dividiendo: $\frac{2t^2}{1+t^2}=2-\frac{2}{1+t^2} \Rightarrow \int \frac{2t^2}{1+t^2}dt=\int\left(2-\frac{2}{1+t^2}\right)dt=2t-2\arctan t+c$.

Deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx=2\sqrt{x}-2\arctan\sqrt{x}+c\ .$$

b) Si la primitiva pasa por el punto (1, 2), entonces $2\sqrt{1}-2\arctan\sqrt{1}+c=2 \Rightarrow$

$$2\sqrt{1}-2\cdot\frac{\pi}{4}+c=2 \Rightarrow c=\frac{\pi}{2}\ .$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L'H)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=\frac{0}{1}=0$.

42. Navarra, junio 19, opción A

A3) Calcula la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado:

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}} \qquad \text{(1 punto)}$$

$$g(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{-x} \qquad \text{(1 punto)}$$

Solución:

La función $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}}$ se puede escribir de esta otra manera:

$$f(x)=\ln\left(\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}\right)^{1/2}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln(1-\cos 2x)-\ln(\sin 2x)\right).$$

Con esto:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{2\cdot\sin 2x}{1-\cos 2x}-\frac{2\cdot\cos 2x}{\sin 2x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2\cdot\sin^2 2x+2\cos^2 2x-2\cos 2x}{(1-\cos 2x)\cdot\sin 2x}\right)\to$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{2\left(\sin^2 2x+\cos^2 2x\right)-2\cos 2x}{(1-\cos 2x)\cdot\sin 2x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2-2\cos 2x}{(1-\cos 2x)\cdot\sin 2x}\right)\to$$

$$f'(x)=\frac{1-\cos 2x}{(1-\cos 2x)\cdot\sin 2x}=\frac{1}{\sin 2x}.$$

Si $g(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{-x}$ → transformando la expresión: $g(x)=\left(x^{-1}\right)^{-x}=x^x$.

Aplicando logaritmos:

$\ln g(x)=\ln x^x \Rightarrow \ln g(x)=x\cdot\ln x$.

Derivando:

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{g'(x)}{g(x)}=\ln x+1\Rightarrow g'(x)=g(x)\cdot(\ln x+1)\Rightarrow g'(x)=x^x\cdot(\ln x+1).$$

43. Navarra, junio 19, opción A

A4) Demuestra que existe $\alpha\in(-1,3)$ tal que $f'(\alpha)=-\frac{1}{4}$, siendo

$$f(x)=\left[x^2+\log\left(x^2-2x+7\right)\right]^{\sqrt[3]{\frac{3-x}{4}}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 puntos)

Solución:

La función dada, $f(x)=\left[x^2+\log\left(x^2-2x+7\right)\right]^{\sqrt[3]{\frac{3-x}{4}}}$, cumple las hipótesis del teorema de Cauchy: es continua en el intervalo [–1, 3] y derivable en (–1, 3).

→ Como x^2 y $\sqrt[3]{\frac{3-x}{4}}$ están definidas para todo número real, bastaría con ver que $x^2-2x+7>0$ en el intervalo (–1, 3). Así es, ya que las raíces de $x^2-2x+7=0$ no son reales: $x=\frac{2\pm\sqrt{4-28}}{2}$. Luego, $g(x)=x^2-2x+7$ nunca corta al eje *OX*; y siempre es positiva, ya que es continua y $g(0)=7$.

Como cumple el teorema de Cauchy en el intervalo [–1, 3], entonces, existe un punto $\alpha\in(-1,\ 3)$ tal que

$$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=f'(\alpha)\to$$

Calculando $f(3)=\left[9+\log(9-6+7)\right]^{\sqrt[3]{\frac{3-3}{4}}}=10^0=1$ y $f(-1)=\left[1+\log(10)\right]^{\sqrt[3]{\frac{4}{4}}}=2$, y sustituyendo en la fórmula anterior:

$$\frac{1-2}{4}=f'(\alpha)\Rightarrow f'(\alpha)=-\frac{1}{4}$$, que era lo que se deseaba probar.

44. Navarra, junio 19, opción B

B3) Demuestra que existe $\alpha \in (1,3)$ tal que $f(\alpha) = 0$, siendo

$$f(x) = \frac{\ln\left[x - 1 + \sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]}{4x - x^2}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

Solución:

La función dada, $f(x) = \dfrac{\ln\left[x-1+\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]}{4x-x^2}$, cumple las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo [1, 3]: es continua y toma valores de distinto signo en sus extremos.

En efecto, $f(1) = \dfrac{\ln\left[1-1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]}{3} = \dfrac{2\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{3} < 0$; $f(3) = \dfrac{\ln\left[3-1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]}{3} = \dfrac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{3} > 0$.

Para ver que es continua basta con comprobar que está definida en [1, 3]. Así es, pues:

$g(x) = x-1+\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) > 0$ para $x \geq 1$, y $4x - x^2$ no se anula en ese intervalo.

Como cumple el teorema de Bolzano en el intervalo [1, 3], entonces, existe un punto $\alpha \in (1,\ 3)$ tal que $f(\alpha) = 0$, que era lo que se deseaba probar.

→ El Teorema de Bolzano dice: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado [a, b] y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

45. Navarra, julio 19, opción A

A3) Demuestra que existe $\alpha \in (1, e)$ tal que $f'(\alpha) = e + 1$, siendo

$$f(x) = (x + ex - e)^{\frac{e}{x}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

Solución:

La función dada, $f(x) = (x+ex-e)^{\frac{e}{x}}$, cumple las hipótesis del teorema de Cauchy en el intervalo [1, e].

En efecto, la función está definida en intervalo [1, e], pues $x+ex-e = x+e(x-1) > 0$ si $x \geq$ 1; el exponente también está definido. Por consiguiente, la función no presenta problemas de continuidad ni de derivabilidad en ese intervalo.

Como cumple el teorema de Cauchy en el intervalo [1, e], entonces, existe un punto $\alpha \in (1,\ e)$ tal que

$$\frac{f(e)-f(1)}{e-1} = f'(\alpha) \to$$

Calculando $f(e) = (e + e\cdot e - e)^{\frac{e}{e}} = e^2$ y $f(1) = (1+e-e)^{\frac{e}{1}} = 1$, y sustituyendo en la fórmula anterior:

$$\frac{e^2-1}{e-1} = f'(\alpha) \Rightarrow f(\alpha) = \frac{(e-1)\cdot(e+1)}{e-1} = e+1$$, que era lo que se deseaba probar.

46. <u>Navarra, julio 19, opción A</u>

A4) Encuentra los tres puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 1 + \cos x$ y $g(x) = \frac{-2x^2}{\pi^2} + 2$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (3 puntos)

<u>Solución</u>:

Los puntos de corte de esas gráficas son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = 1+\cos x \\ y = -\frac{2x^2}{\pi^2}+2 \end{cases} \to 1+\cos x = -\frac{2x^2}{\pi^2}+2.$$

Las soluciones de esta ecuación hay que calcularlas a "ojo".

Veamos:

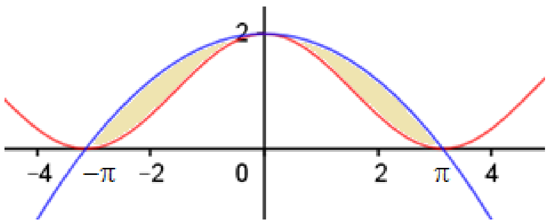
→ Vale $x = 0$, pues: $1+\cos 0 = -\frac{2\cdot 0}{\pi^2}+2 \Rightarrow 2 = 2$, que es cierto.

→ Vale $x = \pi$, pues: $1+\cos\pi = -\frac{2\cdot\pi^2}{\pi^2}+2 \Rightarrow 1-1 = -2+2$, que es cierto.

→ Vale $x = -\pi$, pues: $1+\cos(-\pi) = -\frac{2\cdot(-\pi)^2}{\pi^2}+2 \Rightarrow 1-1 = -2+2$, que es cierto.

No hay más cortes, pues para $|x| > \pi$, la parábola (función g) toma valores negativos, mientras que $f(x) = 1+\cos x \geq 0$.

El área pedida es la del recinto sombreado en la figura adjunta.



Su valor es:

$$S = 2\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{2x^2}{\pi^2}+2-(1+\cos x)\right)dx =$$

$$= 2\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{2x^2}{\pi^2}+1-\cos x\right)dx = 2\left(-\frac{2x^3}{3\pi^2}+x-\sin x\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} =$$

$$= 2\left(0-\left(-\frac{2(-\pi)^3}{3\pi^2}-\pi-\sin(-\pi)\right)\right) = 2\left(-\frac{2\pi}{3}+\pi\right) = \frac{2\pi}{3}\ \text{u}^2.$$

<u>Nota</u>: El dibujo no se pide; bastaría con expresar las integrales con valor absoluto. Así:

$$S = \left|\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{2x^2}{\pi^2}+2-(1+\cos x)\right)dx\right| + \left|\int_{0}^{\pi}\left(-\frac{2x^2}{\pi^2}+2-(1+\cos x)\right)dx\right|.$$

47. Navarra, julio 19, opción B

B4) Demuestra que la siguiente función tiene un máximo relativo en el intervalo $(-1, 0)$:

$$f(x) = \cos(\pi x) \cdot \ln\left(x^2 - 3x + 2\right)$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 puntos)

Solución:
Este problema sugiere la aplicación del teorema de Rolle, que dice: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[x_1, x_2]$ y derivable en el intervalo (x_1, x_2), y además $f(x_1) = f(x_2)$, entonces existe al menos, un punto $x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(x_0) = 0$.
La función dada, $f(x) = \cos(\pi x)\cdot\ln\left(x^2 - 3x + 2\right)$, está definida en el intervalo [–1, 0], pues $x^2 - 3x + 2 > 0$ si $x \in (-1, 0)$ → (Puede verse que sus raíces son $x = 1$ y $x = 2$; y que es en el intervalo [1, 2] donde la expresión $x^2 - 3x + 2 \le 0$). Por consiguiente, la función no presenta problemas de continuidad ni de derivabilidad en el intervalo [–1, 0].
Como $f(-1) = \cos(-\pi)\cdot\ln 6 = -\ln 6$ y $f(0) = \cos 0\cdot\ln 2 = \ln 2$ son distintos, $f(-1) \ne f(0)$, no puede aplicarse el teorema de Rolle.
Nota: Aunque no he logrado el resultado buscado dejo el razonamiento para animar al estudiante medio: las cosas no salen a la primera. Pero hay que buscar otro camino.

Volvamos al problema.
Si existe un máximo relativo en el intervalo (–1, 0), entonces debe anularse la derivada en algún punto de ese intervalo.

$$f(x) = \cos(\pi x)\cdot\ln\left(x^2 - 3x + 2\right) \Rightarrow$$

$$f'(x) = -\pi\cdot\sin(\pi x)\cdot\ln\left(x^2 - 3x + 2\right) + \cos(\pi x)\cdot\frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}.$$

No hay forma de resolver la ecuación $f'(x) = 0$. Por tanto, hay que buscar otra alternativa.
Puede intentarse aplicar el teorema de Bolzano a $f'(x)$. Veamos el valor que toma en los extremos del intervalo dado:

$$f'(-1) = -\pi\cdot\sin(-\pi)\cdot\ln 6 + \cos(-\pi)\cdot\frac{-5}{6} = \frac{5}{6} > 0;$$

$$f'(0) = -\pi\cdot\sin 0\cdot\ln(2) + \cos 0\cdot\frac{-3}{2} = -\frac{3}{2} < 0.$$

Como la función $f'(x)$ es continua en el intervalo dado (vale el razonamiento explicado antes) y toma valores con distinto signo en sus extremos, entonces verifica el teorema Bolzano, que dice: Si $h(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado [a, b] y toma valores de distinto signo en sus extremos ($h(a) < 0 < h(b)$ o $h(a) > 0 > h(b)$), entonces existe algún punto $\alpha \in (a, b)$ tal que $h(\alpha) = 0$. Esto es, la función corta al eje OX. (En este caso, la función h es la derivada, $f'(x)$).
Por tanto, se deduce que existe al menos un punto $\alpha \in (-1, 0)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.
En ese punto, la función $f'(x)$ pasa de tomar valores positivos a tomar valores negativos: pasa de crecer a decrecer, lo que implica que la función tiene un máximo en ese punto α.
Recuérdese:

- Para valores de x tales que $-1 < x < \alpha$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Para valores de x tales que $\alpha < x < 0$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- En consecuencia, en $x = \alpha$ la función tiene un máximo entre –1 y 0.

48. País Vasco, junio 19, opción A

Ejercicio A3

Dada la función $f(x) = x^2 + 64$ y el punto exterior a su gráfica $P(6, 0)$, encontrar la recta o rectas tangentes a f que pasen por P.

Solución:

Sea (x_0, y_0) uno de los puntos de tangencia buscado.

La tangente a $f(x)$ en dicho punto será: $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

En este caso:

$$f(x) = x^2 + 64 \to f(x_0) = x_0^2 + 64;\ f'(x) = 2x \to f'(x_0) = 2x_0.$$

Sustituyendo en la expresión de la tangente,

$$y - \left(x_0^2 + 64\right) = 2x_0\cdot(x - x_0).$$

Como esa recta debe pasar por el punto $P(6, 0)$, entonces:

$$0 - \left(x_0^2 + 64\right) = 2x_0\cdot(6 - x_0) \Rightarrow -x_0^2 - 64 = 12x_0 - 2x_0^2 \Rightarrow x_0^2 - 12x_0 - 64 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 256}}{2} = \frac{12 \pm 20}{2} = \begin{cases} -4 \\ 16 \end{cases} \to \begin{cases} f(-4) = 80 \\ f(16) = 320 \end{cases} \to \begin{cases} f'(-4) = -8 \\ f'(16) = 32 \end{cases}.$$

Las tangentes pedidas son:

$$\begin{cases} y - 80 = -8\cdot(x + 4) \to y = -8x + 48 \\ y - 320 = 32\cdot(x - 16) \to y = 32x - 192 \end{cases}.$$

49. País Vasco, julio 19, opción B

Ejercicio B4

Calcular $\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)}dx$ explicando el método seguido para dicho cálculo.

Solución:

Puede hacerse la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x(A+B) + 3A + B}{(x+1)(x+3)}.$$

Por identificación de coeficientes:

$$\begin{cases} A + B = 8 \\ 3A + B = 7 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}; B = \frac{17}{2}.$$

Por tanto:

$$\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)}dx = \int\left(\frac{-1/2}{x+1} + \frac{17/2}{x+3}\right)dx = -\frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{17}{2}\ln(x+3) + c.$$