ALGUNOS PROBLEMAS DE GEOMETRÍA PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE EBAU–EvAU–PEBAU– O COMO SE LLAME LA SELECTIVIDAD DE 2017

1. Andalucía, junio 17

Ejercicio 4B. Sean los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 2, 1)$ y $\vec{w} = (m, 1, n)$.

(a) [1,25 puntos] Halla *m* y *n* sabiendo que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

(b) [1,25 puntos] Para $n = 1$, halla los valores de *m* para que el tetraedro determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 10 unidades cúbicas

Solución:

a) Si los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes, entonces:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & n \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2n - 1 - 2m = 0 \Rightarrow 2n - 2m = 1.$$

Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u} \Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (m, 1, n) \cdot (1, 0, 1) = 0 \Rightarrow m + n = 0$.

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 2n - 2m = 1 \\ m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow m = -\dfrac{1}{4};\ n = \dfrac{1}{4}$.

b) Del volumen del tetraedro viene dado por $V_T = \dfrac{1}{6}\left|\ [\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}]\ \right|$.

Para $n = 1$ y $V_T = 10$ se tiene:

$$V_T = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6}\left|1 - 2m\right| = 10 \Rightarrow \left|1 - 2m\right| = 60 \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2m = 60 \to m = -\dfrac{59}{2} \\ -1 + 2m = 60 \to m = \dfrac{61}{2} \end{cases}.$$

2. Aragón, junio 17

a) (1 punto) Sea *m* una constante real. Determine la posición relativa de los planos siguientes, según los valores de *m*:

$$\pi : mx - 6y + 2z = 2 \qquad \pi' : \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda + \mu \end{cases}$$

b) (1 punto) Determine el ángulo que forman las rectas:

$$r : \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x - 4y - 2z = 0 \\ x + y + 3z = -1 \end{cases}$$

Solución:

a) La ecuación implícita del plano π' es: $\pi' : \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y - 1 & -1 & 0 \\ z - 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi' : x + 3y - z = 1$.

Los vectores característicos de ambos planos son: $\vec{v}_\pi = (m, -6, 2)$ y $\vec{v}_{\pi'} = (1, 3, -1)$.

Estos vectores son paralelos cuando $m = -2$, pues se tendría $\vec{v}_\pi = (-2, -6, 2) = 2 \cdot \vec{v}_{\pi'}$; luego si $m = -2$ los planos serán paralelos.

En los demás casos, esto es si $m \neq -2$, los planos π y π' se cortarán.

b) El ángulo que forman dos rectas es el que determinan sus correspondientes vectores de dirección.
Las ecuaciones paramétricas de ambas rectas son:

$$r:\begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} z=1-x \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases} \to \vec{v}_r = (1, 0, -1).$$

$$s:\begin{cases} 2x-4y=2z \\ x+y=-1-3z \end{cases} \Rightarrow s: \begin{matrix} E1+4E2 \\ 2E2-E1 \end{matrix}\begin{cases} 6x=-4-10z \\ 6y=-2-8z \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} x=-\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{3}\cdot h \\ y=-\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{3}\cdot h \\ z=h \end{cases} \to \vec{v}_s = (-5, -4, 3).$$

Con esto:

$$\cos(r, s)=\cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s)=\left|\frac{\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s}{|\vec{v}_r|\cdot|\vec{v}_s|}\right| \Rightarrow \cos(r, s) = \frac{(1,\ 0,\ -1)\cdot(-5,\ -4,\ 3)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}}=\frac{-5-3}{\sqrt{100}}=-\frac{4}{5}.$$

El ángulo que forman es: $\alpha=\arccos\dfrac{4}{5}\approx 36{,}87^{\circ}$

<u>**3**. Asturias, junio 17</u>

3. Dadas las rectas $r:\begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases}$ y $s: x+1=\dfrac{y-1}{2}=z$. Calcula:

a) Un vector director de cada recta. (0,75 puntos)
b) El ángulo que forman las rectas. (0,75 puntos)
c) El plano paralelo a las dos rectas y que pasa por el punto $A(1, 2, 1)$. (1 punto)

<u>Solución</u>:

a) Expresando ambas rectas en sus ecuaciones paramétricas, se tiene:

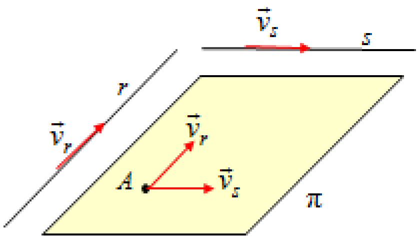
$$r:\begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=-1-2y \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=-1-2t \\ y=\quad t \\ z=1 \end{cases} \to \text{Vector director: } \vec{v}_r = (-2, 1, 0).$$

$$s: x+1=\frac{y-1}{2}=z \Rightarrow r:\begin{cases} x=-1+h \\ y=1+2h \\ z=\quad h \end{cases} \to \text{Vector director: } \vec{v}_s = (1, 2, 1).$$

b) $\cos(r, s)=\cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s)=\left|\dfrac{\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s}{|\vec{v}_r|\cdot|\vec{v}_s|}\right| \Rightarrow \cos(r, s) = \dfrac{(-2,\ 1,\ 0)\cdot(1,\ 2,\ 1)}{\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\dfrac{-2+2}{\sqrt{30}}=\dfrac{0}{\sqrt{30}}=0.$

El ángulo que forman es: $\alpha=\arccos 0=90^{\circ}$. Son rectas perpendiculares,

c) El plano pedido viene determinado por el punto A y por los vectores de dirección de ambas rectas.
Sus ecuaciones paramétricas son:



$$\pi : \begin{cases} x = 1 - 2t + h \\ y = 2 + t + 2h \\ z = 1 \quad\quad + h \end{cases}.$$

4. Asturias, junio 17

3. Dados los puntos $A(1,2,0)$, $B(-1,1,1)$, $C(0,0,1)$, $D(4,1,3)$. Determina:

a) Si los cuatro puntos son coplanarios. (0.75 puntos)

b) La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene los puntos A, B, C. (1 punto)

c) El punto de corte de la recta r con el plano π. (0.75 puntos)

Solución:

a) Los cuatro puntos estarán en el mismo plano si los vectores ***AB***, ***AC*** y ***AD*** son linealmente dependientes.

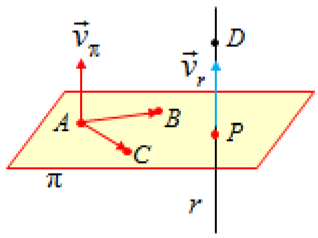
AB = (–1, 1, 1) – (1, 2, 0) = (–2, –1, 1); ***AC*** = (0, 0, 1) – (1, 2, 0) = (–1, –2, 1);
AD = (4, 1, 3) – (1, 2, 0) = (3, –1, 3)

Como $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 10 - 6 + 7 \neq 0$, los cuatro puntos no son coplanarios.

b) El plano que contiene a los puntos *A*, *B* y *C* viene determinado por el punto *A* y por los vectores ***AB*** y ***AC***. Su ecuación es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ y-2 & -1 & -2 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 1 + y - 2 + 3z = 0 \Rightarrow x + y + 3z - 3 = 0$$

El vector director de la recta buscada es $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r$ = (1, 1, 3). Si la recta pasa por *D*(4, 1, 3), su ecuación será: $r : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$.



c) El punto de corte de la recta con el plano se halla sustituyendo las ecuaciones de la recta en la del plano.

$$4 + t + 1 + t + 3(3 + 3t) - 3 = 0 \Rightarrow 11t + 11 = 0 \Rightarrow t = -1$$

El punto de corte es *P*(3, 0, 0).

5. Baleares, septiembre 17

Ejercicio B3.

Dados los puntos *A*(1, 0, 3) y *B*(1, 3, 4), hallar los puntos situados en el plano *z* = 1 que formen con los puntos *A* y *B* un triángulo equilátero. (6 puntos) Hallar el volumen del tetraedro formado por los 3 puntos anteriores y el origen de coordenadas. (4 puntos)

Solución:

La distancia entre los puntos *A* y *B* es: $d(A,B) = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

Los puntos del plano *z* = 1 son de la forma $P(x, y, 1)$.

Si se quiere que el triángulo *ABP* sea equilátero hay que exigir que:

$$d(A,P) = d(B,P) = d(A,B) = \sqrt{10}.$$

$$d(A,P)=\sqrt{(x-1)^2+y^2+2^2}=\sqrt{10}\Rightarrow (x-1)^2+y^2+2^2=10 \Rightarrow x^2-2x+y^2=5 \quad [1]$$

$$d(B,P)=\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2+3^2}=\sqrt{10}\Rightarrow (x-1)^2+(y-3)^2+3^2=10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2x+y^2-6y=-9 \quad [2].$$

Sustituyendo [1] en [2] se tiene: $5-6y=-9 \Rightarrow y=\frac{7}{3}$.

Volviendo a [1] → $x^2-2x+\left(\frac{7}{3}\right)^2=5 \Rightarrow 9x^2-18x+4=0 \Rightarrow x=1$. (La solución es única)

Por tanto, el punto pedido es $P(1, 7/3, 1)$.

El volumen del tetraedro determinado por los puntos A, B, P y O es:

$$V_T=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 7/3 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|3-\frac{28}{3}+7-9\right|=\frac{25}{18}\ \text{u}^3.$$

6. Cantabria, junio 17 (EXAMEN Nº 1)

Ejercicio 3

Sea P el punto (0, 2, 2). Sea r la recta expresada de forma continua:

$$r:\frac{x-2}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$$

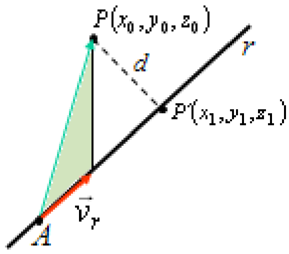
1) [0,75 PUNTOS] Escriba las ecuaciones paramétricas de la recta r.
2) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia de P a r.
3) [1 PUNTO] Calcule un plano perpendicular a r que pase por el punto P.

Solución:

1) Haciendo $r:\frac{x-2}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}=t$ y despejando cada una de las coordenadas se obtienen sus ecuaciones paramétricas, que son: $r:\begin{cases}x=2+4t\\ y=\quad\ \ t\\ z=-1+2t\end{cases}$.

2) La ecuación de la distancia de un punto P a una recta r es:

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|},\ \text{siendo } A\in r.$$



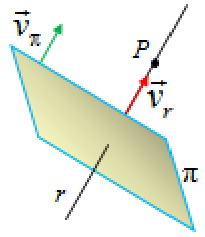
En este caso:

$A=(2, 0, -1)$, $P=(0, 2, 2)$, $\overrightarrow{AP}=(-2, 2, 3)$, $\vec{v}_r=(4, 1, 2)$.

$$\overrightarrow{AP}\times\vec{v}_r=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ -2 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}=(1,\ 16,\ -10)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}_r\right|=\sqrt{1^2+16^2+(-10)^2}=\sqrt{357}.$$

El módulo de $\vec{v}_r$: $\left|\vec{v}_r\right|=\sqrt{4^2+1^2+2^2}=\sqrt{21}$.

Luego $d(P,r)=\frac{\sqrt{357}}{\sqrt{21}}=\sqrt{17}$.



3) El vector normal del plano pedido es $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r$ = (4, 1, 2). Si contiene al punto P(0, 2, 2), su ecuación será:

$$\pi: 4x + (y-2) + 2(z-2) = 0 \Leftrightarrow \pi: 4x + y + 2z - 6 = 0.$$

<u>7. Cantabria, junio 17 (EXAMEN Nº 2)</u>

Ejercicio 3

Sean A = (–2, 1, 0), B = (1, 1, 1), C = (2, 0, 2) tres puntos de $\mathbf{R}^3$.
1) [1 PUNTO] Calcule la ecuación implícita (general) del plano que pasa por A, B y C.
2) [1 PUNTO] Calcule la ecuación continua de la recta BC.
3) [1 PUNTO] Calcule el área del triángulo definido por ABC.
4) [0,25 PUNTOS] Determine, usando el producto escalar, si los vectores $\vec{u}$ = (3, 0, 1) y $\vec{v}$ = (4, –1, 2) son ortogonales.

<u>Solución</u>:

1) El plano pedido viene determinado por el punto A y por los vectores ***AB*** y ***BC***.
AB = (1, 1, 1) – (–2, 1, 0) = (3, 0, 1); ***BC*** = (2, 0, 2) – (1, 1, 1) = (1, –1, 1)

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 3 & 1 \\ y-1 & 0 & -1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 2 - (y-1)\cdot 2 + z\cdot(-3) = 0 \Rightarrow x - 2y - 3z + 4 = 0$$

2) La recta BC viene determinada por el punto B y por el vector ***BC***. Su ecuación continua es:

$$r_{BC}: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

3) El área del triángulo viene dada por $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right|$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -2, -3) \to \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{14}.$$

4) Como $\vec{u} \cdot \vec{v}$ = (3, 0, 1) · (4, –1, 2) = 12 + 2 =14 estos vectores no son ortogonales.

<u>8. Castilla La Mancha, junio 17</u>

4A. Dado el punto P(2, 0, –1) y las rectas

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 4 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s. (1,5 puntos)
b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por P es paralelo a r y a s. (1 punto)

<u>Solución</u>:

Estudiando la dependencia lineal de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y ***RS***, siendo $R \in r$ y $S \in s$, se determina la posición relativa de ambas rectas: si esos vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan; si son linealmente dependientes, están en el mismo plano.

Se expresa s en forma paramétrica:

$$s \equiv \begin{cases} x - y + 2z + 4 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} y = x + 2z + 4 \\ x = -1 - z \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} y = 3 + z \\ x = -1 - z \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases}.$$

Luego:

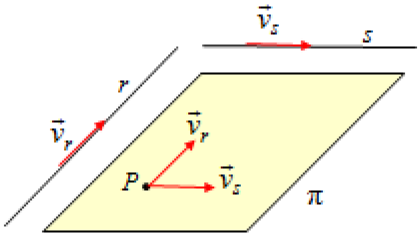
$\vec{v}_r$ = (–1, 2, 0), $\vec{v}_s$ = (–1, 1, 1) y ***RS*** = (–1, 3, 0) – (2, –1, 0) = (–3, 4, 0)

Como $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas *r* y *s* se cruzan.

b) El plano pedido viene determinado por el punto *P*(2, 0, –1) y por los vectores de dirección de ambas rectas.
Sus ecuaciones paramétricas son:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2 - t - h \\ y = \quad 2t + h \\ z = -1 \quad + h \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ y & 2 & 1 \\ z+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 2(x-2) + y + z + 1 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0$$



9. Castilla La Mancha, junio 17

4B. a) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta, en su forma general o implícita, que contiene a los puntos *P*(0, 1, –2) y *Q*(4, –3, 0). (1 punto)
b) Encuentra razonadamente un punto que equidiste de *P* y *Q* y que pertenezca a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbf{R}. \quad \text{(1,5 puntos)}$$

Solución:

a) Su vector director es ***PQ*** = (4, –3, 0) – (0, 1, –2) = (4, –4, 2).

Su ecuación en forma continua es: $s \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+2}{2}$ → (Multiplicando en cruz…)

$$s \equiv \begin{cases} -4x = 4(y-1) \\ 2x = 4(z+2) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

b) Sea $R = (2+\lambda, -\lambda, -5)$ un punto genérico de la recta *r*. Se desea que:

$$d(P,R) = d(Q,R) \Rightarrow \sqrt{(2+\lambda)^2 + (1+\lambda)^2 + (-2+5)^2} = \sqrt{(2-\lambda)^2 + (-3+\lambda)^2 + (5)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2+\lambda)^2 + (1+\lambda)^2 + (-2+5)^2 = (2-\lambda)^2 + (-3+\lambda)^2 + (5)^2 \Rightarrow 16\lambda = 24 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}.$$

El punto buscado es $R\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, -5\right)$.

10. Castilla y León, junio 17
Determinar la recta r que es paralela al plano $\pi \equiv x - y - z = 0$ y que corta perpendicularmente a la recta $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-4}$ en el punto P(2, –1, –2). (2,25 puntos)

Solución:
1) La recta r debe estar contenida en un plano π' paralelo a π. Por tanto, su vector director, $\vec{v}_r$, debe ser normal a $\vec{v}_\pi$ = (1, –1, –1).
2) Su vector director , $\vec{v}_r$, también debe ser perpendicular a $\vec{v}_s$ = (1, 2, –4).
Por tanto:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_\pi \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (6,\ 3,\ 3) \to \vec{v}_r = (2, 1, 1)$$

Como tiene que pasar por el punto P(2, –1, –2), las ecuaciones paramétricas de r son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$$

11. Castilla y León, junio 17
E2. Dado el plano $\pi \equiv 3x + y + z - 2 = 0$ y los puntos P(0, 1, 1), Q(2, –1, –3) que pertenecen al plano π, determinar la recta del plano que pasa por el punto medio entre P y Q y es perpendicular a la recta que une estos puntos. (2,25 puntos)

Solución:
(Este problema es parecido al anterior).
La recta pedida debe pasar por el punto medio, M, y su vector de dirección ser normal a $\vec{v}_\pi$ y a ***PQ***.
Los puntos dados son del plano: verifican su ecuación.
Punto medio entre P y Q: $M = \left(\frac{0+2}{2},\ \frac{1-1}{2},\ \frac{1-3}{2}\right)$ = (1, 0, –1).

Vectores:
PQ = (2, –1, –3) – (0, 1, 1) = (2, –2, –4); $\vec{v}_\pi$ = (3, 1, 1).

$$\vec{v}_r = \vec{v}_\pi \times \mathbf{PQ} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2,\ -14,\ 8) \to \vec{v}_r = (1, -7, 4)$$

Ecuación de la recta: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -7\lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases}$.

<u>12. Cataluña, junio 17</u>

2. Considereu els plans π_1: $5x - y - 7z = 1$ i π_2: $2x + 3y + z = 5$.

a) Determineu l'equació general (és a dir, la que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla que passa per l'origen de coordenades i és perpendicular als plans π_1 i π_2.

[1 punt]

b) Calculeu l'angle que formen els plans π_1 i π_2.

[1 punt]

<u>Solución</u>:

a) El vector característico (normal), $\vec{v}_\pi$, del plano $\pi \equiv Ax + By + Cz = D$ debe ser perpendicular común a los vectores característicos $\vec{v}_{\pi 1}$ = (5, –1, –7) y $\vec{v}_{\pi 2}$ = (2, 3, 1) de los planos dados. Además, si pasa por el origen de coordenadas, D = 0.

Por tanto:

$$\vec{v}_\pi = \vec{v}_{\pi 1} \times \vec{v}_{\pi 2} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 5 & -1 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (20, \ -19, \ 17).$$

Su ecuación será: $\pi \equiv 20x - 19y + 17z = 0$.

b) El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 es el que forman sus vectores característicos.

$$\cos(\vec{v}_{\pi 1}, \vec{v}_{\pi 2}) = \frac{(5, \ -1, \ -7)\cdot(2, \ 3, \ 1)}{\sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-7)^2}\cdot\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{10 - 3 - 7}{\sqrt{75}\cdot\sqrt{14}} = 0 \Rightarrow \text{ángulo } (\pi_1, \pi_2) = 90^\text{o}$$

Son planos perpendiculares.

<u>13. Comunidad Valenciana, junio 17</u>

Problema A.2. Se dan el punto P = (1, 1, 1), la recta $r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ y el plano π: $x + y + z = 1$. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado,** las ecuaciones de:

a) El plano que contiene al punto P y a la recta r. (2 *puntos*)

b) La recta s que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π, la distancia del punto P al plano π y el punto de intersección de la recta s con el plano π. (2+2+2 *puntos*)

c) El plano σ que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π. (2 *puntos*)

<u>Solución</u>:

a) Se expresa r en forma paramétrica.

$$r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x + y = -1 + z \\ x + 2y = 1 + z \end{cases} \Rightarrow r: \underset{E2 - E1}{} \begin{cases} x + y = -1 + z \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -3 + z \\ y = 2 \end{cases}.$$

Haciendo $z = t$ se tiene: $r: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$.

Su vector de dirección es $\vec{v}_r$ = (1, 0, 1); el punto A = (–3, 2, 0) $\in r$.

El plano pedido debe contener al vector AP = (1, 1, 1) – (–3, 2, 0) = (4, –1, 1).

Su ecuación será:

$$\pi_{rP}:\begin{cases} x=-3+t+4h \\ y=2-h \\ z=t+h \end{cases} \Rightarrow \pi_{rP}:\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 4 \\ y-2 & 0 & -1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\pi_{rP}: x+3+3(y-2)-z=0 \Rightarrow x+3y-z-3=0.$$

b) Si la recta s es perpendicular al plano $\pi: x+y+z=1 \Rightarrow \vec{v}_s=\vec{v}_\pi$ = (1, 1, 1).

Como debe contener al punto P = (1, 1, 1), su ecuación será: $s:\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$.

Sustituyendo en la ecuación del plano π las ecuaciones de s se obtiene el punto de corte:

$$1+t+1+t+1+t=1 \Rightarrow t=-\frac{2}{3}$$

El punto de corte es $Q=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

La distancia del punto al plano puede calcularse de dos maneras.

1) $d(P,\pi)=\left|\frac{1+1+1-1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right|=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

2) $d(P,\pi)=d(P,Q)=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{12}{3^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

c) El plano σ queda determinado por la recta r y el vector $\vec{v}_\pi$ = (1, 1, 1).

Su ecuación será:

$$\sigma:\begin{cases} x=-3+t+h \\ y=2+h \\ z=t+h \end{cases} \Rightarrow \sigma:\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 1 \\ y-2 & 0 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\sigma: -(x+3)+0(y-2)+z=0 \Rightarrow x-z+3=0.$$

14. Comunidad Valenciana, junio 17

Problema B.2. Sea T un tetraedro de vértices O = (0, 0, 0), A = (1, 1, 1), B = (3, 0, 0) y C = (0, 3, 0).

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C, (1 *punto*), y las ecuaciones de la recta h_O perpendicular a π que pasa por O. (2 *puntos*)

b) El punto de intersección de la altura h_O y el plano π. (3 *puntos*)

c) El área de la cara cuyos vértices son los puntos A, B y C, (2 *puntos*), y el volumen del tetraedro T. (2 *puntos*)

Solución:

a) El plano π queda determinado el punto A(1, 1, 1) y por los vectores:

AB = (3, 0, 0) – (1, 1, 1) = (2, –1, –1) y ***AC*** = (0, 3, 0) – (1, 1, 1) = (–1, 2, –1)

Su ecuación es:

$$\pi:\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -1 \\ y-1 & -1 & 2 \\ z-1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi:3(x-1)+3(y-1)+3(z-1)=0 \Rightarrow \pi: x+y+z-3=0.$$

Si la recta h_O es perpendicular al plano $\pi: x+y+z-3=0 \Rightarrow \vec{v}_{ho}=\vec{v}_\pi$ = (1, 1, 1).

Como pasa por el origen, su ecuación será: $r_{ho}:\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$.

b) Sustituyendo en la ecuación del plano π las ecuaciones de r_{ho} se obtiene el punto de intersección:

$t+t+t-3=0 \Rightarrow t=1 \rightarrow$ El punto de corte es D = (1, 1, 1).

c) El área del triángulo de vértices A, B y C viene dada por $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

Como:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=(3,\ 3,\ 3) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{9+9+9}=3\sqrt{3}$$

Luego, la superficie del triángulo será: $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ u^2.

El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan. En este caso, los vectores: ***OA***, ***OB*** y ***OC***.

Como ***OA*** = (1, 1, 1), ***OB*** = (3, 0, 0) y ***OC*** = (0, 3, 0), el volumen es:

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot 9=\frac{3}{2}\ \text{u}^3$$

15. Extremadura, junio 17

En $\mathbf{R}^3$ se consideran las rectas de ecuaciones:

$$r:\begin{cases} 3x+2y=0 \\ x-2z=-8 \end{cases},\qquad s:\frac{x+1}{-2}=\frac{y-3}{a}=\frac{z-1}{-1}.$$

a) Halle el valor de a para que r y s sean paralelas. (1 punto)

b) Para el valor de a obtenido en el anterior apartado, calcule la distancia entre las rectas r y s. (1,5 puntos)

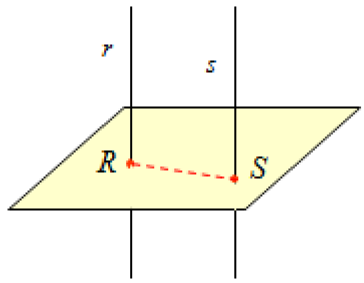
Solución:

a) Ecuaciones paramétricas de ambas rectas.

$$r:\begin{cases} 3x+2y=0 \\ x-2z=-8 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=-8+2t \\ y=12-3t \\ z=t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r=(2, -3, 1);\qquad s:\begin{cases} x=-1-2h \\ y=3+ah \\ z=1-h \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s=(-2, a, -1)$$

Los vectores $\vec{v}_r$ = (2, –3, 1) y $\vec{v}_s$ = (–2, a, –1) son paralelos cuando a = 3, en ese caso $\vec{v}_r=-\vec{v}_s$.

b) Un plano perpendicular a ambas rectas es $\pi: 2x - 3y + z = 0$
(Su vector característico coincide con $\vec{v}_s$).
Los puntos de corte de ese plano con cada una de las rectas son:



$\pi \cap r$: $2(-8+2t) - 3(12-3t) + t = 0 \Rightarrow t = \frac{26}{7} \Rightarrow$

$R\left(-\frac{4}{7}, \frac{6}{7}, \frac{26}{7}\right)$

$\pi \cap s$: $2(-1-2h) - 3(3+3h) + 1 - h = 0 \Rightarrow h = -\frac{5}{7}$; $S\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{12}{7}\right)$.

Con esto, $d(r,s) = d(R,S) = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

16. Islas Canarias, junio 17

Dados los planos: $\pi_1: x - y + 3 = 0$; $\pi_2: 2x + y - z = 0$, determinar:

a) La ecuación de la recta perpendicular a π_1 que pasa por el punto $P(2, 2, 1)$. (1 punto)

b) La ecuación del plano perpendicular a la recta que determinan π_1 y π_2 que contiene al punto $A(1, 1, -1)$. (1,5 puntos)

Solución:

a) Si la recta r es perpendicular al plano $\pi_1: x - y + 3 = 0 \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_{\pi 1} = (1, -1, 0)$.

Como debe contener al punto P (2, 2, 1), su ecuación será: $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 \end{cases}$.

b) La recta que determinan los planos π_1 y π_2 es $s: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$.

Haciendo $x = t$ y despejando y y z se tiene: $s: \begin{cases} x = t \\ y = 3 + t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$.

Si el plano π es perpendicular a $s \Rightarrow \vec{v}_s = \vec{v}_\pi = (1, 1, 3)$. Como se desea que contenga al punto $A(1, 1, -1)$, su ecuación será:

$$\pi: 1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) + 3 \cdot (z+1) = 0 \Rightarrow \pi: x + y + 3z + 1 = 0$$

17. Islas Canarias, junio 17

4. Dado el plano $\pi: 5x + ay + 4z - 5 = 0$ y la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-2}{-4}$, se pide:

a) Calcular el valor del parámetro a para que la recta r sea paralela al plano π. (1,25 puntos)

b) Para $a = 0$, calcular el ángulo que forman el plano π y la recta r. (1,25 puntos)

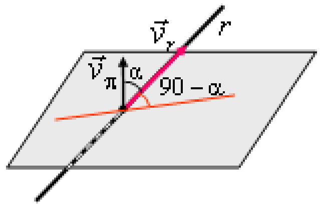
Solución:

a) La recta y el plano serán paralelos cuando el vector de dirección de la recta, $\vec{v}_r = (2, 6, -4)$, sea perpendicular al vector característico del plano, $\vec{v}_\pi = (5, a, 4) \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = 0$.

$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = (2, 6, -4) \cdot (5, a, 4) = 10 + 6a - 16 = 0 \Rightarrow a = 1$.

b) Para $a = 0$, $\vec{v}_\pi = (5, 0, 4)$.

El ángulo que forma una recta con un plano es el complementario del que determinan los vectores $\vec{v}_r$, de dirección de la recta, con $\vec{v}_\pi$, normal al plano.



Por tanto, el seno del ángulo (r, π),

$$\text{sen}\,(r, \pi) = \cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|} = \frac{(5,\ 0,\ 4)\cdot(2,\ 6,\ -4)}{\sqrt{5^2+4^2}\cdot\sqrt{2^2+6^2+(-4)^2}} =$$

$$= \frac{10-16}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{56}} \approx -0{,}1252 \Rightarrow \alpha = 97{,}2^\circ \Rightarrow \text{ángulo } (r, \pi) = 7{,}2^\circ.$$

18. La Rioja, junio 17

2.- (3 puntos) Dados los vectores $\vec{u} = (2, -3, 5)$, $\vec{v} = (1, 2, -2)$, $\vec{w} = (2k, -1, k)$.
i) Calcula el valor de k para que los vectores sean linealmente independientes.
ii) Comprueba que para $k = 2$ los vectores forman una base del espacio euclídeo tridimensional.
iii) Halla las coordenadas del vector $\vec{a} = (15, -11, 18)$ respecto de la base del apartado anterior.

Solución:

i) Hay que exigir que $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2k & -1 & k \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 2(2k-2)+3(k+4k)+5(-1-4k) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -9-k \neq 0 \Rightarrow k \neq -9$. (Para $k = 9$ los vectores serán linealmente dependientes).

ii) Para $k = 2$ los vectores son: $\vec{u} = (2, -3, 5)$, $\vec{v} = (1, 2, -2)$, $\vec{w} = (4, -1, 2)$. En ese caso, el determinante anterior vale -11; luego los vectores son linealmente independientes. Y, por tanto, forman base de $\mathbf{R}^3$.

iii) Hay que resolver la ecuación $\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$, que da lugar al sistema:

$$\begin{cases} 2x+y+4z=15 \\ -3x+2y-z=-11 \\ 5x-2y+2z=18 \end{cases} \rightarrow \text{El determinante de la matriz de coeficientes vale } |A| = -11.$$

Puede resolverse por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 1 & 4 \\ -11 & 2 & -1 \\ 18 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-22}{-11} = 2;\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 15 & 4 \\ -3 & -11 & -1 \\ 5 & 18 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{11}{-11} = -1;\ z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 15 \\ -3 & 2 & -11 \\ 5 & -2 & 18 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-33}{-11} = 3$$

19. Madrid, junio 17

Ejercicio 2: **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dados los puntos $P(1, -2, 1)$, $Q(-4, 0, 1)$, $R(-3, 1, 2)$, $S(0, -3, 0)$, se pide:
a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.
b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de la recta r, que pasa por los puntos P y Q, y la recta s, que pasa por R y S.
c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.

Solución:
a) El plano plano que contiene a P, Q y R viene dado por el punto $P(1, –2, 1)$ y por los vectores:

PQ = (–4, 0, 1) – (1, –2, 1) = (–5, 2, 0) y **PR** = (–3, 1, 2) – (1, –2, 1) = (–4, 3, 1) →

$$\pi:\begin{vmatrix} x-1 & -5 & -4 \\ y+2 & 2 & 3 \\ z-1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi: 2(x-1)+5(y+2)-7(z-1)=0 \Rightarrow \pi: 2x+5y-7z+15=0.$$

b) La recta r está determinada por P y **PQ**. Su ecuación es $r:\begin{cases} x=1-5\lambda \\ y=-2+2\lambda \\ z=1 \end{cases}$.

La recta s está determinada por R y **SR** = (–3, 1, 2) – (0, –3, 0) = (–3, 4, 2) → $s:\begin{cases} x=-3-3t \\ y=1+4t \\ z=2+2t \end{cases}$.

Puede observarse que las rectas no son paralelas, pues $\vec{v}_r$ = (–5, 2, 0) y $\vec{v}_s$ = (–3, 4, 2) son independientes (no paralelos).

Para ver si se cruzan o se cortan hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores **PQ** = $\vec{v}_r$, **SR** = $\vec{v}_s$ y **PR** = (–4, 3, 1).

Como $\begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}=10-10=0 \Rightarrow$ los vectores son linealmente dependientes: las rectas se cortan.

c) El área del triángulo de vértices P, Q y R viene dada por $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|$.

Como:

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}=(2,\ 5,\ -7) \Rightarrow \left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|=\sqrt{4+25+49}=\sqrt{78}.$$

Luego, la superficie del triángulo será: $S=\frac{\sqrt{78}}{2}$ u^2.

20. Murcia, junio 17

CUESTIÓN B.2:

Los vértices de un triángulo ABC son $A = (-a, 1, 1)$, $B = (2, -1, 2)$, $C = (1, -2a, 3)$.
a) [1,5 puntos] ¿Cuánto ha de valer a para que el triángulo sea rectángulo en B?
b) [1 punto] Calcule el área del triángulo ABC para el caso $a = -1$.

Solución:
a) El triángulo de vértices ABC será rectángulo en B cuando los vectores **AB** y **BC** sean perpendiculares. Para ello, su producto escalar debe ser 0.

Los vectores son:

AB = (2, −1, 2) – (−a, 1, 1) = (2 + a, –2, 1); **BC** = (1, −2a, 3) – (2, −1, 2) = (–1, –2a + 1, 1)

AB · **BC** = (2 + a, –2, 1) · (–1, –2a + 1, 1) = $-2-a+4a-2+1=3a-3=0 \Rightarrow a = 1$.

a) El área del triángulo de vértices A, B y C viene dada por $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right|$.

En este caso, para $a = -1$:

AB = (1, –2, 1); **BC** = (–1, 3, 1)

Luego:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 1 & -2 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}=(-8,\ -3,\ 1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{64+9+1}=\sqrt{74}.$$

Por tanto, la superficie del triángulo será: $S=\frac{\sqrt{74}}{2}$ u^2.

<u>**21**. Navarra, junio 17</u>

A2) Dados el punto $P\equiv(1,-1,0)$ y las rectas $r\equiv\begin{cases}2x-y-2z+1=0\\3x-y-4z+6=0\end{cases}$ y $s\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{1}$

halla la ecuación general del plano π que sea paralelo a ambas rectas y tal que la distancia de P a π sea 2.

<u>Solución</u>:

El vector de dirección de la recta r se obtiene multiplicando vectorialmente los vectores normales de los planos que la determinan: $\vec{v}_r=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 2 & -1 & -2\\ 3 & -1 & -4\end{vmatrix}=(2,\ 2,\ 1)$.

En vector de dirección de s es: $\vec{v}_s$ = (1, 0, 1).

Un plano paralelo a ambas rectas bien dado por $\begin{vmatrix}x & 2 & 1\\ y & 2 & 0\\ z & 1 & 1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2x-y-2z=0$.

El plano hallado pasa por el origen; todos los paralelos a él, entre los que está el buscado, son de la forma $\pi\equiv 2x-y-2z+d=0$.

Como se desea que $d(P,\pi)=2$, entonces:

$$d(P,\pi)=\left|\frac{2\cdot1-1\cdot(-1)-2\cdot0+d}{\sqrt{4+1+4}}\right|=2 \Rightarrow \left|\frac{3+d}{3}\right|=2\Rightarrow\begin{cases}d=3\\d=-9\end{cases}.$$

Por tanto hay dos planos que cumple la condición exigida:

$\pi_1\equiv 2x-y-2z+3=0$ y $\pi_2\equiv 2x-y-2z-9=0$

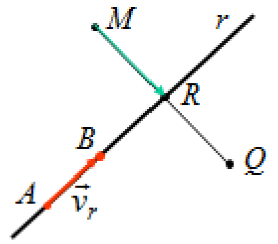
<u>**22**. País Vasco, junio 17</u>

Dado el punto M(1, –3, 7), obtener su simétrico respecto a la recta que pasa por los puntos A(1, –3, 4) y B(0, –4, 1).

<u>Solución</u>:

Si Q es el simétrico de M respecto de una recta, se cumplen dos cosas:

- Su punto medio, R, debe ser de la recta.
- El vector ***MR*** debe ser perpendicular al vector $\vec{v}_r$ de dirección de la recta. Esto es, debe cumplirse que $\vec{v}_r$ · ***PR*** = 0.



La ecuación de la recta que pasa por A y B es:

$$r:\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + t \\ z = 4 + 3t \end{cases} \to \vec{v}_r = (1, -3, 4) - (0, -4, 1) = (1, 1, 3).$$

Sea R un punto genérico de la recta: $R = (1 + t, -3 + t, 4 + 3t)$.
Por tanto:

$\boldsymbol{MR} = (1 + t, -3 + t, 4 + 3t) - (1, -3, 7) = (t, t, 3t - 3)$

- $\vec{v}_r \cdot \boldsymbol{MR} = 0 \Rightarrow (1, 1, 3) \cdot (t, t, 3t - 3) = t + t + 9t - 9 = 0 \Rightarrow 11t = 9 \Rightarrow t = \dfrac{9}{11}$.

Luego, $R = \left(\dfrac{20}{11}, \dfrac{-24}{11}, \dfrac{71}{11}\right)$.

- Si $Q = (a, b, c)$, el punto medio entre M y Q es: $R = \left(\dfrac{a+1}{2}, \dfrac{b-3}{2}, \dfrac{c+7}{2}\right)$.

Igualando las coordenadas de *ambos* R se tiene:

$$\frac{a+1}{2} = \frac{20}{11} \Rightarrow a = \frac{29}{11}; \quad \frac{b-3}{2} = -\frac{24}{11} \Rightarrow b = -\frac{15}{11}; \quad \frac{c+7}{2} = \frac{71}{11} \Rightarrow c = \frac{65}{11}.$$

Por tanto, el punto el punto simétrico de M respecto de r es: $Q = \left(\dfrac{29}{11}, \dfrac{-15}{11}, \dfrac{65}{11}\right)$.