ALGUNOS PROBLEMAS DE ÁLGEBRA PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE EBAU–EvAU–PEBAU… DE 2018

1. Andalucía, junio 18

Ejercicio 3(B).-

(a) [1,5 puntos] Justifica que es posible un pago de 34,50 euros cumpliendo las siguientes restricciones:

- utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros;
- se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas;
- tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimos y 2 euros juntas.

¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

(b) [1 punto] Si se redondea la cantidad a 35 euros, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

Solución:

a) Con las condiciones dadas, y en el supuesto que se emplean *x*, *y* y *z* monedas de 0,50 €, de 1 € y de 2 €, respectivamente, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 0,5x+1y+2z=34,50 \\ x+y+z=30 \\ y=x+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+4z=69 \\ x+y+z=30 \\ x-y+z=0 \end{cases}.$$

Haciendo transformaciones de Gauss:

$$\begin{cases} x+2y+4z=69 \\ x+y+z=30 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1-E2 \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} y+3z=39 \\ x+y+z=30 \\ -2y=-30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15+3z=39 \Rightarrow z=8 \downarrow \\ x+15+8=30 \to x=7 \\ y=15 \uparrow \end{cases}.$$

Como hay una única solución (x = 7, y = 15, z = 8), es posible hacer el pago indicado en las condiciones dadas.

b) En este caso, el sistema será:

$$\begin{cases} 0,5x+1y+2z=35 \\ x+y+z=30 \\ y=x+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+4z=70 \\ x+y+z=30 \\ x-y+z=0 \end{cases}.$$

Haciendo transformaciones de Gauss:

$$\begin{cases} x+2y+4z=69 \\ x+y+z=30 \\ x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1-E2 \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} y+3z=40 \\ x+y+z=30 \\ -2y=-30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15+3z=40 \Rightarrow z=25/3 \\ x+15+z=30 \\ y=15 \uparrow \end{cases}.$$

Como la solución para *z* no es entera no es posible hacer el pago de 35 € con las indicaciones dadas.

2. Aragón, junio 18

B1. (3 puntos) Considere la matriz: $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) (1,5 puntos) Determine los valores del parámetro *k* para los que la matriz $A-kI$ tenga inversa, siendo *I* la matriz identidad de orden 3.

b) (1,5 puntos) Encuentre la matriz *X* que verifica que:

$$(A-3I)X=2I$$

siendo I la matriz identidad de orden 3 y A la matriz que aparece al comienzo del enunciado.
Solución:

a) $A-kI=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&0&0\\1&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k&0&0\\0&k&0\\0&0&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-k&0&1\\0&-k&0\\1&0&3-k\end{pmatrix}$.

Esa matriz tiene inversa cuando $|A-kI|\neq 0$.

$\begin{vmatrix}3-k&0&1\\0&-k&0\\1&0&3-k\end{vmatrix}=-k(3-k)^2+k = -k\left(k^2-6k+8\right)\rightarrow$ vale 0 cuando k = 0, 2, 4.

Por tanto, la matriz $A-kI$ tendrá inversa siempre que cuando $k\neq$ 0, 2, 4.

b) Como para k = 3 la matriz $A-3I$ tiene inversa, se deduce que:

$(A-3I)X=2I \Rightarrow X=(A-3I)^{-1}\cdot(2I)$.

Cálculo de $(A-3I)^{-1}$.

$A-3I=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-3&0\\1&0&0\end{pmatrix}\rightarrow |A-3I|=3;\ Adj(A-3I)=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&-1&0\\3&0&0\end{pmatrix}$;

$(A-3I)^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}0&0&3\\0&-1&0\\3&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1/3&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

Por tanto,

$$X=(A-3I)^{-1}\cdot(2I) = 2\cdot(A-3I)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&-2/3&0\\2&0&0\end{pmatrix}.$$

3. Asturias, junio 18

1A. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&2&m-1\\1&m-1&m&1\\m-1&1&m&1\end{pmatrix}$, donde m es un número real.

a) (1,5 puntos) Estudiar el rango de A según los valores de m.
b) (1 punto) Para m = –1, calcular la solución, si existe, del sistema

$$A^t\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad (A^t \text{ matriz traspuesta})$$

Solución:

a) Habría que recordar que el rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.
El rango no varía si a la tercera fila de la matriz se le resta la segunda:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & m-1\\ 1 & m-1 & m & 1\\ m-1 & 1 & m & 1\end{pmatrix}\to_{F3-F2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & m-1\\ 1 & m-1 & m & 1\\ m-2 & 2-m & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Se consideran los menores:

$$|A_1|=\begin{vmatrix}1 & 2 & m-1\\ 1 & m & 1\\ m-2 & 0 & 0\end{vmatrix}=(m-2)\left(-m^2+m+2\right)$$ → se anula cuando $m = 2$ o $m = –1$.

$$|A_2|=\begin{vmatrix}1 & 2 & m-1\\ m-1 & m & 1\\ 2-m & 0 & 0\end{vmatrix}=(2-m)\left(-m^2+m+2\right)$$ → se anula cuando $m = 2$ o $m = –1$.

Por tanto, si $m \neq -1$ y 2 el rango de A será 3.

Para $m = –1$, $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & -2\\ 1 & -2 & -1 & 1\\ -2 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ → Su rango es 2, pues el menor $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}\neq 0$.

Para $m = 2$, $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ → Su rango es 1, pues tiene iguales las tres filas.

b) Para $m = –1$, el sistema es $A^t\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Como se trata de un sistema homogéneo, seguro que tiene solución; además, como el rango dela matriz de coeficientes es 2 (menor que el número de incógnitas), el sistema será compatible indeterminado.

Multiplicando, queda el sistema:

$$\begin{cases}x+y-2z=0\\ x-2y+z=0\\ 2x-y-z=0\\ -2x+y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-2z=0\\ x-2y+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=2z\\ x-2y=-z\end{cases}\Rightarrow_{E2-E1}\begin{cases}x+y=2z\\ -3y=-3z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=t\end{cases}.$$

<u>**4.** Baleares, septiembre 18 (Opción B)</u>

1. Determinau quines relacions han d'existir entre a, b, c i d perquè es verifiqui $\mathbf{AM} = \mathbf{MA}$, sent $\mathbf{A}$ i $\mathbf{M}$ les matrius següents: (10 punts)

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad \mathbf{M}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

<u>Solución</u>:

Si $AM=MA\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -c & -d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a+b \\ d & -c+d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -c = b \\ -d = -a+b \\ a+c = d \\ b+d = -c+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -b \\ d = a-b \end{cases}.$$

Por tanto, la matriz *M* debe ser de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}, \; a, b \in \mathbf{R}.$$

<u>**5**. Cantabria, junio 18 (EXAMEN Nº 1)</u>

Ejercicio 1

Sean *x*, *y*, *z* números reales. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} z & 2 & x \\ 1 & -y & -z \\ x+z & -y & z \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) [2 PUNTOS] Escriba un sistema de ecuaciones en las incógnitas *x*, *y*, *z* que resuelvan el problema matricial *AB* = *C* y calcule todas sus soluciones.

2) [1,25 PUNTOS] Si *x* = 0, *y* = 0, calcule para qué valores de *z* la matriz *A* tiene rango 2.

<u>Solución</u>:

1) $AB = C \Rightarrow \begin{pmatrix} z & 2 & x \\ 1 & -y & -z \\ x+z & -y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2z-2+x = -2 \\ 2+y-z = 3 \\ 2x+2z+y+z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2z = 0 \\ y-z = 1 \\ 2x+y+3z = 1 \end{cases}.$

Se trata de un sistema muy sencillo. Puede hacerse por sustitución:

$$\begin{cases} x = -2z \\ y = 1+z \\ 2x+y+3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 1+z \\ -4z+1+z+3z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 1+z \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Como falta una ecuación, el sistema será compatible indeterminado, con solución: $\begin{cases} x = -2t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases}.$

2) Si *x* = 0, *y* = 0 $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} z & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -z \\ z & 0 & z \end{pmatrix} \to |A| = -2z(1+z) \Rightarrow$ Se anula si *z* = 0 o *z* = –1.

En consecuencia, si *z* ≠ 0, –1, el rango de *A* será 3.

Si *z* = 0 o *z* = –1, el rango de *A* será 2.

En efecto:

- si *z* = 0, $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$ el menor $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$.
- si *z* = –1, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to$ el menor $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$.

6. Cantabria, junio 18 (EXAMEN Nº 2)

Ejercicio 1

Considere el sistema siguiente dependiente del parámetro $b \in \mathbf{R}$

$$\begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ -1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1) [2 PUNTOS] Clasifique el tipo de sistema según el parámetro *b*.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso *b* = –2.

Solución:

1) La ecuación matricial dada genera un sistema lineal de 4 ecuaciones con 3 incógnitas. Tendrá solución cuando el rango de la matriz de coeficientes (*A*) sea igual al de la matriz ampliada (*M*). La solución será única cuando, además, ese rango sea igual al número de incógnitas.

Cálculo del rango de *M*:

$$M = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \text{Su rango será 4 si } |M| \neq 0 \text{; menor que 4 cuando } |M| = 0.$$

$$|M| = 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & b & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - b\cdot\begin{vmatrix} -1 & b & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2(b-2) - b(-b+2) = (2+b)(b-2).$$

Por tanto, si $b \neq -2$ y 2 el sistema será incompatible: rango de *M* = 4 > rango de *A*.

- Para *b* = 2, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = M \to$ el menor $|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$.

Por tanto, rango de *M* = rango de *A* = 3. Es sistema será compatible determinado.

- Para *b* = –2, $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = M \to$ el menor $|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$.

Por tanto, rango de *M* = rango de *A* = 3. Es sistema será compatible determinado.

2) Para el caso *b* = –2 (teniendo en cuenta la submatriz A_2) el sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -x - 2z = 1 \\ -x + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow_{E3-E2} \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -x - 2z = 1 \\ 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

7. Cantabria, septiembre 18 (EXAMEN Nº 2)

Ejercicio 1 Sean $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ x & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ y & 1\end{pmatrix}$, con $x, y \in \mathbf{R}$.

1) [1,25 PUNTOS] Determine los valores de x e y para los cuales $AB=BA$.
2) [1,5 PUNTOS] Determine un valor x para el que $A^2 = 6A$ ¿Tiene A inversa en este caso?
3) [0,5 PUNTOS] Sean N, R, S, X matrices 2×2 que tienen todas matriz inversa. Despeje la matriz X de la expresión $N\cdot X\cdot R=S$.

Solución:

1) $AB=BA \Rightarrow \begin{pmatrix}3 & 1\\ x & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ y & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ x & 3\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}3+y & 4\\ x+3y & x+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+x & 4\\ 3y+x & y+3\end{pmatrix} \Rightarrow 3+x=3+y \Rightarrow x=y.$$

Los valores de x e y deben ser iguales.

2) Si $A^2=6A \Rightarrow \begin{pmatrix}3 & 1\\ x & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ x & 3\end{pmatrix}=6\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ x & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}9+x & 6\\ 6x & x+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 6\\ 6x & 18\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 9+x=18 \Rightarrow x=9.$$

3) Como las matrices N y R son invertibles, multiplicando, miembro a miembro, por la izquierda por N^{-1}, y por la derecha por R^{-1}, se tiene:

$$N\cdot X\cdot R=S \Rightarrow N^{-1}\cdot(N\cdot X\cdot R)\cdot R^{-1}=N^{-1}\cdot S\cdot R^{-1} \Rightarrow \left(N^{-1}\cdot N\right)\cdot X\cdot\left(R\cdot R^{-1}\right)=N^{-1}\cdot S\cdot R^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I\cdot X\cdot I=N^{-1}\cdot S\cdot R^{-1} \Rightarrow X=N^{-1}\cdot S\cdot R^{-1}.$$

8. Castilla La Mancha, junio 18

3B. a) Encuentra los valores del parámetro $a \in \mathbf{R}$ para que la siguiente matriz tenga inversa.

$$A=\begin{pmatrix}a-1 & 1 & -1\\ 0 & a-2 & 1\\ a & 0 & 2\end{pmatrix} \qquad \text{(1 punto)}$$

b) Para $a = 2$ calcula razonadamente A^{-1} y comprueba el resultado. (1 punto)
c) Para $a = 0$ calcula razonadamente el valor de los determinantes $\left|A^{-1}\right|$ y $|2A|$. (0,5 puntos)

Solución:

a) Una matriz no tiene inversa cuando su determinante vale 0.

$$|A|=\begin{vmatrix}a-1 & 1 & -1\\ 0 & a-2 & 1\\ a & 0 & 2\end{vmatrix}=2(a-1)(a-2)+a(a-1)=(a-1)(3a-4)$$

$\to |A|=0$ si $a = 1$ o $a=\dfrac{4}{3}$.

Por tanto, en los demás casos, cuando $a \neq 1$ y $a \neq \dfrac{4}{3}$, la matriz A tendrá inversa.

b) La matriz inversa es $A^{-1}=\dfrac{\left(Adj(A)\right)^t}{|A|}$.

Para a = 2: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow |A|=2$; $Adj(A)=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -2 & 4 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

Comprobación: (debe cumplirse que $A\cdot A^{-1}=I$)

Para a = 2: $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A\cdot A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I\ .$$

c) Para a = 0, $|A|=4$.

Aplicando las propiedades de los determinantes:

$$\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{4};\quad |2A|=2^3\cdot|A|=8\cdot4=32.$$

<u>**9**. Castilla La Mancha, julio 18</u>

3B. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ e } I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) Halla razonadamente dos parámetros a y b tales que $A^2=aA+bI$. (1,25 puntos)

b) Calcula razonadamente todas las matrices X que verifican que $(A-X)(A+X)=A^2-X^2$. (1,25 puntos)

<u>Solución</u>:

a) $A^2=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $aA+bI=a\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & -3a\\ 0 & a+b\end{pmatrix}$.

Por tanto:

$$A^2=aA+bI \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & -3a\\ 0 & a+b\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}1=a+b\\ -6=-3a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=2\\ b=-1\end{cases}.$$

b) Para que $(A-X)(A+X)=A^2-X^2$ es necesario que $AX=XA$, pues

$$(A-X)(A+X)=A^2+AX-XA+X^2.$$

Sea $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, entonces:

$$AX=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-3c & b-3d\\ c & d\end{pmatrix};\quad XA=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -3a+b\\ c & -3c+d\end{pmatrix}$$

Luego:

$$\begin{pmatrix} a-3c & b-3d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -3a+b \\ c & -3c+d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-3c=a \\ c=c \\ b-3d=-3a+b \\ d=-3c+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=d \\ c=0 \\ b=b \end{cases}.$$

Las matrices pedidas son de la forma: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, para cualquier valor de *a* y *b*.

10. Castilla–León, junio 18

E1. a) Discutir el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro λ:

$$\begin{cases} \lambda x + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$ (1,2 puntos)

b) Resolverlo para λ = 1. (0,8 puntos)

Solución:

a) Sea *A* la matriz de coeficientes *y* *M* la matriz ampliada.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = M$$

Si r(*A*) = r(*M*) = 3 → sistema compatible determinado: solución única.
Si r(*A*) = r(*M*) < 3 → sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(*A*) < r(*M*) → sistema incompatible: no tiene solución.

El determinante de *A* vale

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda + \lambda^2 - 2$$ → Este determinante vale 0 si λ = –2 o λ = 1.

Con esto:

- Si λ ≠ –2, 1 ⇒ r(*A*) = 3 = r(*M*). El sistema será compatible determinado.
- Si λ = –2 se tendrá: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = M$.

Como $|M_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2-1 = -3 \neq 0$ ⇒ r(*A*) = 2 < r(*M*) =3: sistema incompatible.

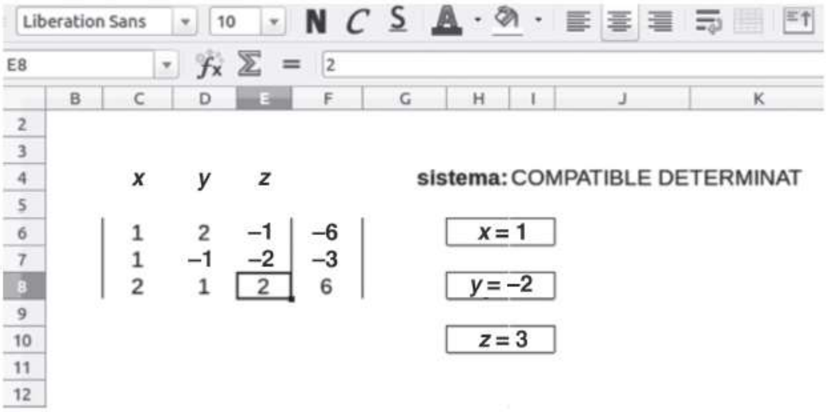
- Si λ = 1: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) = M$ → Como hay tres columnas repetidas ⇒ r(*A*) = r(*M*) =2: sistema compatible indeterminado.

b) Si λ = 1 el sistema inicial es:

$$\begin{cases} x+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \underset{E2-E1}{\Rightarrow} \begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow (z=t) \to \begin{cases} x=1-t \\ y=0 \\ z=t \end{cases}.$$

<u>**11**. Cataluña, junio 18</u>

6. Uns estudiants de batxillerat han programat un full de càlcul com el de la figura següent que dona la solució d'un sistema d'equacions compatible determinat d'una manera automàtica:



a) Escriviu el sistema i comproveu que els valors proposats com a solució són correctes.
[1 punt]

b) Quin valor s'hauria de posar en lloc del 2 que està emmarcat en la imatge, corresponent a la cel·la E8 (a_{33} de la matriu de coeficients), perquè el sistema fos incompatible?
[1 punt]

<u>Solución</u>:

a) En la figura se dan las matrices de coeficientes y ampliada, que son:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right)=M \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=-6 \\ x-y-2z=-3 \\ 2x+y+2z=6 \end{cases}.$$

Sustituyendo $x = 1$, $y = -2$ y $z = 3$ en cada una de las ecuaciones:

$$\begin{cases} 1+2\cdot(-2)-3=-6 \\ 1-(-2)-2\cdot 3=3 \\ 2\cdot 1+(-2)+2\cdot 3=6 \end{cases} \to \text{Se cumplen las tres ecuaciones.}$$

b) La matriz ampliada, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & a_{33} & 6 \end{array}\right)=M$, tiene rango 3, independientemente del valor que tome a_{33}, pues $|M_1|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}\neq 0$, $|M_1|=-45$. Por tanto, para que el sistema sea incompatible habría que imponer que el rango de la matriz de coeficientes fuese 2, lo que implica que,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3-6-3a_{33} = 0 \Rightarrow a_{33} = -3.$$

<u>**12**. Comunidad Valenciana, junio 18</u>

Problema B.1. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2+2A=3I$, donde I es la matriz identidad. Calcular **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de a y b para los cuales $A^{-1}=aA+bI$ (3 puntos).

b) Los valores de α y β para los cuales $A^4=\alpha A+\beta I$ (4 puntos).

c) El determinante de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es 2 (3 puntos).

<u>Solución</u>:

a) De $A^2+2A=3I \Rightarrow A(A+2I)=3I \Rightarrow A\cdot\frac{1}{3}(A+2I)=I \rightarrow$ (por la definición de matriz inversa) $\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{3}(A+2I)=\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}I$. En consecuencia: $\alpha=\frac{1}{3}$ y $\beta=\frac{2}{3}$.

b) De $A^2+2A=3I \Rightarrow A^2=3I-2A \Rightarrow$

$$A^4=(3I-2A)(3I-2A) = 9I^2-6A-6A+4A^2=9I-12A+4(3I-2A) \Rightarrow$$

$$A^4=9I-12A+12I-8A=21I-20A \rightarrow \alpha = 21;\ \beta = 20.$$

c) Para una matriz M, cuadrada de orden n y no singular, se cumple:

1) $|M^k|=(|M|)^k$; 2) $(|M|)^{-1}=\frac{1}{|M|}$; 3) $|pM|=p^n|M|$; 4) $|M\cdot N|=|M|\cdot|N|$.

Luego, si B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante vale 2:

$$|2B^{-1}|=2^3|B|^{-1}=2^3\cdot\frac{1}{2}=4.$$

<u>**13**. Comunidad Valenciana, julio 18</u>

Problema B.1

Resolver los siguientes apartados, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Dadas A y B, matrices cuadradas del mismo orden tales que $AB = A$ y $BA = B$, deducir que $A^2=A$ y $B^2=B$ (4 puntos).

b) Dada la matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, se pide encontrar los parámetros a, b para que la matriz $B=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ cumpla que $B^2=B$ pero $AB\neq A$ y $BA\neq B$ (2 puntos).

c) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix}=3$, obtener razonadamente el valor de los determinantes

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$ (4 puntos).

Solución:

a) Si $AB = A$ y $BA = B$, entonces, aplicando la propiedad asociativa del producto de matrices:

$$A^2 = A\cdot A = (AB)\cdot A = A\cdot(BA) = A\cdot B = A.$$

$$B^2 = B\cdot B = (BA)\cdot B = B\cdot(AB) = B\cdot A = B.$$

b) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}$, para que se cumpla que $B^2 = B$ pero $AB \neq A$ y $BA \neq B$.

$$B^2 = B \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ a+b=1 \\ b^2 = b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0; a = 1 \\ b = 1; b = 0 \end{cases}$$

- Para $a = 0$ y $b = 1$: $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;
- Para $a = 1$ y $b = 0$: $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Para $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Esta solución cumple los requisitos exigidos.

Para $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \to AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$. No cumple lo exigido.

c) Si $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$, aplicando las propiedades de los determinantes:

$$2\cdot\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 = 6;$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 + 0 = 3.$$

El segundo determinante vale 0 pues la primera columna es la suma de las otras dos.

14. Galicia, septiembre 18

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) ¿Qué relación existe entre su inversa A^{-1} y su traspuesta A^t?

b) Estudia, según los valores de λ, el rango de $A-\lambda\cdot I$, siendo *I* la matriz identidad de orden 3. Calcula las matrices *X* que verifican:

$$A\cdot X+X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) La inversa de la matriz *A* es $A^{-1}=\dfrac{\left(Adj\left(A\right)\right)^t}{|A|}$.

Como $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=-1;\ Adj\left(A\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$A^{-1}=\left(\frac{1}{-1}\right)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \text{Se observa que } A^{-1}=A^t.$$

Nota: Podría indicarse que la matriz dada esa ortogonal.

b) $A-\lambda I=\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \to |A-\lambda I|=\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3-1.$

Como $-\lambda^3-1=0$ para $\lambda=-1$ y $-\lambda^3-1\neq 0$ cuando $\lambda\neq -1$, se concluye que:

- Rango de $A-\lambda\cdot I$ = 2 si $\lambda=-1$.
- Rango de $A-\lambda\cdot I$ = 3 si $\lambda\neq -1$.

En el caso de $\lambda=-1$ se tiene la ecuación dada: $A\cdot X+X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(A-(-1)\cdot I\right)X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esa ecuación da lugar a un sistema lineal homogéneo, que siempre tiene solución (la matriz *X* debe ser de dimensión 3×1 para poder operar).
Como el rango de la matriz de coeficientes $A+I$ es 2, el sistema será compatible indeterminado.

$$\left(A+I\right)X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ -x+y=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}.$$

15. La Rioja, junio 18

Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} cx+y-2z=6 \\ cx-2y+z=0 \\ -2x+y+cz=-6 \end{cases}.$$

(I) Discuta el sistema anterior para los distintos valores del parámetro c.
(II) Halle la solución o soluciones, si existen, cuando el parámetro c es 1

Solución:

I) Hay que estudiar el rango de las matrices de coeficientes, A, y ampliada, M.

Estas matrices son: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} c & 1 & -2 & 6 \\ c & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & c & -6 \end{array}\right)=M$.

El determinante de A, $|A|=\begin{vmatrix} c & 1 & -2 \\ c & -2 & 1 \\ -2 & 1 & c \end{vmatrix}=c(-2c-1)-\left(c^2+2\right)-2(c-4)=-3c^2-3c+6$.

Este determinante vale 0 si $c=-2$ o 1; y es distinto de 0 si $c\neq-2$ y 1.

Con esto:

- Si $c\neq-2$ y 1 $\Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si $c=-2$ se tendrá: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -2 & 6 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -6 \end{array}\right)=M$.

El rango de A es 2, pues $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}=6\neq0$; pero el rango de M es 3, pues

$|M_1|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 6 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -6 \end{vmatrix}=-36-36=-72\neq0$. En consecuencia, el sistema es incompatible.

- Para $c=1$ se tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right)=M$.

El rango de A es 2, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3\neq0$; y como el rango de M también es 2, ya que

$|M_2|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -6 \end{vmatrix}=0$, el sistema será compatible indeterminado.

II) Para $c=1$ el sistema queda: $\begin{cases} x+y-2z=6 \\ x-2y+z=0 \\ -2x+y+z=-6 \end{cases}$. Como se ha dicho, es compatible indeterminado, equivalente a:

$$\begin{cases} x+y-2z=6 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6+2z \\ x-2y=-z \end{cases} \underset{E2-E1}{\Rightarrow} \begin{cases} x+y=6+2z \\ -3y=-6-3z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+(2+z)=6+2z \\ y=2+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4+z \\ y=2+z \end{cases} \to (z=t) \Rightarrow \begin{cases} x=4+t \\ y=2+t \\ z=t \end{cases}.$$

16. <u>Madrid, junio 18</u>

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+ \quad my \qquad\qquad = \ 1 \\ -2x-\ (m+1)y+ \quad z \ =-1 \\ x+(2m-1)y+(m+2)z=2+2m \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro *m*.

b) (0.5 puntos) Resolver el sistema en el caso *m* = 0.

<u>Solución</u>:

a) Sea *A* la matriz de coeficientes *y M* la matriz ampliada.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 0 & 1 \\ -2 & -(m+1) & 1 & -1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 & 2+2m \end{array}\right)=M$$

Si r(*A*) = r(*M*) = 3 → sistema compatible determinado: solución única.

Si r(*A*) = r(*M*) < 3 → sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.

Si r(*A*) < r(*M*) → sistema incompatible: no tiene solución.

El determinante de *A* vale

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -(m+1) & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{vmatrix}=-(m+1)(m+2)-2m+1-m(-2(m+2)-1) = m^2-1 \to$$ Este determinante vale 0 si *m* = –1 o *m* = 1.

Con esto:

- Si $m \neq -1$ y 1 $\Rightarrow$ r(*A*) = 3 = r(*M*). El sistema será compatible determinado.

- Si *m* = –1 se tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)=M$. (El rango de *A* es 2: $|A_1|=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}\neq 0$).

Como el menor $|M_1|=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2\neq 0 \Rightarrow$ rango de *M* es 3. Sistema incompatible.

- Si *m* = 1 se tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)=M$. (El rango de *A* es 2: $|A_2|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$).

El menor $\left|M_2\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 7 - 7 = 0$ $\Rightarrow$ rango de M también es 2. Sistema compatible indeterminado.

b) Si m = 0 el sistema es compatible determinado. Puede resolverse aplicando transformaciones de Gauss.

$$\begin{cases} x = 1 \\ -2x - y + z = -1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -y + z = 1 \\ -y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3 - E2 \end{matrix} \begin{cases} x = 1 \\ -y + z = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

17. <u>Madrid, junio 18</u>

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Obtener los valores del parámetro m para los que la matriz A admite inversa.
b) (1 punto) Para m = 0, calcular $A \cdot B$ y $A^{-1} \cdot B$.
c) (0.5 puntos) Calcular $B \cdot B^t$ y $B^t \cdot B$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.
<u>Solución</u>:
a) La matriz A es invertible siempre que su determinante sea distinto de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = m(-4-m) - 4 = -m^2 - 4m - 4 = -(m+2)^2 \Rightarrow |A| = 0 \text{ si } m = -2.$$

$\to$ La matriz A admite inversa si $m \neq -2$.

b) Para m = 0:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ con } |A| = -4.$$

Su inversa es $A^{-1} = \dfrac{(Adj(A))^t}{|A|}$, siendo $Adj(A)$ la matriz de los adjuntos de A.

Esta matriz de los adjuntos es: $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Luego:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con esto:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}0&0&2\\-2&4&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix};\ A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}1&-1/2&2\\1/2&0&1\\1/2&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

18. Madrid, julio 18

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}14&0&10\\0&7&5\\3&4&5\alpha\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2\\37/2\\11\end{pmatrix}$, se pide:

a) (1,25 puntos) Discutir el rango de la matriz A, en función de los valores del parámetro α.
b) (0.75 puntos) Para $\alpha = 0$, calcular, si es posible, A^{-1}.
c) (0.5 puntos) Resolver, si es posible, el sistema $AX = B$, en el caso $\alpha = 1$.
Solución:
a) Haciendo el determinante de A:

$$|A|=\begin{vmatrix}14&0&10\\0&7&5\\3&4&5\alpha\end{vmatrix}=490\alpha-490\Rightarrow |A|=0 \text{ si } \alpha=1;\ |A|\neq 0 \text{ si } \alpha\neq 1.$$

Por tanto:
El rango de A vale 3 si $\alpha \neq 1$, y vale 2 si $\alpha = 1$.

b) Para $\alpha = 0$:

$$A=\begin{pmatrix}14&0&10\\0&7&5\\3&4&0\end{pmatrix}, \text{ con } |A|=-490.$$

Su inversa es $A^{-1}=\dfrac{(Adj(A))^t}{|A|}$, siendo $Adj(A)$ la matriz de los adjuntos de A.

Esta matriz de los adjuntos es: $(A_{ij})=\begin{pmatrix}-20&15&-21\\40&30&-56\\-70&-70&98\end{pmatrix}$.

Luego:

$$A^{-1}=-\frac{1}{490}\cdot\begin{pmatrix}-20&40&-70\\15&30&-70\\-21&-56&98\end{pmatrix}.$$

c) Si $\alpha = 1$, las matrices de coeficientes y ampliada del sistema son:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}14&0&10&2\\0&7&5&37/2\\3&4&5&11\end{array}\right)=M \text{ . El sistema es: } \begin{cases}14x+10z=2\\7y+5z=37/2\\3x+4y+5z=11\end{cases}.$$

El rango de A es 2, pues $|A|=0$ pero el menor $\begin{vmatrix}14&0\\0&7\end{vmatrix}\neq 0$.

El rango de M también es 2, pues $\begin{vmatrix} 14 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 37/2 \\ 3 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 0$.

Por tanto, si α = 1 el sistema es compatible indeterminado. Resulta equivalente a:

$$\begin{cases} 14x + 10z = 2 \\ 7y + 5z = 37/2 \end{cases} \to \text{Despejando: } \begin{cases} x = \frac{1}{7} - \frac{5}{7}z \\ y = \frac{37}{14} - \frac{5}{7}z \end{cases} \to (\text{si } z = t) \to \begin{cases} x = \frac{1}{7} - \frac{5}{7}t \\ y = \frac{37}{14} - \frac{5}{7}t \\ z = t \end{cases}.$$

19. Madrid, julio 18

Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza.

En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno.

Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

Solución:

Cada día en Francia cuesta: 20 € de hotel + 20 € de comida + 8 € de viaje = 48 €.

En Alemania: 25 € + 15 € + 8 € = 48 €.

En Suiza: 30 € + 25 € + 8 € = 63 €.

Si el número de días que cada estudiante pasa en Francia, Alemania y Suiza son x, y, z, respectivamente, se debe cumplir que:

$$\begin{cases} x + y + z = 15 \\ 48x + 48y + 63z = 765 \\ x = 2z \end{cases} \to \text{Sustituyendo y por Gauss} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y + 3z = 15 \\ 48x + 159z = 765 \\ x = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2 - 48E1 \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} y + 3z = 15 \\ 15z = 45 \\ x = 2z \end{cases} \Rightarrow z = 3;\ x = 6;\ y = 6.$$

20. Murcia, junio 18

CUESTIÓN A.1: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) [1,5 p.] Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4.

b) [1 p.] ¿Cuál será la expresión general de la potencia A^n para cualquier valor de $n \in \mathbf{N}$?

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$$A^3 = A\cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^4 = A\cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Voy a demostrar que la conjetura $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es cierta aplicando el método de demostración por inducción.

En efecto:

1. Se cumple para $n = 1$.
2. Supuesto cierto para n hay que ver se cumple para $n + 1$:

$$A^{n+1} = A\cdot A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2n+2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2(n+1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la conjetura es cierta.

<u>**21**. País Vasco, junio 18</u>

Ejercicio B5

Si llamamos P a la suma de todos los números pares menores que 1001 y T a la suma de todos los múltiplos de 3 menores que 1001, ¿cuánto vale $P - T$?

<u>Solución</u>:

Se trata de dos progresiones aritméticas:

- Los números pares: 2, 4, 6,…, 1000 $\to$ $a_n = 2n$, P es la suma de los 500 primeros términos $\to$ $P = \dfrac{(2+1000)\cdot 500}{2} = 250500$.
- Los múltiplos de 3: 3, 6, 9,…, 999 $\to$ $b_n = 3n$, T es la suma de los 333 primeros términos $\to$ $T = \dfrac{(3+999)\cdot 333}{2} = 166833$.

Por tanto:

$P - T = 250500 - 166833 = 83667$.

Recuérdese que la suma de los n primeros téminos de una progresión aritmética $\{a_n\}$ viene dada por: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$.

<u>**22**. País Vasco, julio 18</u>

Ejercicio B5

Hallar razonadamente el último dígito del número $P = (2018)^{2018}(3)^{2018}$.

<u>Solución</u>:

$$P=(2018)^{2018}(3)^{2018} \Rightarrow P=(2018\cdot 3)^{2018}=(6054)^{2018}.$$

El último dígito de las sucesivas potencias de 6054 es el mismo que el último dígito de las sucesivas potencias de 4, que son:

$4^1 = \underline{4}$; $4^2 = 1\underline{6}$; $4^3 = (1\underline{6} \cdot 4) = 6\underline{4}$; $4^4 = (6\underline{4} \cdot 4) = 25\underline{6}$…

Puede observarse que las potencias de exponente impar trminan en 4; y las de exponente par terminan en 6.

Por tanto, el último dígito del número $P=(2018)^{2018}(3)^{2018}$ será 6.