ALGUNOS PROBLEMAS DE GEOMETRÍA PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE EBAU–EvAU–PEBAU… DE 2018

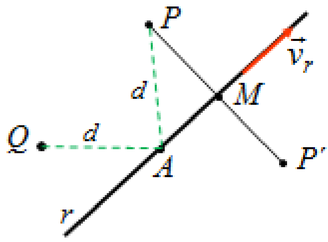
1. Andalucía, junio 18
Ejercicio 4A.

Considera los puntos $P(1, 0, -1)$, $Q(2, 1, 1)$ y la recta r dada por $x-5=y=\dfrac{z+2}{-2}$.

(a) [1,25 puntos] Determina el punto simétrico de P respecto a r.
(b) [1,25 puntos] Calcula el punto de r que equidista de P y Q.

Solución:

a) Si P' es el simétrico de P respecto la recta, se cumplen dos cosas:



- Su punto medio M debe ser de la recta.
- El vector ***PM*** debe ser perpendicular al vector $\vec{v}_r$ de dirección de la recta. Esto es, debe cumplirse que $\vec{v}_r \cdot \mathbf{PM} = 0$.

La recta r es:

$$r \equiv x-5=y=\frac{z+2}{-2} \Rightarrow r:\begin{cases} x=5+t \\ y=t \\ z=-2-2t \end{cases} ;\ \vec{v}_r = (1, 1, -2).$$

Sea M un punto genérico de la recta: $M = (5+t, t, -2-2t)$.

Por tanto:

$\mathbf{PM} = (5+t, t, -2-2t) - (1, 0, -1) = (4+t, t, -1-2t)$.

- $\vec{v}_r \cdot \mathbf{PM} = 0 \Rightarrow (1, 1, -2)\cdot(4+t, t, -1-2t) = 4 + t + t + 2 + 4t = 0 \Rightarrow t=-1$.

Luego, $M = (4, -1, 0)$

- Si $P' = (a, b, c)$, el punto medio entre P y P' es: $M = \left(\dfrac{a+1}{2}, \dfrac{b}{2}, \dfrac{c-1}{2}\right)$.

Igualando las coordenadas de *ambos* M se tiene:

$$\frac{a+1}{2}=4 \Rightarrow a=7;\quad \frac{b}{2}=-1 \Rightarrow b=-2;\quad \frac{c-1}{2}=0 \Rightarrow c=1.$$

El punto el punto simétrico de P respecto de r es: $P' = (7, -2, 1)$.

b) Sea A otro punto genérico de la recta: $A = (5+t, t, -2-2t)$.

Si se desea que $d(P,A)=(Q,A) \Rightarrow$

$$\sqrt{(4+t)^2+t^2+(-1-2t)^2}=\sqrt{(3+t)^2+(1-t)^2+(-3-2t)^2} \Rightarrow \text{(operando)} \to t=-\frac{1}{2}.$$

Por tanto, el punto pedido es: $A = \left(\dfrac{9}{2}, -\dfrac{1}{2}, -1\right)$.

2. Aragón, junio 18

B2. (1,5 puntos) Considere el plano: $\pi: 2ax + y + az = 4$ y la recta: $r: \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$.

a) (0,75 puntos) Determine la posición del plano y la recta según los diferentes valores de a.
b) (0,75 puntos) Para $a = 2$, determine la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto $P(0, 1, 0)$.

Solución:

a) Hay que estudiar la compatibilidad del sistema recta–plano:

$$\begin{cases} \pi: 2ax + y + az = 4 \\ r: \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases} \end{cases}.$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2a & 1 & a & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) = M$.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5a - 5 \to$ se anula para $a = 1$; y rango de $A = 2$.

Para ese valor de $a = 1$:

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right); \text{ siendo el menor } M_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 - 8 + 12 \neq 0.$$

Por tanto:

- para $a = 1$, rango de $A = 2 <$ rango de $M = 3$. El sistema será incompatible: la recta es paralela al plano.
- para $a \neq 1$, rango de A = rango de $M = 3$. El sistema será compatible determinado: la recta corta al plano para cada valor de $a \neq 1$.

b) Para $a = 2$ el plano es $\pi: 4x + y + 2z = 4$, con vector característico $\vec{v}_\pi = (4, 1, 2)$.

Las rectas perpendiculares a π tiene por vector de dirección $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r$.

Si se quiere la recta perpendicular al plano que pasa por el punto $P(0, 1, 0)$, su ecuación será:

$$r: \begin{cases} x = 4t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}.$$

3. Asturias, julio 18

3. Los puntos *A*(0, 1, 0) y *B*(–1, 1, 1) son dos vértices de un triángulo. El tercero *C* pertenece a la recta $r:\begin{cases} x=4 \\ z=1 \end{cases}$. Además la recta que une *A* y *C* es perpendicular a la recta *r*.

a) Determina el punto *C*. (1,5 puntos)

b) Calcula el área del triángulo. (1 punto)

Solución:

a) La recta *r* también puede escribirse como sigue: $r:\begin{cases} x=4 \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$; siendo $\vec{v}_r$ = (0, 1, 0).

Para que la recta, *s*, que une *A* y *C* sea perpendicular a la recta *r* debe estar contenida en el plano, π, perpendicular a *r* que pasa por *A*.

El vector característico de π debe ser el dirección de *r*: $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r$ = (0, 1, 0).

Por tanto, su ecuación será:

$\pi: 0x + y + 0z = d$;

→ *d* se obtiene imponiendo que *A* pertenezca a π: 1 = *d*.

Luego: $\pi: y = 1$.

El punto *C* es el de corte de *r* con π: $r:\begin{cases} x=4 \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$; $\pi: y=1 \Rightarrow C$ = (4, 1, 1).

b) El área del triángulo de vértices *ABC* viene dada por $S = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$.

Como $\overrightarrow{AB}$ = (–1, 1, 1) – (0, 1, 0) = (–1, 0, 1) y $\overrightarrow{AC}$ = (4, 1, 1) – (0, 1, 0) = (4, 0, 1), se tiene que:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0,\ 5,\ 0) \Rightarrow S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{5^2} = \frac{5}{2}\ \text{u}^2.$$

4. Baleares, junio 18

Ejercicio B3.

3. El pla perpendicular al punt mig del segment d'extrems $P(0,3,8)$ i $Q(2,1,6)$ talla als eixos coordenats en els punts A, B i C. Trobau l'àrea del triangle ABC. (10 punts).

Solución:

Los puntos $X(x,\ y,\ z)$ del plano perpendicular por el punto medio del segmento de extremos *P* y *Q* (el plano mediador), cumplen que:

$$d(X,P) = d(X,Q) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-3)^2 + (z-8)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv x - y - z + 8 = 0.$$

Los puntos de corte de ese plano con los ejes de coordenadas son:

A(–8, 0, 0); *B*(0, 8, 0); *C*(0, 0, 8).

El área del triángulo de vértices ABC viene dada por $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$.

Como $\overrightarrow{AB}$ = (8, 8, 0) y $\overrightarrow{AC}$ = (8, 0, 8), se tiene que:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix} = (64,\ -64,\ -64) \Rightarrow S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{3 \cdot 8^2} = 4\sqrt{3}\ \text{u}^2.$$

<u>**5**. Baleares, septiembre 18</u>

3. Calculau les equacions paramètriques de la recta que passa per l'origen de coordenades i talla les rectes: (10 punts)

$$\mathrm{r} : x = 2y = z - 1, \quad \mathrm{s} : 3x = 2y - 2 = 6z.$$

<u>Solución</u>:

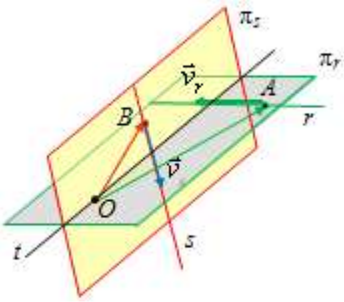
Las ecuaciones continuas de las rectas dadas son:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y}{1/2} = \frac{z-1}{1};\quad s: \frac{x}{1/3} = \frac{y-1}{1/2} = \frac{z}{1/6}$$

La recta pedida se obtiene por intersección de los planos π_r, que contiene a r y pasa por el origen, y π_s, que contiene a s y pasa por el origen.

- Plano π_r:

Determinado por $O(0, 0, 0)$ y por los vectores $\boldsymbol{OA}$ = (0, 0, 1) y $\vec{v}_r$ = (1, 1/2, 1) ≡ (2, 1, 2); el punto $A(0, 0, 1)$ pertenece a la recta r.



Su ecuación es:

$$\pi_r: \begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_r : x - 2y = 0.$$

- Plano π_s:

Determinado por $O(0, 0, 0)$ y por los vectores $\boldsymbol{OB}$ = (0, 1, 0) y $\vec{v}_s$ = (1/3, 1/2, 1/6) ≡ (2, 3, 1); el punto $B(0, 1, 0)$ pertenece a la recta s.

Su ecuación es:

$$\pi_s: \begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ y & 3 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_s : x - 2z = 0.$$

Por tanto, $t: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow t: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$

6. Canarias, junio 18 (Opción A)

3.- a) Halle la ecuación del plano π que pasa por los puntos $A(-1, 5, 0)$ y $B(0, 1, 1)$ y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x+2y-3=0 \\ 2y-3z-1=0 \end{cases}$. (1,5 puntos)

b) Escribir la ecuación de una recta paralela a la recta r y que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$. (1 punto)

Solución:

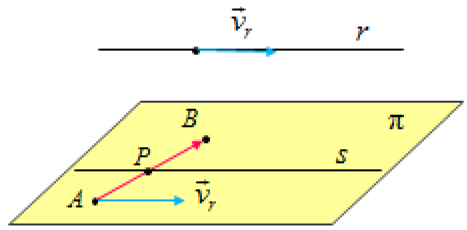
a) El plano π queda determinado por el punto B y por los vectores AB y el de dirección de r. De

$$r \equiv \begin{cases} 3x+2y-3=0 \\ 2y-3z-1=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 3x=3-2y \\ 3z=-1+2y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1-2t/3 \\ y=t \\ z=-1/3+2t/3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}_r = \left(-\frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}\right) \equiv (-2, 3, 2).$$

El vector $\overrightarrow{AB}$ = (0, 1, 1) – (–1, 5, 0) = (1, –4, 1).

Luego:



$$\pi \equiv \begin{cases} x=-2\lambda+\mu \\ y=1+3\lambda-4\mu \\ z=1+2\lambda+\mu \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & -2 & 1 \\ y-1 & 3 & -4 \\ z-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 11x+4y+5z-9=0.$$

b) El punto medio del segmento $\overline{AB}$ es: $P\left(\frac{0-1}{2}, \frac{1+5}{2}, \frac{1+0}{2}\right) \to P\left(\frac{-1}{2}, 3, \frac{1}{2}\right)$.

La recta paralela a r que pasa por P será: $s \equiv \begin{cases} x=-1/2-2t \\ y=3+3t \\ z=1/2+2t \end{cases}$.

7. Canarias, junio 18 (Opción B)

3.- Dados los planos: $\pi_1 : x+y+z-5=0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x=3+\lambda+2\mu \\ y=1-\lambda-\mu \\ z=1+\mu \end{cases}$.

a) Comprobar que los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta. Hallar la ecuación de dicha recta en forma paramétrica. (1,75 puntos)

b) Hallar la ecuación del plano π_3 que pasa por el origen y es perpendicular a los planos π_1 y π_2. (0,75 puntos)

Solución:

a) Los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta cuando el sistema que determinan es compatible indeterminado. (Otra forma de verlo sería estudiar sus vectores normales).

Como $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases} \Rightarrow \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-3 & 1 & 2 \\ y-1 & -1 & -1 \\ z-1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x + y - z - 3 = 0$.

El sistema será:

$$\begin{cases} x + y + z - 5 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 5 - y \\ x - z = 3 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x = 4 - y \end{cases} \to \text{(restando y sumando las ecuaciones)}$$

Se obtiene: $r \equiv \begin{cases} x = 4 - t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$.

b) El plano π_3, que pasa por el origen y es perpendicular a los planos π_1 y π_2, tiene como vector normal $\vec{v}_{\pi 3} = \vec{v}_{\pi 1} \times \vec{v}_{\pi 2}$, siendo $\vec{v}_{\pi 1}$ = (1, 1, 1) y $\vec{v}_{\pi 2}$ = (1, 1, –1), los vectores normales de los planos π_1 y π_2.

$$\vec{v}_{\pi 1} \times \vec{v}_{\pi 2} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2,\ 2,\ 0).$$

Como π_3 debe pasar por el origen, su ecuación será:

$$\pi_3 \equiv -2x + 2y = 0 \Rightarrow \pi_3 \equiv x - y = 0.$$

<u>**8**. Cantabria, junio 18 (EXAMEN Nº 2)</u>

Ejercicio 3

Sean *r* y *s* las rectas

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t, \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}; \qquad s: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}.$$

1) [1,25 PUNTOS] Calcule la posición relativa de *r* y *s*.
2) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia entre *r* y *s*.
3) [0,5 PUNTOS] Calcule el plano perpendicular a *s* que pasa por el punto *P*(0, 1, 0).

<u>Solución</u>:

1) Hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y ***RS***, siendo $R \in r$ y $S \in s$. Si esos vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan; si son linealmente dependientes, están en el mismo plano.

$\vec{v}_r$ = (0, 2, 3), $\vec{v}_s$ = (3, 1, –2) y ***RS*** = (1, 0, –1) – (1, 0, –2) = (0, 0, 1)

Como $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas *r* y *s* se cruzan.

2) La distancia mínima entre ambas rectas viene dada por la fórmula $d(r,s) = \dfrac{\left| \left[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{RS} \right] \right|}{\left| \vec{v}_r \times \vec{v}_s \right|}$.

Como:

$$\left[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{RS}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6;$$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-7,\ 9,\ -6) \Rightarrow \left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right| = \sqrt{(-7)^2 + 9^2 + (-6)^2} = \sqrt{166},$$

Se tiene que:

$$d(r,s) = \frac{6}{\sqrt{166}}$$

9. <u>Cantabria, septiembre 18 (EXAMEN Nº 1)</u>

Ejercicio 3 Sean A y B los planos:

$$A : (0,1,0) + t\overrightarrow{(1,-1,2)} + s\overrightarrow{(0,0,1)} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$B : x + 2y + 2z = 1.$$

1) [1 PUNTO] Calcule la ecuación implícita (general) del plano A.

2) [1 PUNTO] Calcule un punto y el vector director de la recta intersección de A y B.

3) [1,25 PUNTOS] Calcule el ángulo formado por los dos planos A y B.

<u>Solución</u>:

1) $A \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y-1 & -1 & 0 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A: -x - (y-1) = 0 \Rightarrow x + y = 1.$

2) La recta intersección de los planos A y B viene dada por la solución del sistema:

$$r: \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \to P(1,\ 0,\ 0);\ \vec{v}_r = (2,\ -2,\ 1)$$

3) El coseno del ángulo, α, determinado por los planos A y B viene dado por:

$$\cos(\vec{v}_A,\ \vec{v}_B) = \frac{(1,\ 1,\ 0)\cdot(1,\ 2,\ 2)}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{ángulo } (A, B) = 45^{\circ}.$$

10. Castilla La Mancha, junio 18

4A. Dado el plano $\alpha \equiv 4x+2y+4z-15=0$ y el punto $A(2, -3, 1)$:

a) Calcula la distancia del punto A al plano α. (1 punto)

b) Calcula razonadamente el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al plano α sea igual que la distancia del punto A al plano α. (1,5 puntos)

Solución:

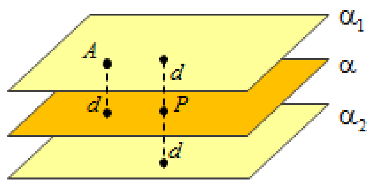
a) La distancia de un punto a un plano viene dada por la expresión:

$$d\left(P(x_0, y_0, z_0), \pi: ax+by+cz+d=0\right)=\left|\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|.$$

En este caso:

$$d\left(A(2,-3,1), \alpha \equiv 4x+2y+4z-15=0\right)=\left|\frac{4\cdot 2+2\cdot(-3)+4\cdot 1-15}{\sqrt{4^2+2^2+4^2}}\right|=\left|\frac{-9}{6}\right|=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}.$$

b) El lugar geométrico pedido está formado por un par de planos, ambos paralelos a α y que disten 3/2 de él. El primero de esos planos pasa por A; el segundo es el plano "simétrico" del primero respecto de α.



Ambos planos vienen dados por la ecuación genérica:

$$4x+2y+4z+d=0.$$

El valor d puede obtenerse imponiendo que un punto cualquiera del plano α, por ejemplo, $P(15/4, 0, 0)$, diste 3/2 de ellos, esto es:

$$d\left(P(15/4,0,0), 4x+2y+4z+d=0\right)=\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{15+0+0+d}{6}\right|=\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{15+0+0+d}{6}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{15+0+0+d}{6}=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15+d=9 \to d=-6 \\ 15+d=-9 \to d=-24 \end{cases}.$$

Los planos buscados son:

$$\alpha_1 \equiv 4x+2y+4z-6=0;\ \alpha_2 \equiv 4x+2y+4z-24=0.$$

11. Castilla La Mancha, junio 18

4B. Dados los vectores $\vec{u}=(0, 1, 1)$, $\vec{v}=(1, 1, -1)$ y $\vec{w}=(2, 0, 3)$:

a) Determina el valor de $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que el vector $\vec{u}-\lambda\vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{w}$. (1 punto)

b) ¿Son linealmente dependientes los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$? Razona la respuesta. (0,5 puntos)

c) Encuentra razonadamente las ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta que pase por el punto $P(2, 0, 2)$ y que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (1 punto)

Solución:

a) Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar vale 0.

$$\vec{u}-\lambda\vec{v}=(0, 1, 1)-\lambda(1, 1, -1)=(-\lambda,\ 1-\lambda,\ 1+\lambda);\ \vec{w}=(2, 0, 3) \Rightarrow$$

$$(\vec{u}-\lambda\vec{v})\cdot 3\vec{w}=(-\lambda,\ 1-\lambda,\ 1+\lambda)\cdot(2,\ 0,\ 3)=-2\lambda+3+3\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-3.$$

b) Serán dependientes cuando el determinante asociado valga 0.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-5-2\neq 0$, los vectores dados son linealmente independientes.

c) El vector de dirección de la recta pedida se obtiene multiplicando vectorialmete los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2,\ 1,\ -1).$$

La recta que pasa por el punto $P(2, 0, 2)$ y sigue la dirección del vector $(-2, 1, -1)$ es:

$$r \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1} \to \text{(Multiplicando en cruz…)}$$

$$r \equiv \begin{cases} x-2=-2y \\ -y=z-2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x+2y-2=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$$, que son las ecuaciones cartesianas pedidas.

<u>**12**. Castilla y León, junio 18</u>

E2. Determinar la recta *s* que es simétrica de $r \equiv x+2=y=z-2$, respecto del plano $\pi \equiv x-z+2=0$. (2puntos)

<u>Solución</u>:

Las ecuaciones paramétricas de *r* son: $r \equiv \begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=\ \ \ \ \ \ \lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$.

La recta *r* es paralela al plano π, pues “sustituyendo” *r* en π se tiene que:

$$\pi \equiv x-z+2=0 \to \pi \equiv -2+\lambda-(2+\lambda)+2 \neq 0.$$

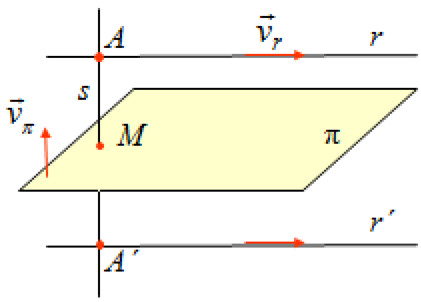
También puede verse que su vector director, $\vec{v}_r$ = (1, 1, 1), es perpendicular al vector normal del plano, $\vec{v}_\pi$ = (1, 0, –1).

La recta simétrica de *r* respecto de π será la que pase por un punto *A*´, simétrico de $A \in r$ respecto de π, y cuyo vector de dirección sea el mismo $\vec{v}_r$.

Sea $A' = (x_0, y_0, z_0)$ el simétrico de *A* = (–2, 0, 2) respecto de π.

Ambos puntos, *A* y *A*’ estarán en la recta *s*, perpendicular a π por *A*. Además, si *M* es el punto de corte de la recta *s* con el plano π, *M* debe ser el punto medio entre *A* y *A*´.

Como $\vec{v}_\pi$ = (1, 0, –1) $\Rightarrow$ $s \equiv \begin{cases} x=-2+t \\ y=0 \\ z=2-t \end{cases}$.



Corte de la recta *s* con el plano π:

$$(-2+t)-(2-t)+2=0 \Rightarrow t=1.$$

Por tanto, *M* = (–1, 0, 1).

Punto medio de *A* y *A*´: $\left(\frac{-2+x_0}{2}, \frac{0+y_0}{2}, \frac{2+z_0}{2}\right)$.

Como *M* = (–1, 0, 1) = $\left(\frac{-2+x_0}{2}, \frac{0+y_0}{2}, \frac{2+z_0}{2}\right) \Rightarrow A' = (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$.

Luego, la recta *r*´, simétrica de *r* respecto de π, será: $r' \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$.

13. Castilla y León, julio 18

E2.- Dados el plano $\pi \equiv ax + y - z + b = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

a) Encontrar a y b para que la recta esté contenida en el plano. (1 punto)
b) ¿Existen valores a y b para que la recta sea perpendicular al plano? Razonar la posible respuesta negativa o encontrarlos en su caso. (1 punto)

Solución:

a) Si una recta está contenida en un plano se cumplen dos cosas:
1) Cualquier punto de la recta está en el plano (esto sería suficiente);
2) El vector de dirección de la recta es perpendicular al normal al plano.

Las ecuaciones paramétricas de r son: $r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases} \to \vec{v}_r = (1, -1, 1)$.

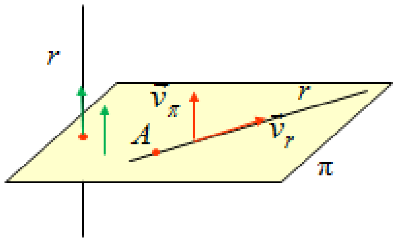
Los vectores $\vec{v}_r = (1, -1, 1)$ y $\vec{v}_\pi = (a, 1, -1)$ serán perpendiculares cuando su producto escalar valga 0:

$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = 0 \Rightarrow (1, -1, 1) \cdot (a, 1, -1) = 0 \Rightarrow a - 1 - 1 = 0 \Rightarrow a = 2$.

Con esto, $\pi \equiv 2x + y - z + b = 0$.

Como el punto $A = (1, 2, 3) \in r$ debe pertenecer también a π;

$\pi \equiv 2x + y - z + b = 0 \Rightarrow . \pi \equiv 2 + 2 - 3 + b = 0 \Rightarrow b = -1$.



b) La recta y el plano son perpendiculares cuando $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_\pi$ sean paralelos. Esto significa que

$\vec{v}_r = m \cdot \vec{v}_\pi \Rightarrow (1, -1, 1) = m \cdot (a, 1, -1) \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} \Rightarrow a = -1$.

El parámetro b puede ser cualquier número.

14. Cataluña, junio 18

Considere los puntos $P = (3, -2, 1)$, $Q = (5, 0, 3)$, $R = (1, 2, 3)$ y la recta $r: \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$.

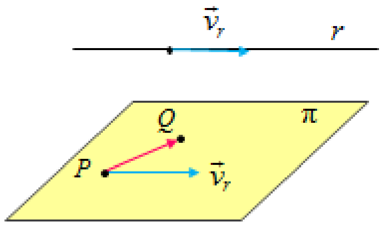
a) Determine la ecuación general (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por P y Q y es paralelo a la recta r. [1 punto]
b) Dados el plano $x + 2y + m \cdot z = 7$ y el plano que pasa por P, Q y R, encuentre m para que sean paralelos y no coincidentes. [1 punto]

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r son:

$$r: \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases} \to r: \begin{cases} x = -1 - y \\ z = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}y \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \left(-1, 1, -\frac{2}{3}\right) = (-3, 3, -2).$$

El vector $\overrightarrow{PQ} = (5, 0, 3) - (3, -2, 1) = (2, 2, 2)$.



El plano pedido viene determinado por el punto P y por los vectores $\vec{v}_r$ y $\overrightarrow{PQ}$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & 2 & -3 \\ y+2 & 2 & 3 \\ z-1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -10(x-3)-2(y+2)+12(z-1)=0 \Rightarrow 5x+y-6z=7.$$

El plano que pasa por P, Q y R viene determinado por el punto P y por los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ = (1, 2, 3) – (3, –2, 1) = (–2, 4, 2).
Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & 2 & -2 \\ y+2 & 2 & 4 \\ z-1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4(x-3)-8(y+2)+12(z-1)=0 \Rightarrow x+2y-3z=-4.$$

Si se quiere que el plano $x + 2y + m \cdot z = 7$ sea paralelo y no coincidente con el plano que pasa por P, Q y R, es necesario que $m = -3$.

<u>**15**. Comunidad Valenciana, junio 18</u>

Problema A.2. Dados los puntos $A(-1, 2, \lambda)$, $B(2, 3, 5)$ y $C(3, 5, 3)$, donde λ es un parámetro real, se pide obtener **<u>razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>**:

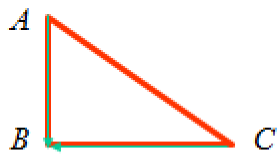
a) El valor del parámetro λ para que el segmento AC sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo de vértices A, B y C. (3 puntos).

b) El área del triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$. (4 puntos).

c) La ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$. (3 puntos)

<u>Solución</u>:

a) Si el segmento AC es la hipotenusa, entonces los lados AB y CB serán perpendiculares.



Si $A(-1, 2, \lambda)$, $B(2, 3, 5)$ y $C(3, 5, 3)$ $\Rightarrow$

$AB = (2, 3, 5) - (-1, 2, \lambda) = (3, 1, 5 - \lambda)$;

$CB = (2, 3, 5) - (3, 5, 3) = (-1, -2, 2)$;

$AC = (3, 5, 3) - (-1, 2, \lambda) = (4, 3, 3 - \lambda)$.

Como $AB \cdot CB = 0 \Rightarrow (3, 1, 5 - \lambda) \cdot (-1, -2, 2) = -3 -2 +10 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 5/2$.

b) Si $\lambda = 6$, $AB = (3, 1, -1)$ y $CB = (-1, -2, 2)$.

El área del triángulo es: $S = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CB}\right|$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CB} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (0, \ -5, \ -5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CB}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{0+25+25} = \frac{1}{2}\sqrt{50} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ u}^2.$$

c) El plano pedido viene determinado por el punto $B(2, 3, 5)$ y por los vectores $AB = (3, 1, -1)$ y $CB = (-1, -2, 2)$.
Su ecuación será:

$$\pi : \begin{cases} x = 2+3t-h \\ y = 3+t-2h \\ z = 5-t+2h \end{cases} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-2 & 3 & -1 \\ y-3 & 1 & -2 \\ z-5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi : 0(x-2)-5(y-3)-5(z-5)=0 \Rightarrow y+z-8=0 .$$

<u>16. Comunidad Valenciana, junio 18</u>

Problema B.2. Dados el punto $A(5, 7, 3)$ y la recta $r:\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{2}$, se pide obtener **<u>razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>**:

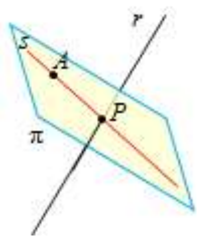
a) La recta *s* que corta a la recta *r*, pasa por el punto *A*, y es perpendicular a la recta *r*. (4 puntos).

b) La distancia del punto *A* a la recta *r*. (3 puntos).

c) La distancia del punto $B(1, 1, 1)$ al plano π que pasa por $(3, -1, 0)$ y es perpendicular a *r*. (3 puntos).

<u>Solución</u>:

a) La recta *s* viene determinada por el punto *A* y por el punto de corte (de *r*) con el plano π, perpendicular a *r* que pasa por *A*.



Como $r:\begin{cases} x = 3-t \\ y = -1+3t \\ z = 2t \end{cases}$, el plano π está determinado por el vector $\vec{v}_r = (-1, 3, 2)$ y por el punto $A(5, 7, 3)$:

$$\pi : -(x-5)+3(y-7)+2(z-3)=0 \Rightarrow \pi : x-3y-2z+22=0 .$$

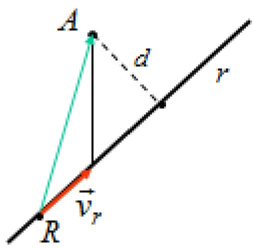
Corte de π con *r*:

$$3-t-3(-1+3t)-2(2t)+22=0 \Rightarrow -14t+28=0 \Rightarrow t=2 \Rightarrow P(1,5,4).$$

Como el vector $\overrightarrow{AP}=(1,5,4)-(5,7,3)=(-4,-2,1)$, la recta *s* es:

$$s:\begin{cases} x = 5-4t \\ y = 7-2t \\ z = 3+t \end{cases}.$$

b) La ecuación de la distancia de un punto *A* a una recta *r* es:



$$d(A,r)=\frac{\left|\overrightarrow{RA}\times\vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}, \text{ siendo } R\in r.$$

En este caso:

$A = (5, 7, 3)$, $R = (3, -1, 0)$, $\overrightarrow{RA} = (2, 8, 3)$, $\vec{v}_r = (-1, 3, 2)$.

El producto vectorial vale:

$$\overrightarrow{RA}\times\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & 8 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (7,\ -7,\ 14) \Rightarrow \left|\overrightarrow{RA}\times\vec{v}_r\right| = \sqrt{7^2+(-7)^2+14^2} = 7\sqrt{6} .$$

El módulo de $\vec{v}_r$: $\left|\vec{v}_r\right| = \sqrt{(-1)^2+3^2+2^2} = \sqrt{14}$.

Luego $d(B,r)=\dfrac{7\sqrt{6}}{\sqrt{14}}=\sqrt{21}$ u.

c) El plano π será:

$$\pi: -(x-3)+3(y+1)+2z=0 \Rightarrow \pi: x-3y-2z-6=0.$$

Por tanto:

$$d\left(B(1,1,1); \pi: x-3y-2z-6=0\right)=\left|\frac{1-3-2-6}{\sqrt{14}}\right|=\frac{10}{\sqrt{14}}.$$

<u>**17**. Extremadura, junio 18</u>

Sean el punto A = (1, 0, 1) y la recta r dada por el punto B = (–1, 0, 2) y el vector $\vec{v}$ = (–1, 1, 0).

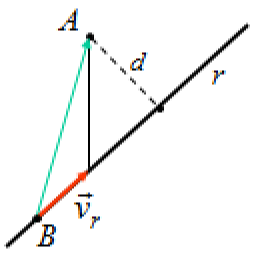
a) Calcule la distancia del punto A a la recta r. (1,5 puntos)

b) Calcule el área del triángulo de vértices A, B y O, siendo O = (0, 0, 0). (1 punto)

<u>Solución</u>:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r son: $r: \begin{cases} x=-1-t \\ y= \quad t \\ z=2 \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r$ = (–1, 1, 0);

La distancia del punto A a la recta r es: $d(A,r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{BA}\times\vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}$.



Como A = (1, 0, 1) y B = (–1, 0, 2), $\overrightarrow{BA}$ = (–2, 0, 1), $\vec{v}_r$ = (–1, 1, 0), el producto vectorial vale:

$$\overrightarrow{BA}\times\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,\ -1,\ -2) \Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{BA}\times\vec{v}_r\right| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}.$$

El módulo de $\vec{v}_r$: $\left|\vec{v}_r\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$.

Luego, $d(A,r)=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$ u.

b) El área del triángulo de A, B y O vale un medio del módulo del producto vectorial de los vectores OA y OB.

Esto es: $S=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right| = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (0,\ -3,\ 0) \Rightarrow S=\dfrac{1}{2}\cdot|3|=\dfrac{3}{2}$ u^2.

18. Galicia, junio 18

3A. a) Determina el valor de λ para que los puntos $A(3, 0, -1)$, $B(2, 2, -1)$, $C(1, -2, -5)$ y $D(\lambda, 6, -1)$ sean coplanarios y calcula la ecuación implícita o general del plano que los contiene.

b) Determina la posición relativa del plano $\pi: 4x+2y-3z-15=0$ y la recta r que pasa por los puntos $P(-4, 4, 2)$ y $Q(4, 8, -4)$. Si se cortan, calcula el punto de corte.

c) Calcula el punto simétrico del punto $P(-4, 4, 2)$ respecto del plano $\pi: 4x+2y-3z-15=0$.

Solución:

a) Los puntos $A(3, 0, -1)$, $B(2, 2, -1)$, $C(1, -2, -5)$ y $D(\lambda, 6, -1)$ serán coplanarios cuando los vectores:

$\mathbf{AB} = (2, 2, -1) - (3, 0, -1) = (-1, 2, 0)$; $\mathbf{AC} = (1, -2, -5) - (3, 0, -1) = (-2, -2, -4)$ y

$\mathbf{AD} = (\lambda, 6, -1) - (3, 0, -1) = (\lambda - 3, 6, 0)$ sean linealmente dependientes.

Para ello:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -4 \\ \lambda-3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4\cdot\left(-6-2\lambda+6\right)=0 \Rightarrow \lambda = 0.$$

El plano que determinan es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & -1 & -2 \\ y & 2 & -2 \\ z+1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -8\left(x-3\right)-4y+6\left(z+1\right)=0 \Rightarrow 4x+2y-3z-15=0.$$

b) La recta r es:

$$r: \begin{cases} x=-4+8t \\ y=4+4t \\ z=2-6t \end{cases} \rightarrow \text{su vector de dirección es } \mathbf{PQ} = (4, 8, -4) - (-4, 4, 2) = (8, 4, -6).$$

Sustituyendo las ecuaciones de r en la del plano π:

$$\pi: 4x+2y-3z-15=0 \Rightarrow \pi: 4\left(-4+8t\right)+2\left(4+4t\right)-3\left(2-6t\right)-15=0 \Rightarrow$$

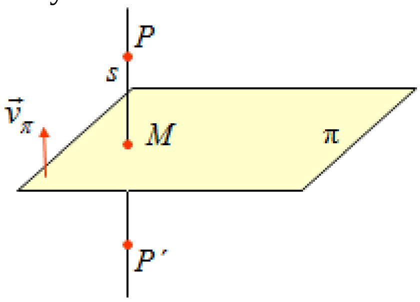
$$\Rightarrow 58t-29=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2}.$$

Esto indica que la recta y el plano se cortan cuando $t=\frac{1}{2}$; en el punto $(0, 6, -1)$.

c) Sea $P' = (x_0, y_0, z_0)$ el simétrico de $P(-4, 4, 2)$ respecto del plano $\pi: 4x+2y-3z-15=0$.

Ambos puntos, P y P' estarán en la recta s, perpendicular a π por P. Además, si M es el punto de corte de la recta y el plano, M debe ser el punto medio entre P y P'.

Como $\vec{v}_\pi = (4, 2, -3)$, se deduce que $s: \begin{cases} x=-4+4\lambda \\ y=4+2\lambda \\ z=2-3\lambda \end{cases}$.



(Es la recta r anterior).

Corte de la recta s con plano π:

$4(-4 + 4\lambda) + 2(4 + 2\lambda) - 3(2 - 3\lambda) - 15 = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$

Por tanto, $M = (0, 6, -1)$.

Punto medio de P y P': $\left(\dfrac{-4+x_0}{2}, \dfrac{4+y_0}{2}, \dfrac{2+z_0}{2}\right)$.

Como M = (0, 6, –1) = $\left(\dfrac{-4+x_0}{2}, \dfrac{4+y_0}{2}, \dfrac{2+z_0}{2}\right) \Rightarrow$

$$0=\frac{-4+x_0}{2} \Rightarrow x_0=4;\ 6=\frac{4+y_0}{2} \Rightarrow y_0=8;\ -1=\frac{2+z_0}{2} \Rightarrow z_0=-4.$$

Por tanto, P' = (4, 8, –4).

<u>**19**. Galicia, junio 18</u>

3B. a) Dado el plano $\pi: 2x-y-2z-3=0$, calcula el valor de a para que la recta r que pasa por los puntos $P(a, a, a)$ y $Q(1, 3, 0)$ sea paralela al plano π.

b) Para a = 1, calcula la distancia de r a π.

c) Para a = 1, calcula la ecuación implícita o general del plano que es perpendicular a π y contiene a r.

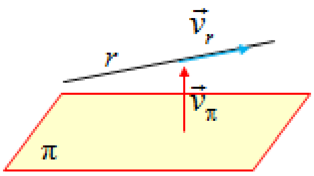
<u>Solución</u>:

El vector de dirección de la recta r es $\overline{QP}$ = (a, a, a) – (1, 3, 0) = (a – 1, a –3, a).

La recta será paralela al plano π si el vector característico de π, $\vec{v}_\pi$ = (2, –1, –2), es perpendicular a $\overline{QP}$.

Luego $\overline{QP} \cdot \vec{v}_\pi = 0$:

$(a-1, a-3, a)\cdot(2, -1, -2) = 0 \Rightarrow 2a-2-a+3-2a=0 \Rightarrow a=1.$



b) Para a = 1, que es el caso anterior (recta paralela al plano), la distancia $d(r,\pi)=d(Q,\pi)$.

Esto es:

$$d\left(Q(1,3,0), \pi: 2x-y-2z-3=0\right)=\left|\frac{2\cdot1-1\cdot3-3}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}\right|=\frac{4}{3}\text{ u.}$$

c) El plano pedido viene determinado por el punto Q y los vectores $\overline{QP}$ = (0, –2, 1) y $\vec{v}_\pi$.

Su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ y-3 & -2 & -1 \\ z & 1 & -2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 5(x-1)+2(y-3)+4z=0 \Rightarrow 5x+2y+4z-11=0.$$

20. Islas Canarias, julio 18

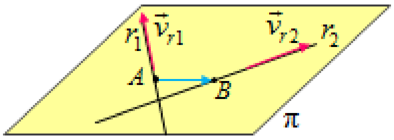
3.- Dadas las rectas $r_1 \equiv x-1=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2}$ y $r_2 \equiv \frac{x+5}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+4}{3}$, se pide

a) Demostrar que las rectas r_1 y r_2 son coplanarias. (1,25 puntos)

b) Hallar la ecuación del plano que determinan. (1,25 puntos)

Solución:

a) Las rectas r_1 y r_2 serán coplanarias si los vectores $\vec{v}_{r1}=(1,-1,2)$, $\vec{v}_{r2}=(4,-2,3)$ y $\mathbf{AB}=(-6,2,-2)$, siendo $A=(1,1,-2)$ y $B=(-5,3,-4)$, puntos de r_1 y r_2, respectivamente, son linealmente dependientes.



Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ -6 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2+10-8=0 \Rightarrow$ efectivamente, las rectas son coplanarias.

b) El plano que determinan será:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ x-1 & y-1 & z+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: x-1+5(y-1)+2(z+2)=0 \Rightarrow \pi: x+5y+2z-2=0.$$

21. La Rioja, junio 18 (A)

1. Sean los vectores $\vec{u}=(-1,4,8)$ y $\vec{v}=(1,2,-2)$.

i) Demuestre que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es mayor que 90º.

ii) Calcule un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que tenga módulo 1.

Solución:

i) El coseno del ángulo que determinan los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es:

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{(-1,\ 4,\ 8)\cdot(1,\ 2,\ -2)}{\sqrt{(-1)^2+4^2+8^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \frac{-1+8-16}{\sqrt{81}\cdot\sqrt{9}} = \frac{-9}{27}.$$

Como el coseno tiene signo negativo, el ángulo debe ser mayor de 90º.

ii) Un vector perpendicular a dos dados se obtiene haciendo su producto vectorial.

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -1 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-24,\ 6,\ -6).$$

Un vector unitario en la dirección de $\vec{u}\times\vec{v}$ es

$$\frac{1}{|\vec{u}\times\vec{v}|}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{(-24)^2+6^2+(-6)^2}}\cdot(-24,\ 6,\ -6) = \frac{1}{\sqrt{648}}\cdot(-24,\ 6,\ -6).$$

22. La Rioja, junio 18 (B)

2.– (3 puntos) Sean el punto $P = (1, 2, -2)$ y la recta $r: \begin{cases} x = 2-\lambda, \\ y = 1+\lambda, \\ z = 2\lambda. \end{cases}$

(I) Determine la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta r.

(II) Determine el punto de r más próximo a P.

(III) Halle la recta r' simétrica de r respecto al punto P.

Solución:

I) El vector característico del plano es el de dirección de la recta: $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (-1, 1, 2)$.

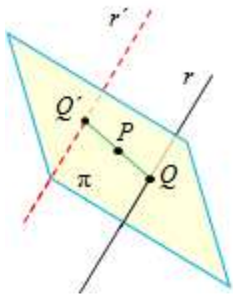
Como debe contener al punto $P = (1, 2, -2)$, su ecuación será:

$$\pi \equiv -1\cdot(x-1)+1\cdot(y-2)+2(z+2)=0 \Rightarrow \pi \equiv -x+y+2z+3=0.$$

II) El punto más próximo es el de intersección de la recta r con el plano π. Se obtiene resolviendo el sistema recta/plano:

$$\pi \equiv -x+y+2z+3=0 \rightarrow$$

$$\pi \equiv -(2-\lambda)+(1+\lambda)+2(2\lambda)+3=0 \Rightarrow 6\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{3}.$$



El punto pedido es: $Q=\left(2+\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{3}, 2\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)\right)=\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

III) Observación. Esta pregunta es poco frecuente, pues lo normal es pedir una recta simétrica respecto de un plano o un punto simétrico respecto de una recta o de un plano. Tal como está redactada pienso que da lugar a interpretaciones diferentes.

1. Una de las posibles opciones es que se pida la recta $r´$, que pase por el punto $Q´$, simétrico de Q respecto de P, y que, además sea paralela a r.

2. Otra opción es que se pida la recta que determinan los puntos simétricos de r respecto de P.

Haré las dos.

1. El punto $Q´$ se obtiene imponiendo que P sea el punto medio entre Q y $Q´$.

Sea $Q' = (x_0, y_0, z_0)$ el simétrico de $Q=\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ respecto de $P(1, 2, -2)$.

Punto medio de Q y $Q´$: $\left(\frac{7/3+x_0}{2}, \frac{2/3+y_0}{2}, \frac{-2/3+z_0}{2}\right)$.

Como $P = (1, 2, -2)$ $=\left(\frac{7/3+x_0}{2}, \frac{2/3+y_0}{2}, \frac{-2/3+z_0}{2}\right) \Rightarrow$

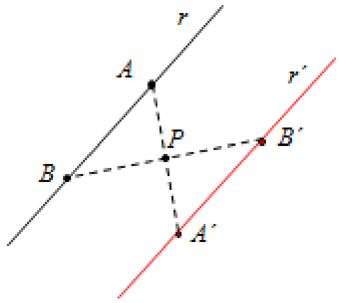
$$1=\frac{7/3+x_0}{2} \Rightarrow x_0=-\frac{1}{3};\ 2=\frac{2/3+y_0}{2} \Rightarrow y_0=\frac{10}{3};\ -2=\frac{-2/3+z_0}{2} \Rightarrow z_0=-\frac{10}{3}.$$

Luego $Q' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{10}{3}\right)$.

Por tanto, la recta "simétrica" pedida será: $r' \equiv \begin{cases} x = -\frac{1}{3} - t \\ y = \frac{10}{3} + t \\ z = -\frac{10}{3} + 2t \end{cases}$.

2. La recta r' pedida vendrá determinada por los puntos A' y B' simétricos de los puntos A y B de r, cualesquiera.

Sean $A(2, 1, 0)$ y $B(1, 2, 2)$. El punto P, respecto del que hay que hacer la simetría es $P(1, 2, -2)$.



Sus simétricos cumplen:

$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{AP} \Rightarrow \overrightarrow{OA'} = (1, 2, -2) + (-1, 1, -2) = (0, 3, -4)$
$\to A'(0, 3, -4)$.

$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{BP} \Rightarrow \overrightarrow{OA'} = (1, 2, -2) + (0, 0, -4) = (1, 2, -6)$
$\to B'(1, 2, -6)$.

El vector $\overrightarrow{A'B'} = (1, 2, -6) - (0, 3, -4) = (1, -1, -2)$.

Luego, la recta r' pedida vendrá determinada por los puntos A' y B' es:

$$r' \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = -4 - 2t \end{cases}$$

Nota: Puede verse que las ecuaciones de ambas r' son equivalentes.

23. Madrid, junio 18

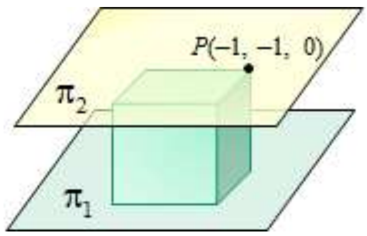
Ejercicio 3A: **Calificación máxima:** 2,5 puntos.

Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0$, $\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.

b) (1,5 puntos) Para el cuadrado de vértices consecutivos $ABCD$, con $A(2, 1, 3)$ y $B(1, 2, 3)$, calcular los vértices C y D, sabiendo que C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$.

Solución:



Como los planos $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$ son paralelos, la medida de la arista del cubo viene dada por la distancia entre ambos planos.

La distancia entre esos planos es:

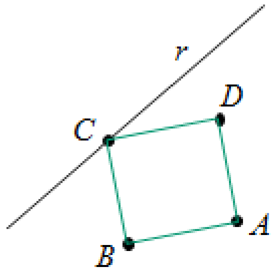
$$d(\pi_1, \pi_2) = d\left(P(-1, -1, 0) \in \pi_2, \pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0\right) = \left|\frac{-4 - 6 + 1}{\sqrt{4^2 + 6^2 + (-12)^2}}\right| = \frac{9}{14}.$$

Por tanto, el volumen del cubo será:

$$V = \left(\frac{9}{14}\right)^3 = \frac{729}{2744} \text{ u}^3.$$

b) Cuadrado de vértices consecutivos *ABCD*, con *A*(2, 1, 3) y *B*(1, 2, 3), y *C* pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$.

El punto *C* estará en la recta determinada por π_2 y π_3.



$$\begin{cases} \pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0 \\ \pi_3 \equiv x - y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} -2x - 3y = 5 - 6z \\ x - y = 2 - z \end{cases} \Rightarrow$$

$$r: \begin{cases} x = \dfrac{1}{5} + \dfrac{3}{5}t \\ y = -\dfrac{9}{5} + \dfrac{8}{5}t \\ z = t \end{cases} \to C\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}t,\quad -\frac{9}{5} + \frac{8}{5}t,\quad t\right).$$

Si *ABCD* es un cuadrado $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.

$$\overrightarrow{AB} = (1,2,3) - (2,1,3) = (-1,1,0);$$

$$\overrightarrow{CB} = (1,2,3) - \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}t,\quad -\frac{9}{5} + \frac{8}{5}t,\quad t\right) = \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}t,\quad \frac{19}{5} - \frac{8}{5}t,\quad 3 - t\right)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow (-1,1,0) \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}t,\quad \frac{19}{5} - \frac{8}{5}t,\quad 3 - t\right) = 0 \Rightarrow -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}t + \frac{19}{5} - \frac{8}{5}t = 0 \Rightarrow t = 3.$$

Por tanto: *C*(2, 3, 3).

Si *D*(*a*, *b*, *c*), como $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow (2-a, 3-b, 3-c) = (-1,1,0) \Rightarrow a = 3;\ b = 2,\ c = 3$.

Luego, *D*(3, 2, 3).

24. Madrid, junio 18

Ejercicio 3B: **Calificación máxima:** 2,5 puntos.

Dados el punto *P*(1, 1, 1) y las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 5x + z = 6 \end{cases}$, $s \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1/3}$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto *P* a la recta *r*.

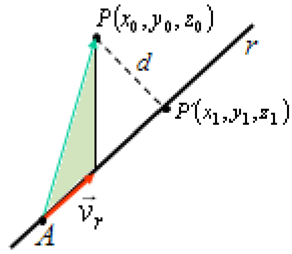
b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las rectas *r* y *s*.

c) (0,5 puntos) Hallar el plano perpendicular a la recta *s* y que pasa por el punto *P*.

Solución:

a) Se escribe la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 5x + z = 6 \end{cases}$ en paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = 6 - 5t \end{cases}$.

La ecuación de la distancia de un punto *P* a una recta *r* es:



$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}, \text{ siendo } A \in r.$$

En este caso:

$A = (0, 2, 6)$, $P = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{AP} = (1, -1, -5)$, $\vec{v}_r = (1, -2, -5)$.

El producto vectorial vale:

$$\overrightarrow{AP}\times\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = (-5,\ 0,\ -1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}_r\right| = \sqrt{(-5)^2+(-1)^2} = \sqrt{26}.$$

El módulo de $\vec{v}_r$: $|\vec{v}_r| = \sqrt{1+(-2)^2+(-5)^2} = \sqrt{30}$.

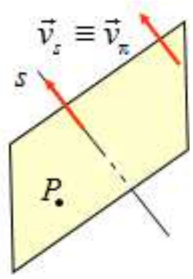
Luego $d(P,r) = \dfrac{\sqrt{26}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\dfrac{13}{15}}$.

b) Hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\boldsymbol{AB}$, siendo $A \in r$ y $B \in s$. Si esos vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan; si son linealmente dependientes, están en el mismo plano.

$\vec{v}_r = (1, -2, -5)$, $\vec{v}_s = (-1, 1, 1/3)$ y $\boldsymbol{AB} = (2, -1, -1) - (0, 2, 6) = (2, -3, -7)$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 1/3 \\ 2 & -3 & -7 \end{vmatrix} = -7+1+2\left(2-\dfrac{2}{3}\right)-5 = \dfrac{5}{3} \neq 0$, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas r y s se cruzan.

c) El plano perpendicular a la recta s y que pasa por el punto P tiene como vector normal a $\vec{v}_s = (-1, 1, 1/3)$.



Por tanto, su ecuación será: $\pi \equiv -x+y+\dfrac{1}{3}z+d=0$.

Como se desea que pase por $P(1, 1, 1) \Rightarrow -1+1+\dfrac{1}{3}+d=0 \Rightarrow d=-\dfrac{1}{3}$.

El plano pedido será: $\pi \equiv -x+y+\dfrac{1}{3}z-\dfrac{1}{3}=0$.

<u>25. Murcia, junio 18</u>

CUESTIÓN B.4: Considere el punto $P = (0, 1, 2)$ y la recta r dada por la ecuación:

$$r: \begin{cases} 2x+y-z=-1 \\ x-y+z=3 \end{cases}.$$

a) [1,25 p.] Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano π que es perpendicular a la recta r y pasa por el punto P.

b) [1,25 p.] Calcule la distancia del punto P al plano $x+y+z=5$.

<u>Solución</u>:

a) El vector característico del plano es el de dirección de la recta: $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r$.

Para determinar $\vec{v}_r$ se expresa la recta en sus ecuaciones paramétricas:

$$r: \begin{cases} 2x+y-z=-1 \\ x-y+z=3 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{matrix} \\ E2+E1 \end{matrix}\begin{cases} 2x+y-z=-1 \\ 3x=2 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} 4/3+y-z=-1 \\ \uparrow x=2/3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x=2/3 \\ y=-7/3+\lambda \\ z=\quad\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (0, 1, 1).$$

Como el plano debe contener al punto $P = (0, 1, 2)$, su ecuación será:

$$\pi \equiv 1\cdot(y-1)+1\cdot(z-2)=0 \Rightarrow \pi \equiv y+z-3=0.$$

b) La distancia del punto P(0, 1, 2) al plano $x+y+z=5$ viene dada por:

$$d\left(P(0,1,2),\pi: x+y+z-5=0\right)=\left|\frac{0+1+2-5}{\sqrt{1+1+1}}\right|=\frac{2}{\sqrt{3}}\ \text{u.}$$

26. Navarra, junio 18

A2) Sean los puntos $P \equiv (7, 4, 2)$, $Q \equiv (1, 2, -2)$ y $R \equiv (2, 1, -3)$. Uno de ellos es el centro de un rombo, y los otros dos, dos vértices. Halle los dos vértices restantes.

Solución:

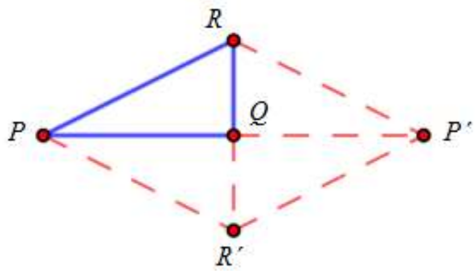
En primer lugar hay que determinar cuál de esos puntos es el centro del rombo. Debe ser el que cumpla que los vectores que tengan origen en él y final en los otros dos puntos sean perpendiculares: las diagonales de un rombo son perpendiculares.

Esos vectores son:

$\overrightarrow{PQ}$ = (1, 2, –2) – (7, 4, 2) = (–6, –2, –4).

$\overrightarrow{PR}$ = (2, 1, –3) – (7, 4, 2) = (–5, –3, –5).

$\overrightarrow{QR}$ = (2, 1, –3) – (1, 2, –2) = (1, –1, –1).



Son perpendiculares $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$. Por tanto, el centro del rombo es el punto Q; P y R son vértices.

Para ver que son perpendiculares se hace su producto escalar: $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QR}$ = (–6, –2, –4) · (1, –1, –1) = –6 + 2 + 4 = 0.

Los otros dos vértices son los simétricos de P y R respecto de Q.

Sus simétricos cumplen:

$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{OP'}$ = (1, 2, –2) + (–6, –2, –4) = (–5, 0, –6) ⇒ P' = (–5, 0, –6).

$\overrightarrow{OR'}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{RQ} \Rightarrow \overrightarrow{OR'}$ = (1, 2, –2) + (–1, 1, 1) = (0, 3, –1) ⇒ R' = (0, 3, –1).

27. Navarra, junio 18

B2) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P \equiv (-4, 0, 5)$ y corta a las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$ y $s \equiv \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{1}$.

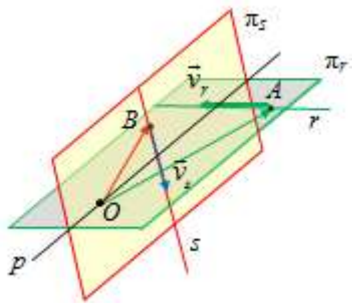
Solución:

La recta pedida será la intersección de dos planos: π_r, que pasa por P y contiene a r, y π_s, que pasa por P y contiene a s.

Las ecuaciones paramétricas de las rectas dadas son:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$r \overset{E1-E2}{\equiv} \begin{cases} z-2=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-1-t \\ y= \quad t \\ z=2 \end{cases}.$$



Luego: $\vec{v}_r$ = (–1, 1, 0) y $A \in r$, A(–1, 0, 2).

$$s \equiv \frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1} \Leftrightarrow s \equiv \begin{cases} x=2+2h \\ y=3+h \\ z=h \end{cases} \to \vec{v}_s = (2, 1, 1) \text{ y } B \in s,\ B(2, 3, 0).$$

El plano π_r viene dado por P, $\vec{v}_r$ y $\boldsymbol{AP}$ = (–4, 0, 5) – (–1, 0, 2) = (–3, 0, 3).

Su ecuación es:

$$\pi_r \equiv \begin{vmatrix} x+4 & -1 & -3 \\ y & 1 & 0 \\ z-5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_r \equiv 3(x+4)+3y+3(z-5)=0 \Rightarrow \pi_r \equiv x+y+z-1=0.$$

El plano π_s viene dado por P, $\vec{v}_s$ y $\boldsymbol{BP}$ = (–4, 0, 5) – (2, 3, 0) = (–6, –3, 5).

Su ecuación es:

$$\pi_s \equiv \begin{vmatrix} x+4 & 2 & -6 \\ y & 1 & -3 \\ z-5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_s \equiv 8(x+4)-16y=0 \Rightarrow \pi_s \equiv x-2y+4=0.$$

Por tanto, la recta pedida es:

$$p \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-2y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow p \equiv \begin{cases} x=-4+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=5-3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow p \equiv \frac{x+4}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{-3}.$$

28. País Vasco, junio 18

Dados los puntos $A(3, 3, 3)$, $B(2, 3, 4)$, $C(0, 0, 4)$ y $D(3, 0, 1)$.

a) ¿Están en el mismo plano? En caso afirmativo, hallar la ecuación del plano. En caso negativo, razonar la respuesta.

b) Calcular a para que el punto $P(a, a, 8)$ esté en la recta que pasa por los puntos A y C.

Solución:

a) Los puntos $A(3, 3, 3)$, $B(2, 3, 4)$, $C(0, 0, 4)$ y $D(3, 0, 1)$ serán coplanarios cuando los vectores $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$ y $\boldsymbol{AD}$ sean linealmente dependientes, siendo:

$\boldsymbol{AB}$ = (2, 3, 4) – (3, 3, 3) = (–1, 0, 1); $\boldsymbol{AC}$ = (0, 0, 4) – (3, 3, 3) = (–3, –3, 1) y

$\boldsymbol{AD}$ = (3, 0, 1) – (3, 3, 3) = (0, –3, –2) sean linealmente dependientes.

Efectivamente lo son, pues el determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -9+9=0.$$

b) La recta que pasa por A y C es: $r: \begin{cases} x=3-3t \\ y=3-3t \\ z=3+t \end{cases}$.

El punto $P(a, a, 8)$ pertenece a ella cuando $\begin{cases} a=3-3t \\ a=3-3t \\ 8=3+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-12 \\ a=-12 \\ t=5 \end{cases}$.