ALGUNOS PROBLEMAS DE ANÁLISIS PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE EBAU–EvAU–PEBAU … DE 2018

1. Andalucía, junio 18
Ejercicio 2B.

Considera las funciones *f* y *g*: **R** → **R** definidas por $g(x)=-\dfrac{x^2}{4}$ y $f(x)=3-x^2$.

(a) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = 1 y comprueba que también es tangente a la gráfica de *g*. Determina el punto de tangencia con la gráfica de *g*.
(b) [0,75 puntos] Esboza el recinto limitado por la recta *y* = 4 – 2*x* y las gráficas de *f* y *g*. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).
(c) [0,75 puntos] Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.
Solución:
(a) La recta tangente a la función $f(x)$ en el punto *x* = 1 es $y-f(1)=f'(1)(x-1)$.

Como $f'(x)=-2x \to \left(f(1)=2,\ f'(1)=-2\right)$, se obtiene:

$$y-2=-2(x-1) \Rightarrow y=-2x+4.$$

Esa recta y la curva $g(x)=-\dfrac{x^2}{4}$ se cortan en la solución de $-\dfrac{x^2}{4}=-2x+4 \Rightarrow$

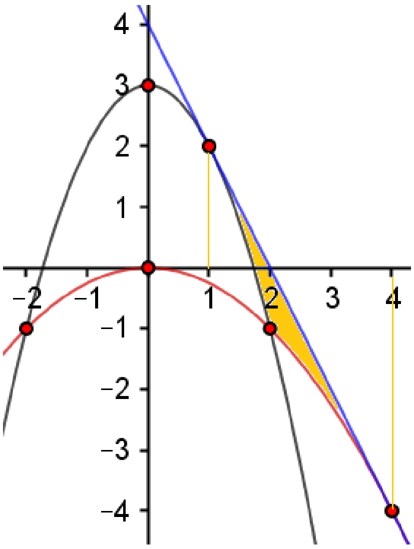
$\Rightarrow x^2-8x+16=0 \Leftrightarrow (x-4)^2=0 \to$ solo hay un punto de corte: (4, –4).

La recta tangente a $g(x)=-\dfrac{x^2}{4}$ en ese punto (4, –4) es $y-g(4)=g'(1)(x-4)$.

Como $g'(x)=-\dfrac{2x}{4} \to g'(4)=-2 \Rightarrow$ La tangente es

$$y+4=-2(x-4) \Rightarrow y=-2x+4.$$

Efectivamente, la recta $y=-2x+4$ es tangente común a ambas gráficas. El punto de tangencia con $g(x)$ es (4, –4).



(b) Las tres gráficas se pueden trazar dando valores.
Para *f*: (–2, –1); (0, 3); (1, 2); (2, –1) …
Para *g*: (–2, –1); (0, 0); (2, –1) …
Para la recta: (0, 4); (2, 0) …
Los puntos de corte son los marcados en la figura adjunta:
son las soluciones de $-\dfrac{x^2}{4}=3-x^2 \Rightarrow x^2=4$.

(c) El recinto es el sombreado. Su área es:

$$\int_1^2\left(4-2x-\left(3-x^2\right)\right)dx+\int_2^4\left(4-2x-\left(-\frac{x^2}{4}\right)\right)dx =$$

$$=\int_1^2\left(1-2x+x^2\right)dx+\int_2^4\left(4-2x+\frac{x^2}{4}\right)dx = \left(x-x^2+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2+\left(4x-x^2+\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_2^4 =$$

$$=\left(2-4+\frac{8}{3}\right)-\left(1-1+\frac{1}{3}\right)+\left(16-16+\frac{64}{12}\right)-\left(8-4+\frac{8}{12}\right) = 1\ \text{u}^2.$$

2. Andalucía, septiembre 18
Ejercicio 2A. (2,5 puntos)
Considera la función *f* definida por $f(x) = ax\ln(x) - bx$ para $x > 0$ (ln denota la función logaritmo neperiano). Determina *a* y *b* sabiendo que *f* tiene un extremo relativo en $x = 1$ y que $\int_1^2 f(x)dx = 8\ln(2) - 9$.

Solución:
Como tiene un extremo relativo en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0$.

$$f(x) = ax\ln(x) - bx \Rightarrow f'(x) = a\ln(x) + a - b \to f'(1) = a - b = 0 \Rightarrow a = b.$$

Por tanto: $f(x) = ax\ln(x) - ax$.

La integral

$$\int (ax\ln(x) - ax)\,dx = \int (ax\ln(x))\,dx - \frac{ax^2}{2}.$$

La primera integrar, $\int (ax\ln(x))\,dx$, se hace por partes.

Tomando:

$$u = \ln x \text{ y } dv = axdx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \text{ y } v = \frac{ax^2}{2}.$$

Luego,

$$\int (ax\ln(x))\,dx = \frac{ax^2}{2}\cdot\ln x - \int \frac{ax^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{ax^2}{2}\cdot\ln x - \int \frac{ax}{2}dx = \frac{ax^2}{2}\cdot\ln x - \frac{ax^2}{4}.$$

Por tanto:

$$\int_1^2 (ax\ln(x) - ax)\,dx = \left[\frac{ax^2}{2}\cdot\ln x - \frac{ax^2}{4} - \frac{ax^2}{2}\right]_1^2 = \left[\frac{ax^2}{2}\cdot\ln x - \frac{3ax^2}{4}\right]_1^2 =$$

$$= 2a\cdot\ln 2 - 3a - \left(0 - \frac{3a}{4}\right) = 2a\ln 2 - \frac{9a}{4}.$$

Como debe cumplirse que

$$2a\ln 2 - \frac{9a}{4} = 8\ln 2 - 9 \Rightarrow a = 4;\ b = 4.$$

3. Aragón, junio 2018

A3. (4 puntos)

a) Considere la función: $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

a.1.) (1 punto) Determine el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.
a.2.) (1 punto) Determine los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.
a.3.) (1 punto) Determine la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = 2$.

b) (1 punto) Calcule: $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+3}{x-1}dx$.

Solución:

a.1) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\to$ como $\sqrt{x^2+1}>0$ para cualquier número real x, entonces Dom(f) = **R**.

Por tanto, la función no tiene asíntotas verticales.
Sí tiene asíntotas horizontales, pues:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}=1;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x+1}{(-x)}}{\sqrt{\frac{x^2+1}{(-x)^2}}}=-1.$$

Sus asíntotas horizontales son: $y = -1$, hacia $-\infty$; $y = 1$, hacia $+\infty$.

a.2.) Derivando:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-(x+1)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{1-x}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}\ \to\ f'(x)=0 \text{ en } x=1.$$

En $x = 1$ la función tiene un máximo relativo.
En efecto:

- si $x < 1$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente;
- si $x > 1$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

a.3.) La recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = 2$ es $y-f(2)=f'(2)(x-2)$.

Se obtiene:

$$y-\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{-1}{5\sqrt{5}}(x-2).$$

b) $\displaystyle\int\frac{x^2-3x+3}{x-1}dx$ $\to$ dividiendo: $\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}=x-2+\dfrac{1}{x-1}$.

Por tanto:

$$\int\frac{x^2-3x+3}{x-1}dx=\int\left(x-2+\frac{1}{x-1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-2x+\ln(x-1)+c.$$

4. Aragón, junio 2018

B3. (4 puntos)

a) (2 puntos) Determine los valores de los parámetros a, b y c para que la función:

$$f(x)=a(x-1)^3+bx+c\,.$$

a.1.) Pase por el punto (1, 1).

a.2.) En el punto (1, 1) su tangente tenga de pendiente 2.

a.3.) En el punto x = 2 tenga un máximo relativo.

b) (2 puntos) Determine el valor del límite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}$.

Solución:

a) Por pasar por el punto (1, 1) → $f(1)=1 \Rightarrow 1=b+c$.

En el punto (1, 1) su tangente tiene de pendiente 2 → $f'(1)=2 \Rightarrow$

$f'(x)=3a(x-1)^2+b \Rightarrow 2=b$; c = –1.

Para que en el punto x = 2 tenga un máximo relativo → $f'(2)=0 \Rightarrow 0=3a+b \Rightarrow a=-\dfrac{2}{3}$.

La función buscada es $f(x)=-\dfrac{2}{3}(x-1)^3+2x-1$.

(Puede observarse que $f''(2)<0$. En efecto: $f''(x)=-4(x-1) \to f''(2)=-4$).

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}=\left[1^{\infty}\right]$.

Puede hacerse aplicando logaritmos y la regla de L´Hôpital.

$$\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-1}{x}\ln\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)\right)=[\infty\cdot 0]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)}{\dfrac{x}{3x^2-1}}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}-\dfrac{2x-2}{x^2-2x}}{\dfrac{3x^2-1-6x^2}{(3x^2-1)^2}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\dfrac{(2x-3)(x^2-2x)-(2x-2)(x^2-3x+2)}{(x^2-3x+2)(x^2-2x)}}{\dfrac{-3x^2-1}{(3x^2-1)^2}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(3x^2-1)^2(x^2-4x+4)}{(-3x^2-1)(x^2-3x+2)(x^2-2x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{9x^6+\ldots}{-3x^6+\ldots}\right)=-3\,.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}=e^{-3}$.

Observación: En este caso es bastante más rápido aplicar la transformación

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\left[1^\infty\right]=e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-1)\cdot g(x)\right)}$.

Con esto:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}=\left[1^\infty\right]=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}-1\right)\cdot\frac{3x^2-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^3+6x^2+x-2}{x^3-2x^2}\right)}=e^{-3}.$$

5. Aragón, septiembre 2018

3. (4 puntos)

a) (1,5 puntos) Calcule el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}$$

b) (1,5 puntos) De entre todos los triángulos rectángulos que tienen un área de 1 cm^2, determine el que tiene la hipotenusa de longitud mínima y proporcione las longitudes de los tres lados de ese triángulo.

c) (1 punto) Calcule el área limitada por la curva $f(x)=x^2+x$ y la recta $g(x)=x+4$.

Solución:

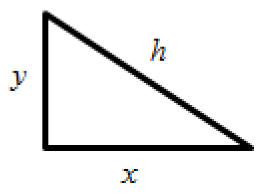
a) Operando:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+x}{x^2}-\frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x-2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}=\left[1^\infty\right]=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{x^2+2x-2}{x^2}-1\right)\cdot\frac{3+x^2}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-2x^2+6x-6}{x^3}\right)}=e^2.$$

Se ha aplicado la transformación: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\left[1^\infty\right]=e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-1)\cdot g(x)\right)}$.

b) Sea el triángulo rectángulo de catetos *x* e *y*.



Su área es: $S=\dfrac{xy}{2}=1\Rightarrow y=\dfrac{2}{x}$.

Su hipotenusa, $h=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\left(\dfrac{2}{x}\right)^2}\Rightarrow h(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{4}{x^2}}$.

El mínimo de *h* se obtiene en alguna solución de *h´*= 0.

Derivando:

$$h(x)=\sqrt{\frac{x^4+4}{x^2}}\Rightarrow h'(x)=\frac{2x-\frac{8}{x^3}}{2\sqrt{\frac{x^4+4}{x^2}}}=0\Rightarrow 2x-\frac{8}{x^3}=0\Rightarrow x^4=4\Rightarrow x=\sqrt{2}.$$

(La solución negativa, $x=-\sqrt{2}$ carece de sentido en este caso).

Como:

- para $0 < x < \sqrt{2}$, $h'(x)$ < 0, se tiene que la función *h* decrece;
- para $x > \sqrt{2}$, $h'(x)$ > 0, la función *h* crece;

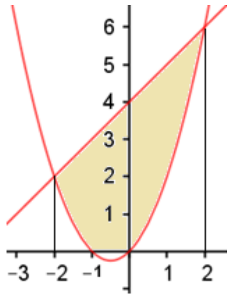
En consecuencia, en $x = \sqrt{2}$ la hipotenusa es mínima.
Las medidas de los tres lados del triángulo son:

$x = \sqrt{2}$; $y = \sqrt{2}$; $h = 2$ cm.

c) La región es la sombreada en la figura adjunta.
Los puntos de corte de la parábola y la recta son las soluciones de la ecuación:

$$x^2 + x = x + 4 \Rightarrow x = \pm 2.$$

El área es:

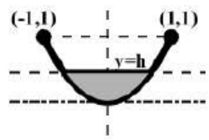


$$S = \int_{-2}^{2} \left(x + 4 - \left(x^2 + x\right)\right) dx \Rightarrow$$

$$S = \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 8 - \frac{8}{3} - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ u}^2.$$

6. Asturias, julio 18

2. Se tiene una abrevadero de longitud $6\,m$ y de altura $1\,m$. Su sección es la descrita en la figura formada por la función $y = x^2$. Por h indicamos la altura del nivel del líquido.

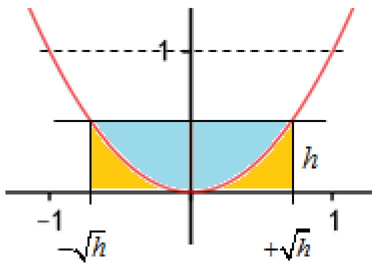


a) Comprueba que el área de la región S, sombreada en la figura, en función de h se puede expresar como $S(h) = \frac{4h\sqrt{h}}{3}$. (1.5 puntos)

b) Determina la altura h donde se alcanza la mitad del volumen total del abrevadero. (Nota: Volumen=S×longitud). (1 punto)

Solución:

a) La función $y = x^2$ alcanza una altura *h* en las abscisas que son solución de la ecuación $h = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{h}$.
El área de la región sombreada es la del rectángulo de base $2\sqrt{h}$ y altura *h* menos el área de la región plana situada entre la parábola y el eje *OX* en el intervalo $\left[-\sqrt{h}, +\sqrt{h}\right]$.



Por tanto, *S* viene dada por:

$$S = 2\sqrt{h}\cdot h - \int_{-\sqrt{h}}^{+\sqrt{h}} x^2 dx =$$

$$= 2h\sqrt{h} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{h}}^{+\sqrt{h}} = 2h\sqrt{h} - \left(\frac{h\sqrt{h}}{3} - \left(-\frac{h\sqrt{h}}{3}\right)\right) = \frac{4h\sqrt{h}}{3} \to S(h) = \frac{4h\sqrt{h}}{3}.$$

b) El volumen del abrevadero (de altura *h* = 1 m y longitud = 6 m) es:

$$V = S(1)\cdot 6 = \frac{4}{3}\cdot 6 = 8 \text{ m}^3 \to \text{la mitad será } 4 \text{ m}^3.$$

Hay que resolver la ecuación:

$$4 = S(h)\cdot 6 = \frac{4h\sqrt{h}}{3}\cdot 6 \Rightarrow \frac{6h\sqrt{h}}{3} = 1 \Rightarrow h\sqrt{h} = \frac{1}{2} \Rightarrow h^3 = \frac{1}{4} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$

7. Baleares, junio 18

2. Hallar los valores de a, b y c para que la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+5, & \text{si } x<2 \\ cx+1, & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

verifique las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 4]. Determina en qué punto se verifica lo que asegura el teorema.

Solución:

Teorema de Rolle: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), y además $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c)=0$.

Por tratarse de una función definida a partir de polinomios es continua y derivable en todo **R**. Luego es continua en el intervalo [0, 4] y derivable en (0, 4), salvo en el punto $x = 2$, en el que hay que exigirlo.

Por tanto, para que se cumpla el teorema de Rolle hay que exigir que la función sea continua y derivable en el punto $x = 2$, y que $f(0)=f(4)$.

→ Continuidad:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(ax^2+bx+5\right)=4a+2b+5;\quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(cx+1\right)=2c+1.$$

Límites laterales iguales: $4a+2b+5=2c+1 \Rightarrow 2a+b-c=-2$.

→ Derivabilidad:

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & \text{si } x<2 \\ c & \text{si } x>2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f'(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(2ax+b\right)=4a+b;\quad \lim_{x\to 2^+} f'(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(c\right)=c.$$

Las derivadas laterales en $x = 2$ deben ser iguales: $4a+b=c \Rightarrow 4a+b-c=0$.

→ $f(0)=f(4) \Rightarrow 5=4c+1 \Rightarrow c=1$.

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores:

$$\begin{cases} 2a+b=-1 \\ 4a+b=1 \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ b = -3.$$

En consecuencia:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+5, & \text{si } x<2 \\ x+1, & \text{si } x\geq 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x-3, & \text{si } x<2 \\ 1 & \text{si } x\geq 2 \end{cases} \to f'(x)=0 \text{ en } x=\frac{3}{2}.$$

8. Baleares, septiembre 18

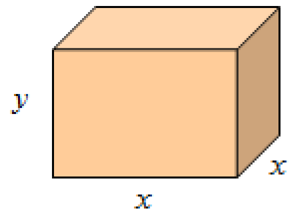
2. Calculau les dimensions d'una capsa amb les dues tapes de base quadrangular de volum 64 metres cúbics de superfície mínima. Comprovau que la solució obtinguda és un mínim.

(10 punts)

Solución:

Sea una caja cuadrangular de lado de la base *x* y de altura *y*.

Su volumen es: $V = x^2 y = 64 \Rightarrow y = \dfrac{64}{x^2}$.



Su superficie es: $S = 2x^2 + 4xy$.

Sustituyendo:

$$S(x) = 2x^2 + 4x\cdot\frac{64}{x^2} \Rightarrow S(x) = 2x^2 + \frac{256}{x}.$$

El mínimo de *S* se obtiene en la solución de *S´*= 0 que haga positiva a *S´´*.

Derivando:

$$S(x) = 2x^2 + \frac{256}{x} \Rightarrow S´(x) = 4x - \frac{256}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 256 = 0 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = 4.$$

Como $S´´(x) = 4 + \dfrac{512}{x^3} \Rightarrow S´´(4) > 0$. Luego, para *x* = 4 se obtiene el mínimo buscado.

El valor de y también será 4. La caja es cúbica de arista 4 m.

9. Cantabria, junio 18 (EXAMEN Nº 1)

Ejercicio 2

Sea $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 7x + 10}$.

1) [2,5 PUNTOS] Calcule todas las primitivas de $f(x)$.

2) [1 PUNTO] Calcule el área encerrada por la gráfica $f(x)$ y las rectas *y* = 0, *x* = 3 y *x* = 4.

Solución:

1) Descomponiendo en fracciones simples se tiene:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2 - 7x + 10} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5) + B(x-2)}{x^2 - 7x + 10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 = A(x-5) + B(x-2) \Rightarrow \begin{cases} 1 = A + B \\ -1 = -5A - 2B \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{3};\ B = \frac{4}{3}.$$

Por tanto:

$$\int \frac{x-1}{x^2 - 7x + 10}\,dx = \int \left(\frac{-1/3}{x-2} + \frac{4/3}{x-5} \right) dx = -\frac{1}{3}\ln(x-2) + \frac{4}{3}\ln(x-5) + c.$$

2) En el intervalo [3, 4] la función toma valores negativos. Por tanto, el área pedida, *S*, viene dada por la integral definida

$$S = -\int_3^4 \frac{x-1}{x^2 - 7x + 10}\,dx = \left[\frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{4}{3}\ln|x-5| \right]_3^4 =$$

$$= \left[\frac{1}{3}\ln 2 - \frac{4}{3}\ln 1 \right] - \left[\frac{1}{3}\ln 1 - \frac{4}{3}\ln 2 \right] = \frac{5}{3}\ln 2 \text{ u}^2.$$

10. Cantabria, junio 18 (EXAMEN Nº 2)

Ejercicio 2

Se quiere construir un cilindro de volumen $250\cdot\pi$ metros cúbicos y área mínima.

1) [0,5 PUNTOS] Exprese la altura *h* del cilindro en función del radio *r* de la base.

2) [0,5 PUNTOS] Calcule la función $a(x)$ que expresa el área del cilindro en función del radio de la base.

3) [2,5 PUNTOS] Calcule el valor del radio y la altura que hacen el área mínima.

Datos: Volumen del cilindro: $V=\pi\cdot r^2\cdot h$; *área del cilindro:* $A=2\pi\cdot r^2+2\pi\cdot r\cdot h$.

Solución:

1) Tal como se indica en los *datos*: $V=\pi\cdot r^2\cdot h$; $A=2\pi\cdot r^2+2\pi\cdot r\cdot h$.

Como $V=\pi\cdot r^2\cdot h=250\pi \Rightarrow h=\dfrac{250}{r^2}$.

2) Sustituyendo: $A=2\pi\cdot r^2+2\pi\cdot r\cdot\dfrac{250}{r^2} \Rightarrow a(r)=2\pi r^2+\dfrac{500\pi}{r}$.

3) El mínimo de $a(r)$ se obtiene en la solución de $a'(r)=0$ que hace positiva a $a''(r)$.

Derivando:

$$a'(r)=4\pi r-\frac{500\pi}{r^2}=0\Rightarrow 4r^3=500\Rightarrow r=5.$$

Como $a''(r)=4\pi+\dfrac{1000\pi}{r^3}$ es positiva para *r* = 5 m, para ese valor se obtiene el mínimo buscado. La altura será, *h* = 10 m.

11. Cantabria, septiembre 18 (EXAMEN Nº 1)

1) [2,5 PUNTOS] Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(2x^2\right)+x}{\ln\left(x+1\right)+x}$. (ln denota el logaritmo neperiano).

2) [1 PUNTO] ¿Para qué valor de *d* tiene la función $\dfrac{x^d+1}{x-2}$ una asíntota oblicua en $+\infty$? Calcule dicha asíntota.

Solución:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(2x^2\right)+x}{\ln\left(x+1\right)+x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\left(L'H\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(2x^2\right)\cdot 4x+1}{\dfrac{1}{x+1}+1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$.

2) Una función racional tiene una asíntota oblicua si el grado del numerador es mayor que el del denominador en una unidad. Por tanto, $f(x)=\dfrac{x^d+1}{x-2}$ tendrá una asíntota oblicua si *d* = 2.

Su ecuación será $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x\left(x-2\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-2x}=1.$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+2x}{x-2}\right)=2.$$

La asíntota oblicua es la recta $y=x+2$.

<u>**12**. Cantabria, septiembre 18 (EXAMEN Nº 2)</u>

Ejercicio 2

Sea

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } x\le -2 \\ x^2+ax & \text{si } -2<x<0 \\ 2\sin(x)+b & \text{si } 0\le x \end{cases}.$$

1) [1 PUNTO] Determine a y b para que la función f sea continua en todo **R**.
2) [1,5 PUNTOS] Si $a = 3$, $b = 0$ clasifique la discontinuidad en $x = –2$.
3) [1 PUNTO] Si $a = 2$, $b = 0$, calcule el área encerrada por la gráfica de f entre las rectas $y = 0$, $x = –5$ y $x = –3$.

<u>Solución</u>:

1) Por separado, para cada intervalo de definición, las funciones dadas son continuas. Los puntos conflictivos son $x = –2$ y $x = 0$, en donde las funciones difieren a izquierda y derecha. En ambos casos debe cumplirse que el límite coincida con su valor de definición.

- En $x = -2$:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}(x+2)=0; \qquad \lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\left(x^2+ax\right)=4-2a.$$

Debe cumplirse que $0=4-2a \Rightarrow a=2$.

- En $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x^2+2x\right)=0; \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2\sin(x)+b\right)=b.$$

Por tanto, $b = 0$.

La función continua es: $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } x\le -2 \\ x^2+2x & \text{si } -2<x<0 \\ 2\sin(x) & \text{si } 0\le x \end{cases}.$

Su gráfica, que no se pide, se da más abajo.

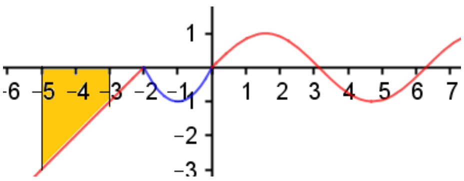
2) Si $a = 3$, $b = 0$, la función será $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } x\le -2 \\ x^2+3x & \text{si } -2<x<0 \\ 2\sin(x) & \text{si } 0\le x \end{cases}.$

Esta función no es continua en $x = –2$. En ese punto la función tiene un salto finito, pues los límites laterales existen, pero son distintos:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}(x+2)=0; \qquad \lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\left(x^2+3x\right)=4-6=-2.$$

3) En el intervalo [–5, –3] la función es $f(x)=x+2$.

El área pedida, la sombreada en el dibujo, viene dada por la integral:



$$S=\left|\int_{-5}^{-3}(x+2)\,dx\right| \Rightarrow$$

$$S=\left|\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-5}^{-3}\right|=\left|\frac{9}{2}-6-\left(\frac{25}{2}-10\right)\right|=4 \text{ u}^2.$$

13. Castilla y León, junio 18

E3. Dada la función $f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos y el número total de puntos en los que $f(x)$ se anula. (2 puntos)

Solución:

Derivando:

$$f(x) = 3x^4 + x^3 - 1 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 + 3x^2 = 3x^2(4x+1) \to f''(x) = 24x^2 + 6x.$$

La derivada primera se anula en las abscisas $x = 0$ y $x = -\dfrac{1}{4}$.

Luego:

- Si $x < -\dfrac{1}{4}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $-\dfrac{1}{4} < x < 0$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece. En $x = -\dfrac{1}{4}$ se tiene un mínimo.
- Si $x > 0$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece. Por tanto, en $x = 0$ hay un punto de inflexión.

→ Esto último también puede deducirse observando que $f''(0) = 0$ y que $f'''(0) \neq 0$.

La función corta dos veces al eje *OX*. Puede verse aplicando el teorema de Bolzano.

→ En el intervalo [–1, –1/4] se cumple que: $f(-1) = 1 > 0$ y $f(-1/4) = -\dfrac{257}{256} < 0$. Como la función toma signos distintos en los extremos del intervalo, se deduce que corta al menos una vez al eje *OX*. Solo corta una vez por ser decreciente en ese intervalo. (A la izquierda de –1 la función toma siempre valores positivos).

→ En el intervalo [–1/4, 1] se cumple que: $f(-1/4) = -\dfrac{257}{256} < 0$ y $f(1) = 3 > 0$. Por lo mismo, como la función toma signos distintos en los extremos del intervalo, se deduce que corta al menos una vez al eje *OX*. Solo corta una vez por ser creciente en ese intervalo. (A la derecha de $x = 1$ la función toma siempre valores positivos).

14. Castilla y León, junio 18

E4. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x\cos x$ y el eje de las x, cuando x pertenece al intervalo [0, π/2]. (2 puntos)

Solución:

Como la función $f(x) = x\cos x$ no toma valores negativos en el al intervalo [0, π/2], el área pedida viene dada por la integral definida:

$$\int_0^{\pi/2} (x\cos x)\,dx.$$

Una primitiva de $f(x) = x\cos x$ se obtiene por partes.

Haciendo:

$x = u \Rightarrow dx = du$; $\quad dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$

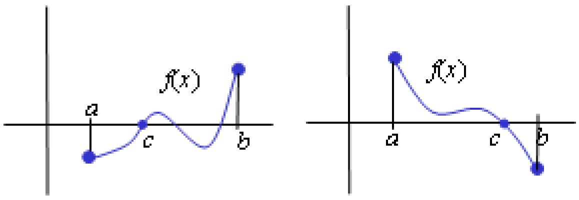
Luego,

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x$$

Por tanto:

$$\int_0^{\pi/2} (x\cos x)\,dx = (x\sin x + \cos x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - (0\sin 0 + \cos 0) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

<u>**15**. Castilla–La Mancha, junio 18</u>
1A. a) Enuncia el teorema de Bolzano y justifica razonadamente que la gráfica de la función $f(x)=x^{15}+x+1$ corta al eje *OX* al menos una vez en el intervalo [–1, 1]. (1,5 puntos)
b) Calcula razonadamente el número exacto de puntos de corte con el eje *OX* cuando *x* recorre toda la recta real. (1 punto)
<u>Solución</u>:
a) El teorema de Bolzano dice lo siguiente:
Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado [*a*, *b*] y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a)<0<f(b)$ o $f(a)>0>f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c)=0$.
Esto es, si la función es negativa en *a* ($f(a)<0$) y positiva en *b* ($f(b)>0$), entonces se anula en algún punto *c* entre *a* y *b* ($f(c)=0$).
Geométricamente, esto significa que si $f(a)<0$ y $f(b)>0$, entonces la gráfica de $f(x)$ corta al eje *OX* en un punto, al menos. (Análogamente si $f(a)>0$ y $f(b)<0$.)



Desde el punto de vista algebraico, este teorema asegura que si $f(a)<0$ y $f(b)>0$, entonces la ecuación $f(x)=0$ tiene al menos una solución.
Como la función $f(x)=x^{15}+x+1$ es continua (todas las funciones polinómicas lo son) y cumple que $f(-1)=(-1)^{15}-1+1=-1<0$ y que $f(1)=1+1+1=3>0$, entonces la función corta al eje *OX* al menos una vez en el intervalo [–1, 1].

b) La función $f(x)=x^{15}+x+1$ es estrictamente creciente para todo $x \in \mathbf{R}$, pues su derivada, $f'(x)=15x^{14}+1$, es siempre positiva. Por tanto, la función solo puede cortar una vez al eje *OX*.

<u>**16**. Castilla–La Mancha, junio 18</u>
2A. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x^2-1\right)\cos x\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}dx$ (1,25 puntos por integral)

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $e^x=t$.
<u>Solución</u>:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x^2-1\right)\cos x\, dx = \int_0^{\pi}\left(x^2\cos x\right)dx-\int_0^{\pi}\cos x\, dx$.

Una primitiva de $f(x)=x^2\cos x$ se obtiene por partes.
Haciendo:
$$u=x^2 \to 2xdx = du;\ dv=\cos xdx \to v=\int \cos xdx=\sin x.$$
Luego,
$$\int x^2\cos xdx = x^2\sin x-2\int x\sin xdx.$$
Para hacer la segunda integral, $\int x\sin xdx$, se aplica nuevamente el método de partes.
$$\int x\sin xdx:$$

Se toma: $u = x \to du = dx$; $dv = \sin x dx \to v = \int \sin x dx = -\cos x$,

luego,

$$\int x \sin x dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x.$$

Por tanto:

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx =$$

$$= x^2 \sin x - 2\left(-x\cos x + \sin x\right) = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x.$$

En consecuencia,

$$\int_0^{\pi} \left(x^2 - 1\right)\cos x\, dx = \int_0^{\pi} \left(x^2 \cos x\right) dx - \int_0^{\pi} \cos x\, dx =$$

$$= \left[x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x\right]_0^{\pi} + \left[\sin x\right]_0^{\pi} =$$

$$= \left[x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x\right]_0^{\pi} + \left[\sin x\right]_0^{\pi} = 2\pi\cdot(-1) = -2\pi.$$

b) Haciendo el cambio de variable $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$; $e^{2x} = t^2$.

Luego:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x - 2} dx = \int \frac{1}{t^2 + t - 2} dt.$$

La segunda integral puede hacerse por descomposición en facciones simples.

Como las raíces del denominador son $t = 1$ y $t = -2$: $t^2 + t - 2 = (t-1)(t+2)$, puede escribirse la igualdad:

$$\frac{1}{t^2 + t - 2} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+2} = \frac{A(t+2) + B(t-1)}{(t-1)(t+2)} \Rightarrow 1 = A(t+2) + B(t-1)$$

$\to$ si $x = 1$: $1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$;

$\to$ si $x = -2$: $1 = -3B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$.

Con esto:

$$\int \frac{1}{t^2 + t - 2} dt = \int \frac{1/3}{t-1} dt + \int \frac{-1/3}{t+2} dt = \frac{1}{3}\ln\left(t-1\right) - \frac{1}{3}\ln\left(t+2\right) + c.$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + e^x - 2} dx = \frac{1}{3}\ln\left(e^x - 1\right) - \frac{1}{3}\ln\left(e^x + 2\right) + c.$$

17. Castilla–La Mancha, junio 18

1B. a) Prueba que cualquiera que sea la constante a la función $f(x)=x^3-5x^2+7x+a$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [1, 3]. (0,75 puntos)

b) Calcula razonadamente un punto del intervalo abierto (1, 3) cuya existencia asegura el teorema de Rolle. (0,75 puntos)

c) Calcula razonadamente los puntos de la gráfica $f(x)=x^3-5x^2+7x$ donde la recta tangente tenga la misma pendiente que la recta $y=4x+2$. (1 punto)

Solución:

a) El teorema de Rolle dice:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en el intervalo (a, b), y además $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c)=0$.

La función $f(x)=x^3-5x^2+7x+a$ es continua y derivable en todo **R**; en particular en el intervalo [1, 3].

Como, además, $f(1)=f(3)$, pues $f(1)=1-5+7+a=3+a$ y $f(3)=27-45+21+a=3+a$, se deduce que la función verifica las hipótesis de Rolle; luego existe un punto $c \in (1, 3)$ tal que $f'(c)=0$.

b) Derivando e igualando a 0:

$$f'(x)=3x^2-10x+7=0 \Rightarrow x=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot3\cdot7}}{2\cdot3}=\frac{10\pm4}{6}=\begin{cases}7/3\\ 1\end{cases}.$$

El punto pedido es $x=\frac{7}{3}$, que es la solución que cae dentro del intervalo (1, 3).

c) Los puntos de la gráfica $f(x)=x^3-5x^2+7x$ donde la recta tangente tenga la misma pendiente que la recta $y=4x+2$ son los que verifiquen que $f'(x)=4$.

Derivando e igualando a 4:

$$f'(x)=3x^2-10x+7=4 \Rightarrow 3x^2-10x+3=0 \Rightarrow x=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{6}=\frac{10\pm8}{6}=\begin{cases}3\\ 1/3\end{cases}.$$

Los puntos de la gráfica son:

$$(3, f(3))=(3,\ 3);\ \ (1/3, f(1/3))=\left(\frac{1}{3},\ \frac{49}{27}\right).$$

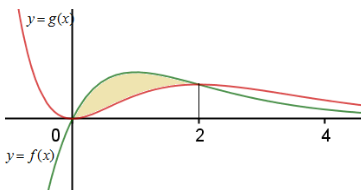
18. Castilla–La Mancha, junio 18

2B. Dadas las funciones $f(x)=2xe^{-x}$ y $g(x)=x^2e^{-x}$, calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de esas funciones. (2,5 puntos)

Solución:

Las gráficas se cortan en los puntos solución de la ecuación $f(x)=g(x)$:

$$2xe^{-x}=x^2e^{-x} \Rightarrow \left(x^2-2x\right)e^{-x}=0 \Rightarrow x=0; x=2.$$



El recinto es el sombreado en la figura adjunta, aunque no se pide dibujarlo.

El área pedida viene dada por la integral definida

$$\left|\int_0^2\left(2xe^{-x}-x^2e^{-x}\right)dx\right|.$$

La integral $\int \left(2xe^{-x} - x^2e^{-x}\right)dx = \int \left(2x - x^2\right)e^{-x}dx$ debe hacerse por partes.

Tomando: $u = 2x - x^2 \Rightarrow du = (2-2x)dx$; $dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$.

Luego:

$$\int \left(2x - x^2\right)e^{-x}dx = -\left(2x - x^2\right)e^{-x} + \int (2-2x)e^{-x}dx \qquad (1)$$

La segunda integral que se obtiene también se hace por partes.
Tomando: $u' = 2 - 2x \Rightarrow du' = -2dx$; $dv' = e^{-x}dx \Rightarrow v' = -e^{-x}$.
Se tiene:

$$\int (2-2x)e^{-x}dx = -(2-2x)e^{-x} - \int 2e^{-x}dx = -(2-2x)e^{-x} + 2e^{-x}.$$

Sustituyendo en (1) queda:

$$\int \left(2x - x^2\right)e^{-x}dx = -\left(2x - x^2\right)e^{-x} + \int (2-2x)e^{-x}dx =$$

$$= -\left(2x - x^2\right)e^{-x} - (2-2x)e^{-x} + 2e^{-x} + c = x^2e^{-x}.$$

El área pedida será:

$$\left|\int_0^2 \left(2xe^{-x} - x^2e^{-x}\right)dx\right| = \left[x^2e^{-x}\right]_0^2 = 4e^{-2} \text{ u}^2.$$

<u>**19**. Cataluña, junio 18</u>

5. Sea la función $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$.

a) Compruebe que la función $f(x)$ cumple el enunciado del teorema de Bolzano en el intervalo [0, 2] y que, por lo tanto, la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo (0, 2). Compruebe que $x = 1$ es una solución de la ecuación $f(x) = 0$ y razone, teniendo en cuenta el signo de $f'(x)$, que la solución es única. [1 punto]

b) A partir del resultado final del apartado anterior, encuentre el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$. [1 punto]

<u>Solución</u>:

a) En el <u>problema 15</u> se ha enunciado el teorema de Bolzano.
La función es continua para todo $x \geq 0$; en particular en el intervalo [0, 2].
Como $f(0) = -2 < 0$ y $f(2) = \sqrt{2} + 2 - 2 > 0 \Rightarrow$ la función corta al eje OX en algún punto del intervalo (0, 2). Esto es, la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo (0, 2).
Efectivamente la solución es $x = 1$, pues $f(1) = \sqrt{1} + 1 - 2 = 0$.
Como $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 1$ siempre es positiva, la función es creciente $\Rightarrow$ solo corta una vez al eje OX, lo que significa que la solución $x = 1$ es única.

b) Como $f(x) \leq 0$ en el intervalo [0, 1], el área pedida viene dada por la integral:

$$S = -\int_0^1 \left(\sqrt{x} + x - 2\right)dx = -\int_0^1 \left(x^{1/2} + x - 2\right)dx = -\left[\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_0^1 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{6} \text{ u}^2$$

20. Cataluña, septiembre 18

1. Considere la función polinómica $f(x)=x^3-ax^2+bx+c$.

a) Calcule los valores de los parámetros *a*, *b* y *c*, sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa *x* = 1 y que la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa *x* = 0 es la recta *y* = *x* + 3. [1 punto]

b) Para los valores *a* = 2, *b* = 1 y *c* = 3, calcule las abscisas de los extremos relativos de la función y clasifíquelos. [1 punto]

Solución:

a) $f(x)=x^3-ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=3x^2-2ax+b$.

Para que en el punto *x* = 1 tenga un extremo relativo → $f'(1)=0 \Rightarrow 3-2a+b=0$.

Si la recta tangente a la gráfica de la función en *x* = 0 es $y=x+3 \Rightarrow f'(0)=1 \Rightarrow b=1$.

Sustituyendo en $3-2a+b=0 \Rightarrow a=2$.

Como la recta tangente y la gráfica de la función en *x* = 0 deben coincidir ⇒ $f(0)=y(0)=3$.

Como $f(0)=c \Rightarrow c=3$.

Luego, $f(x)=x^3-2x^2+x+3$.

b) Para los valores *a* = 2, *b* = 1 y *c* = 3, la función es la encontrada: $f(x)=x^3-2x^2+x+3$.

Derivando e igualando a 0:

$$f'(x)=3x^2-4x+1 \to 3x^2-4x+1=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{6}=\begin{cases}1/3\\ 1\end{cases}.$$

La derivada segunda es $f''(x)=6x-4$.

Como $f''(1/3)=-2<0$, en $x=\frac{1}{3}$ la función tiene un máximo relativo.

Como $f''(1)=2>0$, en *x* = 1 la función tiene un mínimo relativo.

21. Comunidad Valenciana, junio 18

Problema B.3.

Se divide un alambre de longitud 100 cm en dos partes. Con una de ellas, de longitud *x* se construye un triángulo equilátero y con la otra, de longitud 100 – *x*, se construye un cuadrado. Se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

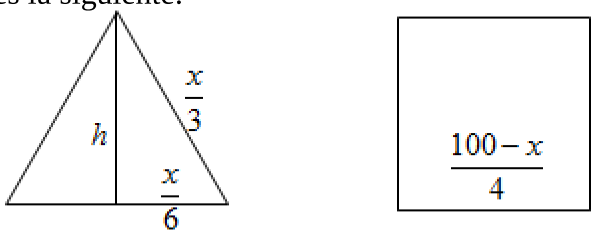
a) La función de la variable *x* que expresa la suma de las áreas del triángulo equilátero y del cuadrado, siendo $0 \le x \le 100$ (4 puntos).

b) El valor de la variable *x* en el intervalo [0, 100] para el cual dicha función (suma de las áreas en función de *x* obtenida en el apartado a)) alcanza su mínimo valor (3 puntos).

c) El valor de la variable *x* en el intervalo [0, 100] para el cual dicha función alcanza su máximo valor. Interpretar el resultado obtenido (3 puntos).

Solución:

a) La situación gráfica es la siguiente:



Si el perímetro del triángulo es *x*, cada lado mide $\frac{x}{3}$. Su altura será $h=\frac{\sqrt{3}}{6}x$.

Por tanto, su área valdrá: $A_T = \dfrac{\dfrac{x}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}x}{6}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}x^2}{36}$.

Si el perímetro del cuadrado es 100 – x, cada lado mide $\dfrac{100-x}{4}$. Por tanto, su área valdrá:

$$A_C = \left(\frac{100-x}{4}\right)^2.$$

La función que expresa la suma de las áreas será:

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}x^2}{36} + \left(\frac{100-x}{4}\right)^2 \Rightarrow A(x) = \frac{4\sqrt{3}x^2 + 90000 - 1800x + 9x^2}{144}.$$

b) El mínimo de $A(x)$ se da en la solución de $A'(x) = 0$ que hace positiva a $A''(x)$.
Derivando:

$$A'(x) = \frac{8\sqrt{3}x - 1800 + 18x}{144} = 0 \Rightarrow 8\sqrt{3}x - 1800 + 18x = 0 \Rightarrow x = \frac{1800}{18+8\sqrt{3}} \text{ cm.}$$

Como $A''(x) = \dfrac{8\sqrt{3}+18}{144} > 0$, para el valor de x encontrado se da el mínimo pedido.

c) La función $A(x) = \dfrac{4\sqrt{3}x^2 + 90000 - 1800x + 9x^2}{144} = \dfrac{\left(9+4\sqrt{3}\right)x^2 - 1800x + 90000}{144}$ es una parábola convexa (∪). Por tanto, el máximo en el intervalo [0, 100] se da en alguno de los extremos.

Como $A(0) = \dfrac{90000}{144} = 625$ y $A(100) = \dfrac{\left(9+4\sqrt{3}\right)\cdot 10000 - 180000 + 90000}{144} = \dfrac{40000\sqrt{3}}{144} \approx 481$, el máximo se obtiene para x = 0; esto es, formando solo un cuadrado de lado 25 cm.

22. Comunidad Valenciana, julio 18

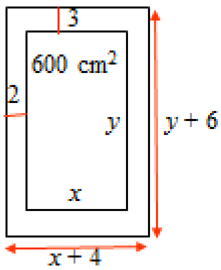
Problema B.3. Dentro de una cartulina rectangular se desea hacer un dibujo que ocupe un rectángulo R de 600 cm^2 de área de manera que:
Por encima y por debajo de R deben quedar unos márgenes de 3 cm de altura cada uno. Los márgenes a izquierda y a derecha de R deben tener una anchura de 2 cm cada uno.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El área de la cartulina en función de la base x del rectángulo R (3 puntos).
b) El valor de x para el cual el área de la cartulina es mínima (5 puntos).
c) Las dimensiones de dicha cartulina de área mínima (2 puntos).

Solución:

La situación se muestra en la figura adjunta.



a) El área de la cartulina en función de la base x del rectángulo R será:

$$S = (x+4)(y+6) = xy + 6x + 4y + 24.$$

Como se sabe que $xy = 600 \Rightarrow y = \dfrac{600}{x}$, sustituyendo:

$$S(x) = 600 + 6x + \frac{2400}{x} + 24 \Rightarrow S(x) = 624 + 6x + \frac{2400}{x}.$$

b) El área mínima se da en la solución de $S´= 0$ que hace positiva a $S´´$.

$$S´(x)=6-\frac{2400}{x^2}=0\Rightarrow 6x^2-2400=0\Rightarrow x=20.$$

Como $S´´(x)=\frac{4800}{x^3}$, para $x = 20$ se da el mínimo pedido.

c) Las dimensiones de la cartulina serán 24 × 36 cm ($x + 4 = 24$ e $y + 6 = 36$).

<u>**23**. Extremadura, junio 18</u>

B.3. a) Estudie el dominio, las asíntotas y máximos y mínimos de la función $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$. (1,5 puntos)

b) Represente la gráfica de $f(x)$ utilizando los datos del apartado anterior. (0,5 puntos)

c) Calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$. (1,5 puntos)

<u>Solución</u>:

a) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ está definida siempre que $x^2-1\neq 0$. Esto es, $Dom(f)=\mathbf{R}-\{-1,\ 1\}$.

En los puntos $x = –$ y $x = 1$ la función tiene sendas asíntotas verticales, pues:

$$\lim_{x\to -1}\frac{1}{x^2-1}=\pm\infty \text{ y } \lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}=\pm\infty.$$

Puede verse que:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x^2-1}=+\infty;\ \lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x^2-1}=-\infty,\ \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-1}=-\infty;\ \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2-1}=+\infty.$$

La función tiene también una asíntota horizontal, pues:

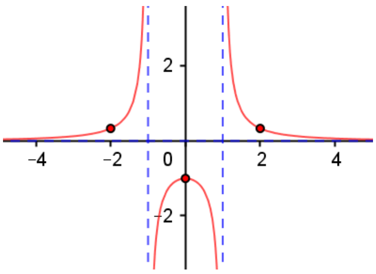
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2-1}=0 \ \to \text{ la asíntota es la recta } y = 0.$$

Derivando:

$$f´(x)=-\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

Para todo $x \in(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ la derivada toma signo positivo $\Rightarrow$ la función crece.
Para todo $x \in(0, 1) \cup (1, +\infty)$ la derivada toma signo negativo $\Rightarrow$ la función decrece.
Por tanto, en el punto $x = 0$ la función tiene un máximo relativo.

b) Teniendo en cuenta lo anterior y dando algunos valores se obtiene la gráfica adjunta.
(–2, 1/3); (2, 1/3); (0, –1)



c) Una primitiva de $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ se obtiene por descomposición en fracciones simples.

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\Rightarrow \frac{1}{x^2-1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}\Rightarrow \begin{cases}A+B=0\\ A-B=1\end{cases}\Rightarrow A=\frac{1}{2}; B=-\frac{1}{2}.$$

Por tanto:

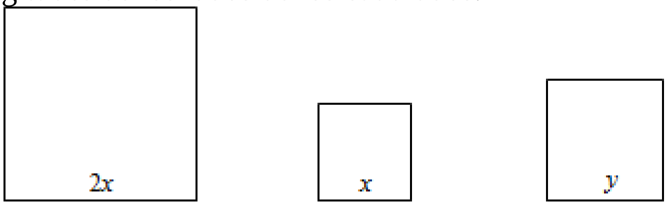
$$\int\frac{1}{x^2-1}dx=\int\left(\frac{1/2}{x-1}-\frac{1/2}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x+1)+c.$$

<u>**24**. Islas Canarias, junio 18</u>

1(A).- Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 m. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de forma que la longitud de uno de los trozos sea el doble de la longitud de otro y tal que, al construir con cada uno de los tres trozos de hilo un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encontrar la longitud de cada trozo. (2,5 puntos)

<u>Solución</u>:

Sean *x*, 2*x* e *y* las longitudes de los lados de los cuadrados.



La suma de sus perímetros debe ser 140 m:

$8x+4x+4y=140 \Rightarrow 12x+4y=140 \Rightarrow y=35-3x$.

Se desea que la suma de sus superficies sea mínima:

$S=4x^2+x^2+y^2 \to$ Sustituyendo $y=35-3x \Rightarrow S(x)=5x^2+(35-3x)^2$.

El mínimo se da en la solución de $S'=0$ que haga positiva a S''.

$S(x)=14x^2-210x+1225 \Rightarrow S'(x)=28x-210=0 \Rightarrow x=7,5$.

Como $S''(x)=28>0$, para ese valor de *x* se obtiene el mínimo buscado.

Po tanto, los trozos deben medir: 30 m, 60 m y 50 m.

<u>**25**. Islas Canarias, junio 18</u>

1(B).- Calcular las asíntotas y los extremos relativos de la función $f(x)=3x+\dfrac{3x}{x-1}$.

(2,5 puntos)

<u>Solución</u>:

La función tiene dos asíntotas; una vertical, la recta *x* = 1, y otra oblicua, la recta $y=3x+3$.

En efecto:

$$\lim_{x\to 1}\left(3x+\frac{3x}{x-1}\right)=\left[3+\frac{3}{0}\right]=\pm\infty.$$

Por otra parte, como $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x}{x-1}=3 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(3x+\dfrac{3x}{x-1}\right)\equiv 3x+3$.

Derivando:

$$f(x)=3x+\frac{3x}{x-1} \Rightarrow f'(x)=3+\frac{3(x-1)-3x}{(x-1)^2}=3+\frac{-3}{(x-1)^2}=\frac{3(x-1)^2-3}{(x-1)^2}=\frac{3x^2-6x}{(x-1)^2}.$$

La derivada se anula cuando $3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0 \Rightarrow x=0,\ x=2$.

Luego:

- Si $x<0$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $0<x<1$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece. En $x=0$ se tiene un máximo relativo.
- Si $1<x<2$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $x>2$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece. Por tanto, en *x* = 2 hay mínimo relativo.

26. Galicia, septiembre 18 (Opción A)

2. a) Enuncia o teorema de Rolle. Calcula a, b e c para que a función $f(x)=\begin{cases}2x^2+ax & se\ x<1\\ bx+c & se\ x\geq 1\end{cases}$ cumpra as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo [0,2] e calcula o punto no que se cumpre o teorema.
b) Debuxa e calcula a área da rexión limitada pola parábola $y=x^2-2x$ e a recta $y=x$. (Para o debuxo da parábola, indica: puntos de corte cos eixes de coordenadas, o vértice e concavidade ou convexidade).

Solución:
a) El teorema de Rolle dice:
Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[x_1,x_2]$ y derivable en el intervalo (x_1,x_2), y además $f(x_1)=f(x_2)$, entonces existe al menos, un punto $x_0\in(x_1,x_2)$ tal que $f´(x_0)=0$.

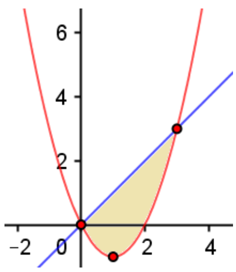
En este caso hay que exigir que la función $f(x)=\begin{cases}2x^2+ax & \text{si } x<1\\ bx+c & \text{si } x\geq 1\end{cases}$ sea continua en [0, 2] y derivable en (0, 2), y que $f(0)=f(2)$.
El único punto que presenta dudas es x = 1.
→ Continuidad:
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(2x^2+ax\right)=2+a;\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(bx+c\right)=b+c.$$
Límites laterales iguales: $2+a=b+c\Rightarrow a-b-c=-2$. [1]

→ Derivabilidad:
$$f´(x)=\begin{cases}4x+a & \text{si } x<1\\ b & \text{si } x>1\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f´(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(4x+a\right)=4+a;\ \lim_{x\to 1^+} f´(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(c\right)=b$$
Las derivadas laterales en x = 1 deben ser iguales: $4+a=b\ \Rightarrow\ a=b-4$. [2]

→ $f(0)=f(2)\ \Rightarrow\ 0=2b+c\Rightarrow c=-2b$. [3]
Sustituyendo [2] y [3] en [1]:
$b-4-b+2b=-2\Rightarrow b=1$; c = −2; a = −3.

En consecuencia:
$$f(x)=\begin{cases}2x^2-3x & \text{si } x<1\\ x-2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}\Rightarrow f´(x)=\begin{cases}4x-3, & \text{si } x<1\\ 1, & \text{si } x\geq 1\end{cases}\to f´(x)=0 \text{ en } x=\frac{3}{4}.$$

b) La parábola $y=x^2-2x$ corta al eje OX en los puntos x = 0 y x = 2. Es convexa (∪).
Su vértice lo tiene en la abscisa que anula su derivada: $y=2x-2=0\Rightarrow x=1$. Punto (1, −1).
La recta y la parábola se cortan cuando $x^2-2x=x\Rightarrow x^2-3x=0\Rightarrow x=0; x=3$.
Sus gráficas se dan en el dibujo adjunto.
El área del recinto sombreado viene dada por la integral definida:
$$\int_0^3\left(x-\left(x^2-2x\right)\right)dx=\int_0^3\left(3x-x^2\right)dx=$$
$$=\left[\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=\frac{27}{2}-\frac{27}{3}=\frac{9}{2}\ \text{u}^2.$$



27. Galicia, septiembre 18 (Opción B)

2. a) Calcula, se existe, o valor de m para que $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x+mx^2-1}{sen(x^2)}=3$

b) Calcula os valores de a, b, c e d para que a función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ teña un punto de inflexión no punto (0,5) e a tanxente á súa gráfica no punto (1,1) sexa paralela ao eixe X.

c) Calcula $\int_1^e \sqrt{x}\ln x dx$ (Nota: $ln = logaritmo\ neperiano$)

Solución:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x+mx^2-1}{\sin(x^2)}=\left[\frac{0}{0}\right]$. Puede hacerse aplicando la regla de L'Hôpital.

$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x+mx^2-1}{\sin(x^2)}=(L'H)=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x+2mx}{2x\cos(x^2)}=\left[\frac{0}{0}\right]$. Se repite la regla.

$\lim_{x\to 0}\frac{-4\cos 2x+2m}{2x\cos(x^2)}=\frac{-4+2m}{2}$.

Como se quiere que $\frac{-4+2m}{2}=3\Rightarrow -4+2m=6\Rightarrow m=5$.

b) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f''(x)=6ax+2b$.

Para que en x = 0 tenga un punto de inflexión → $f''(0)=0 \Rightarrow 2b=0\Rightarrow b=0$.

Como pasa por (0, 5) ⇒ $f(0)=5\Rightarrow d=5$.

Si la recta tangente a la gráfica en el punto (1, 1) es paralela al eje OX: $f'(1)=0$ y $f(1)=1$

$\Rightarrow 3a+2b+c=0$; $a+b+c+d=1$.

Sustituyendo b = 0 y d = 5 ⇒ $\begin{cases}3a+c=0\\ a+c=-4\end{cases}\Rightarrow a=2; c=-6$.

La función es: $f(x)=2x^3-6x+5$.

c) Una primitiva de $f(x)=\sqrt{x}\ln x$ puede hacerse por partes.

Tomando:

$$u=\ln x \text{ y } dv=\sqrt{x}dx \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \quad v=\int\sqrt{x}dx=\int x^{1/2}dx=\frac{x^{3/2}}{3/2}=\frac{2}{3}x^{3/2}.$$

Luego:

$$\int\sqrt{x}\ln x\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\cdot\ln x-\int\frac{2}{3}x^{3/2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\cdot\ln x-\int\frac{2}{3}x^{1/2}dx=$$

$$=\frac{2}{3}x^{3/2}\cdot\ln x-\frac{2}{3}\int x^{1/2}dx=\frac{2}{3}x^{3/2}\cdot\ln x-\frac{4}{9}x^{3/2}.$$

Por tanto:

$$\int_1^e\sqrt{x}\ln x\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\cdot\ln x-\frac{4}{9}x^{3/2}\right]_1^e = \frac{2}{3}e^{3/2}\cdot\ln e-\frac{4}{9}e^{3/2}-\left(-\frac{4}{9}1^{3/2}\right) = \frac{2}{9}e^{3/2}+\frac{4}{9}.$$

28. La Rioja, junio 18

3. (2 puntos) Sea $f(x)=xe^{-ax}$.

(I) Calcule, según los valores de *a*, las asíntotas de $f(x)$.

(II) Halle el valor de *a* para que *f* tenga en *x* = 1 un extremo relativo. ¿Es un máximo o un mínimo relativo?

Solución:

(I) Para *a* < 0, la función $f(x)=xe^{-ax}$ tiene una asíntota horizontal hacia −∞, pues:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-ax}=\left[-\infty\cdot e^{-\infty}\equiv-\infty\cdot 0\right]\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-ax}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{ax}}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]=\left(L'H\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{ae^{ax}}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0.$$

Para *a* > 0, la función $f(x)=xe^{-ax}$ tiene una asíntota horizontal hacia +∞, pues:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-ax}=\left[\infty\cdot e^{-\infty}\equiv\infty\cdot 0\right]\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-ax}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{ax}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left(L'H\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{ae^{ax}}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0.$$ (La asíntota es la recta *y* = 0).

Para *a* = 0, la función $f(x)=xe^{-ax}=x$ es una recta.

(II) Para que *f* tenga en *x* = 1 un extremo relativo es necesario que $f'(1)=0$.

Derivando:

$$f(x)=xe^{-ax}\Rightarrow f'(x)=e^{-ax}-axe^{-ax}=\left(1-ax\right)e^{-ax}\to f'(1)=\left(1-a\right)e^{-a}=0\Rightarrow a=1.$$

La función será: $f(x)=xe^{-x}$.

Derivando dos veces:

$$f'(x)=\left(1-x\right)e^{-x};\ f''(x)=-e^{-x}+\left(x-1\right)e^{-x}.$$

Como $f''(1)=-e^{-1}<0$, en *x* = 1 se tiene un máximo relativo.

29. La Rioja, julio 18 (A)

2. (3 puntos) Sea la función $f(x)=2-\cos x-3x$.

(I) Determine, si existen, las asíntotas oblicuas de *f*.

(II) Calcule $\int f(x)\cos x\,dx$.

(III) Demuestre que la función $f(x)$ solo corta una vez el eje horizontal.

Nota. Puede ser útil el teorema de Rolle.

Solución:

(I) No tiene asíntotas verticales: la función está definida para todo número real.

Tampoco tiene asíntotas horizontales: $\lim_{x\to\mp\infty}\left(2-\cos x-3x\right)=\pm\infty$.

¿Asíntota oblicua?

La recta $y=mx+n$ es asíntota oblicua de la curva $f(x)$ cuando se cumple que:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\cos x-3x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left(L'H\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x-3}{1}\to \text{No existe.}$$

Tampoco tiene asíntota oblicua.

(II) $\int f(x)\cos x\,dx=\int\left(2-\cos x-3x\right)\cos x\,dx=\int 2\cos x\,dx-\int\cos^2 x\,dx-\int 3x\cos x\,dx.$

La primera integral es inmediata: $\int 2\cos x\, dx = 2\sin x$.

La segunda integral puede hacerse mediante el cambio trigonométrico $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Así:

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x) dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right).$$

La tercera integral puede hacerse por partes:

$$\int x\cos x dx$$

Si:

$x = u \Rightarrow dx = du$; $\quad dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$.

Luego,

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x.$$

Teniendo en cuenta los signos y las constantes:

$$\int f(x)\cos x\, dx = \int (2-\cos x - 3x)\cos x\, dx = \int 2\cos x\, dx - \int \cos^2 x\, dx - \int 3x\cos x\, dx =$$

$$= 2\sin x - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) - 3(x\sin x + \cos x) + c.$$

(III) Al ser $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = -\cos 1 - 1 < 0$, como la función es continua, el teorema de Bolzano asegura que corta, al menos una vez, al eje *OX* en el intervalo (0, 1). Por otra parte, observando que $f'(x) = \sin x - 3 < 0$ para todo $x \Rightarrow$ la función es estrictamente decreciente. Luego solo puede cortar una vez al eje.

<u>**30**. La Rioja, julio 18 (B)</u>

2. (2 puntos)

(I) Halle, si existe, el valor de *a* para el cual

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax+1} - (3x-1)\right) = 2.$$

(II) Determine, si existe,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+12x+1}\right)',$$

donde $\left(\sqrt{9x^2+12x+1}\right)'$ representa la derivada de $\sqrt{9x^2+12x+1}$.

<u>Solución</u>:

(I) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax+1} - (3x-1)\right) = [\infty - \infty] \to$ Multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax+1} - (3x-1)\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{9x^2+ax+1} - (3x-1)\right)\left(\sqrt{9x^2+ax+1} + (3x-1)\right)}{\left(\sqrt{9x^2+ax+1} + (3x-1)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{9x^2+ax+1-(3x-1)^2}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9x^2+ax+1-9x^2+6x-1}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(a+6)}{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)} \to \text{(dividiendo por } x\text{)} \to \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x(a+6)}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2+ax+1}+(3x-1)}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a+6}{\sqrt{\frac{9x^2+ax+1}{x^2}}+\frac{3x}{x}-\frac{1}{x}} = \frac{a+6}{\sqrt{9}+3} = \frac{a+6}{6}.$$

Como se desea que $\frac{a+6}{6} = 2 \Rightarrow a = 6$.

(II) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{9x^2+12x+1}\right)' = \lim_{x\to+\infty} \frac{18x+12}{2\sqrt{9x^2+12x+1}} = \frac{9}{3}$. (Se aplica el procedimiento anterior).

<u>**31**. Madrid, junio 18</u>

Ejercicio 2: **Calificación máxima:** 2,5 puntos.

a) (1,5 puntos) En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes:

m_1 = 0,92; m_2 = 0,94; m_3 = 0,89; m_4 = 0,90; m_5 = 0,91.

Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función $E(x) = (x-m_1)^2 + (x-m_2)^2 + ... + (x-m_5)^2$ alcanza el mínimo. Calcule dicho valor x.

b) (1 punto) Aplique el método de integración por partes para calcular la integral $\int_1^2 x^2 \ln(x)dx$, donde ln significa logaritmo neperiano.

<u>Solución</u>:

a) Sustituyendo los valores dados, la función es:

$$E(x) = (x-0,92)^2 + (x-0,94)^2 + (x-0,89)^2 + (x-0,90)^2 + (x-91)^2.$$

Derivando e igualando a 0:

$$E'(x) = 2(x-0,92) + 2(x-0,94) + 2(x-0,89) + 2(x-0,90) + 2(x-91) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 10x - 9,12 = 0 \Rightarrow x$ = 0,912. (Este valor coincide con la media aritmética).

Como $E''(x) = 10 > 0$, para x = 0,912 se obtiene el mínimo buscado.

b) Para hallar $\int x^2 \ln(x)dx$ se toma:

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx; \; dv = x^2dx \Rightarrow v = \int x^2dx = \frac{x^3}{3}.$$

Por tanto: $\int x^2 \ln(x)dx = \ln(x)\cdot\frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$.

Luego:

$$\int_1^2 x^2 \ln(x)dx = \left(\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9} - \left(0 - \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}.$$

<u>**32**. Madrid, junio 18</u>

Ejercicio 2: **Calificación máxima:** 2,5 puntos.

Dada la función $f(x)=\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Calcular $f´(4)$.

c) (1,25 puntos) Hallar el área del recinto limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = –1$ y $x = 1$.

<u>Solución</u>:

La función dada puede definirse a trozos.

$$f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}=\begin{cases}\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}}, & \text{si } x<0\\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}, & \text{si } x\geq 0\end{cases}.$$

→ Puede verse que se trata de una función par, lo que simplifica futuros cálculos.

a) Esta función tiene una asíntota horizontal, la recta $y = 1$, tanto hacia $+\infty$ como hacia $–\infty$, pues:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+9}{x^2}}}=\frac{1}{1}=1;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-x}{-x}}{\sqrt{\frac{x^2+9}{(-x)^2}}}=\frac{1}{1}=1.$$

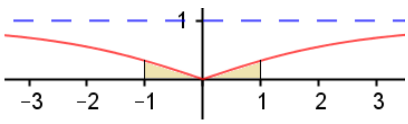
(Si se ha visto que es “par” el segundo límite no sería necesario).

b) $$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\Rightarrow f´(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+9}-x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}}{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2}\Rightarrow f´(x)=\frac{9}{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^3}.$$

Para $x = 4$, $f´(4)=\dfrac{9}{\left(\sqrt{4^2+9}\right)^3}=\dfrac{9}{125}$.

c) El área pedida, S, viene dada por:

$$S=\int_{-1}^{0}\frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}dx+\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx.$$



Por su simetría:

$$S=2\int_{0}^{1}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx=2\int_{0}^{1}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}dx=\left(2\sqrt{x^2+9}\right)\Big|_0^1=2\sqrt{10}-6\ \text{u}^2.$$

→ La figura no se pide. No obstante podría comentarse que como la función es siempre positiva (el valor absoluto así lo indica), el área se calcula tal y como se ha hecho.

33. Madrid, julio 18
Ejercicio 2: **Calificación máxima:** 2,5 puntos.

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 8e^{2x-4} & \text{si } x\le 2 \\ \dfrac{x^3-4x}{x-2} & \text{si } x>2 \end{cases}$ y se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar la continuidad de f en $x = 2$.
b) (1 punto) Calcular las asíntotas horizontales de $f(x)$. ¿Hay alguna asíntota vertical?
c) (0,75 puntos) Calcular $\int_0^2 f(x)dx$.

Solución:
a) Para que la función sea continua en $x = 2$ los límites laterales deben ser iguales a $f(2)=8$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} 8e^{2x-4}=8e^0=8\,;$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-4x}{x-2}=\frac{0}{0}=(L'H)=\lim_{x\to 2^+}\frac{3x^2-4}{1}=\frac{8}{1}=8\,.$$

Por tanto, la función es continua en $x = 2$.

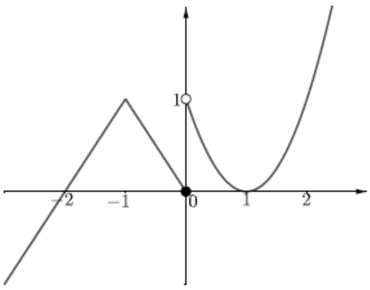
b) La función tiene una asíntota horizontal hacia $-\infty$, pues:

$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty} 8e^{2x-4}=8e^{-\infty}=0 \to$ La asíntota es la recta $y = 0$.

No hay ninguna asíntota vertical, pues de haberla se daría en $x = 2$, pero se ha visto que $\lim_{x\to 2} f(x)=8$.

c) $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 8e^{2x-4}dx=\left[4e^{2x-4}\right]_0^2=4e^0-4e^{-4}=4-4e^{-4}$.

34. Madrid, julio 18
Ejercicio 2: **Calificación máxima:** 2,5 puntos.



El dibujo adjunto muestra la gráfica de una función $y=f(x)$.
Usando la información de la figura, se pide:
a) (0,5 puntos) Indicar los valores de $f(-1)$ y $f'(1)$.
b) (1 punto) Justificar, usando límites laterales, si f es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.
c) (0,5 puntos) Indicar razonadamente si f es derivable en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.
d) (0,5 puntos) Determinar el valor de $\int_{-2}^0 f(x)dx$.

Solución:
a) $f(-1)$ = 1.
En $x = 1$ la recta tangente a la función es horizontal: $f'(1) = 0$

b) En $x = -1$ la función es continua pues los límites laterales son iguales:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=1;\ \lim_{x\to -1^+} f(x)=1.$$

En $x = 0$ la función no es continua pues los límites laterales no son iguales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0\,;\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=1\,.$$

c) La función no es derivable en ninguno de esos puntos.
En $x = -1$ las derivadas laterales son distintas: $\lim_{x\to -1^-} f'(x) = 1$; $\lim_{x\to -1^+} f'(x) = -1$.
Podría indicarse que la función tiene un pico en ese punto.
En $x = 0$ la función no es derivable por no ser continua.

d) El valor de $\int_{-2}^{0} f(x)dx$ coincide con el área del triángulo de base 2 y altura 1: su valor es 1.
También podría hacerse como sigue:

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx = \int_{-2}^{-1}(x+2)\,dx + \int_{-1}^{0}(-x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} =$$

$$= \frac{1}{2}-2-(2-4)+\left(0+\frac{1}{2}\right)=1.$$

(A la izquierda de x = −1, la función es $f(x) = x+2$; en el intervalo [0, 1] es $f(x) = -x$).

<u>**35**. Murcia, junio 18</u>
CUESTIÓN A.2:
a) [1,5 p.] Descomponga el número 10 en dos sumandos positivos de manera que la suma de uno de ellos más el doble del logaritmo (neperiano) del otro sea máxima.
b) [0,5 p.] Calcule dicha suma máxima.
<u>Solución</u>:
a) Si los números son *x* e *y* se desea que $S = x + 2\ln y$ sea máxima, siendo $x + y = 10$.
Despejando y sustituyendo:

$$x = 10 - y \Rightarrow S(y) = 10 - y + 2\ln y.$$

La función *S* será máxima en la solución de *S*´= 0 que haga positiva a *S*´´.
Derivando e igualando a 0:

$$S'(y) = -1 + \frac{2}{y} = 0 \Rightarrow y = 2 \rightarrow \text{el otro número será } x = 8.$$

Como $S''(y) = -\frac{2}{y^2} < 0$ para todo valor de *y*, para *y* = 2 se tiene el máximo buscado.

b) La suma es: $S(2) = 8 + 2\ln 2$.

<u>**36**. Murcia, junio 18</u>
CUESTIÓN A.3:
a) [1 p.] Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx$.
b) [0,5 p.] Determine el área del recinto limitado por el eje *OX*, las rectas verticales *x* = 0 y *x* = 2, y la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$.
<u>Solución</u>:
a) La integral $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx$ es inmediata.

Basta con recordar la fórmula $\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}dx = \sqrt{f(x)}+c$, y ajustar constantes:

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx = \frac{2}{4}\int \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1}+c.$$

b) Como en el intervalo de integración la función estudiada es positiva, el área viene dada por la integral definida $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx$, cuyo valor es:

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}dx = \left[\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+1}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{9}-\sqrt{1}\right) = 1 \text{ u}^2.$$

<u>**37**. Murcia, septiembre 18</u>

Cuestión A.2: Calcule los siguientes límites:

a) (1 p.) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)$.

b) (1 p.) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x+\sin x)}{x}$.

<u>Solución</u>:

a) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2-\left(x^2-2\right)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}} = \left[\frac{4}{\infty}\right] = 0.$$

b) Debe hacerse aplicando L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x+\sin x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}}{1} = 1.$$

<u>**38**. Murcia, septiembre 18</u>

Cuestión A.3:

a) (1 p.) Calcule la siguiente integral indefinida $\int \sin x e^{\cos x}dx$.

b) (0,5 p.) Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi/2$, y la gráfica de la función $f(x) = \sin x e^{\cos x}$.

<u>Solución</u>:

a) La integral $\int \sin x e^{\cos x}dx$ es inmediata.

Basta con recordar la fórmula $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)}+c$, y ajustar constantes:

$$\int \sin x e^{\cos x}dx = -\int (-\sin x)e^{\cos x}dx = -e^{\cos x}+c.$$

b) Como en el intervalo de integración la función estudiada es positiva, el área viene dada por la integral definida $\int_0^{\pi/2} \sin x e^{\cos x} dx$, cuyo valor es:

$$\int_0^{\pi/2} \sin x e^{\cos x} dx = \left[-e^{\cos x}\right]_0^{\pi/2} = -e^{\cos\frac{\pi}{2}} - \left(-e^{\cos 0}\right) = -e^0 + e^1 = e - 1 \text{ u}^2.$$

<u>**39**. Navarra, junio 18</u>

A3) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int e^{\cos 3x} \sin 3x \, dx \quad \text{(1 punto)}; \qquad \int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx \quad \text{(1 punto)}$$

<u>Solución</u>:

La integral $\int e^{\cos 3x} \sin 3x \, dx$ es inmediata.

Basta con recordar la fórmula $\int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$, y ajustar constantes:

$$\int e^{\cos 3x} \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3} \int (-3 \sin 3x) e^{\cos 3x} dx = -\frac{1}{3} e^{\cos 3x} + c.$$

También $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx$ resulta inmediata. Hay que tener en cuenta la igualdad trigonométrica $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ y la fórmula de integración $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c$; también hay que "ver" que $\left(\cos^2 x\right)' = 2\cos x \cdot (-\sin x)$.

Con esto:

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{1+\cos^2 x} dx = -\int \frac{2(-\sin x)\cos x}{1+\cos^2 x} dx = -\ln\left(1+\cos^2 x\right) + c.$$

<u>**40**. Navarra, junio 18</u>

B3) Demuestra que existe α ∈ (2, 3) tal que $f(\alpha) = -\frac{3}{2}$, siendo $f(x) = \cos(\pi x)\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 - 1}$.

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

<u>Solución</u>:

La función dada es continua en el intervalo [2, 3] (lo es en todo **R**). Por tanto cumple el teorema de los valores intermedios: Si $f(x)$ es continua en [*a*, *b*], entonces la función toma todos los valores comprendidos (intermedios) entre $f(a)$ y $f(b)$. Esto es, para cualquier valor *c*, $f(a) \le c \le f(b)$, existe un punto α ∈ [*a*, *b*], tal que $f(\alpha) = c$.

Como:

$$f(2) = \cos(2\pi)\sqrt[3]{2^3 - 2\cdot 2^2 - 1} = 1\cdot\sqrt[3]{-1} = -1 \text{ y } f(3) = \cos(3\pi)\sqrt[3]{3^3 - 2\cdot 3^2 - 1} = -1\cdot\sqrt[3]{8} = -2,$$

entonces, la función toma todos los valores comprendidos entre –2 y –1. Como $-2 \le -\frac{3}{2} \le -1$, existe α ∈ (2, 3) tal que $f(\alpha) = -\frac{3}{2}$.

<u>**41**. Navarra, julio 18</u>

A3) Demuestra que existe α ∈ (0, 2) tal que $f'(\alpha)=1$, siendo

$$f(x)=\sin\left(\frac{\pi+\pi x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\ln\left(2e^x+2x-x^2\right).$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

<u>Solución</u>:

La función dada es continua en el intervalo cerrado [0, 2] y derivable en el abierto (0, 2)*. Por tanto cumple el teorema del valor medio (incrementos finitos; de Lagrange), que dice:

Si $f(x)$ es continua en [*a*, *b*] y derivable en (*a*, *b*), entonces existe algún punto α ∈ (*a*, *b*) tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\alpha)$.

Como:

$$f(0)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(0)\cdot\ln\left(2e^0\right)=1\cdot1\cdot\ln 2=\ln 2\,;$$

$$f(2)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos(\pi)\cdot\ln\left(2e^2+2\cdot2-4\right)=-1\cdot(-1)\ln\left(2e^2\right)=\ln\left(2e^2\right)=\ln 2+2\,,$$

entonces:

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{\ln 2+2-\ln 2}{2}=1 \Rightarrow \text{existe } \alpha \in (0,2) \text{ tal que } f'(\alpha)=1.$$

* Habría que justificar de alguna manera que $f_3(x)=\ln\left(2e^x+2x-x^2\right)$ está definida en [0, 2]; bastaría con comprobar que $2e^x+2x-x^2>0$ cuando $x\geq 0$.

Podría hacerse como sigue:

1) Para $x = 0 \to 2e^x+2x-x^2$ vale 2;

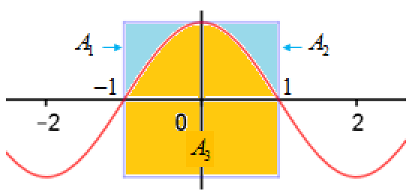
2) Derivando $2e^x+2x-x^2$ se obtiene $2e^x+2-2x=2\left(2e^x+1-x\right)>0$ para valores de x entre 0 y 2. Luego la expresión $2e^x+2x-x^2$ es creciente; y como en $x = 0$ vale 2, siempre será positiva.

<u>**42**. Navarra, julio 18</u>

A4) La gráfica de la función $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ divide al cuadrado de centro (0, 0) y lado 2 en tres regiones. Calcula el área de cada una de esas tres regiones. (3 puntos)

<u>Solución</u>:

La situación es la que se muestra en la figura adjunta.



El área el cuadrado vale 4; por debajo del eje *OX*, está la mitad.

La parte de A_3 que está entre el eje *OX* y la función viene dada por:

$$\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=2\int_{0}^{1}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx=\frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{4}{\pi}\sin(0)=\frac{4}{\pi}.$$

Por tanto, $A_3=2+\frac{4}{\pi}$. El área de cada una de las otras dos regiones es: $A_1=A_2=1-\frac{2}{\pi}$.

<u>**43**. País Vasco, junio 18</u>
Ejercicio A4
Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2}\,dx\,.$$

<u>Solución</u>:
Puede hacerse la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x-1}{x(x+1)^2}=\frac{x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A}{x(x+1)^2}\,.$$

Por identificación de coeficientes:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B+C=2 \\ A=-1 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} -1+B=0\to B=1 \\ -2+1+C=2\to C=3 \\ A=-1 \end{cases}.$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2}\,dx=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{(x+1)}+\frac{3}{(x+1)^2}\right)dx=-\ln x+\ln(x+1)-\frac{3}{x+1}+c\,.$$

<u>**44**. País Vasco, junio 18</u>
Ejercicio A5
De todos los números positivos x e y tales que $x+y=10$ encontrar aquellos para los que el producto $P=x^2y$ se máximo.
<u>Solución</u>:
Si $x+y=10 \Rightarrow y=10-x$.
Sustituyendo:

$$P=x^2y\to P=x^2(10-x)\Rightarrow P(x)=10x^2-x^3\,.$$

El máximo de P se obtiene en la solución de $P´=0$ que hace negativa a $P´´$.
Derivando e igualando a 0:

$$P´´(x)=20x-3x^2=0\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=20/3 \end{cases}.$$

Como $P´´(x)=20-6x$ y $P´´(20/3)=-20<0$, para $x=\dfrac{20}{3}$ se tiene el máximo buscado.

Los números serán: $x=\dfrac{20}{3}$ e $y=\dfrac{10}{3}$.

45. País Vasco, julio 18

Ejercicio A3

Dada la función $f(x)=x^2e^{-x}$ estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la existencia de máximos, mínimos y asíntotas.

Solución:

Derivando:

$$f(x)=x^2e^{-x} \Rightarrow f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{x} \to \text{se anula en } x=0 \text{ y } x=2.$$

- Si $x<0$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $0<x<2$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece. Se deduce que en $x=0$ hay un mínimo.
- Si $x>2$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece. Se deduce que en $x=2$ hay un máximo.

→ La función no tiene asíntotas verticales, pues está definida en todo **R**.

Tiene una asíntota horizontal hacia $+\infty$, pues:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L'H)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L'H)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=\left[\frac{2}{\infty}\right]=0.$$

La asíntota es la recta $y=0$.

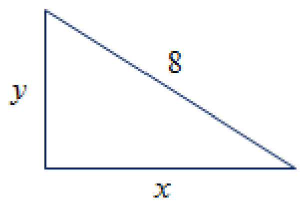
46. País Vasco, julio 18

Ejercicio A5

Calcular el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 8.

Solución:

Si los catetos del triángulo miden x e y, su área será: $S=\dfrac{xy}{2}$.



Como $x^2+y^2=64 \Rightarrow y=\sqrt{64-x^2}$.

Sustituyendo:

$$S(x)=\frac{x\sqrt{64-x^2}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{64x^2-x^4}.$$

El máximo de S se obtiene en la solución de $S'=0$ que hace negativa a S''.

Derivando e igualando a 0:

$$S'(x)=\frac{128x-4x^3}{4\sqrt{64x^2-x^4}}=\frac{32x-x^3}{\sqrt{64x^2-x^4}}=0 \Rightarrow x=0 \text{ o } x=\sqrt{32}=4\sqrt{2}.$$

Como para valores de x situados a la izquierda de $4\sqrt{2}$ la derivada es positiva (la S crece), y para valores de x situados a la derecha de $4\sqrt{2}$ la derivada es negativa (la S decrece), se deduce que el valor máximo se da en $x=4\sqrt{2}$. Para ese valor de x, $y=4\sqrt{2}$.