ALGUNOS PROBLEMAS DE GEOMETRÍA PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE SELECTIVIDAD DE 2016

1. Aragón, junio 16

2. (2 puntos) a) (1 punto)

a.1) (0,5 puntos) Si los vectores $\vec{w}$ y $\vec{s}$ verifican que $|\vec{w}| = |\vec{s}| = 2$, y el ángulo que forman $\vec{w}$ y $\vec{s}$ es 60 grados, determine: $\vec{w}\cdot(\vec{w}-\vec{s})$

a.2) (0,5 puntos) Si el producto escalar del vector $\vec{u}+\vec{v}$ por sí mismo es 25 y el producto escalar de $\vec{u}-\vec{v}$ por sí mismo es 9. ¿Cuánto vale el producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$?

b) (1 punto) Determine el ángulo que forman las rectas siguientes:

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2} \qquad s: \begin{cases} x-y-z=1 \\ x-y+2z=3 \end{cases}$$

Solución:

a) La expresión del producto escalar de los vectores $\vec{u}$ por $\vec{v}$ es:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right).$$

a.1) Como $\vec{w}\cdot(\vec{w}-\vec{s}) = \vec{w}\cdot\vec{w} - \vec{w}\cdot\vec{s} \Rightarrow \vec{w}\cdot(\vec{w}-\vec{s}) = 4 - 4\cos 60^{\circ} = 4 - 4\cdot\frac{1}{2} = 2$.

a.2) Si $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = 25 \Rightarrow |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}| = 25$;

si $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = 9 \Rightarrow |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}|\cdot|\vec{v}| = 9$.

Restando ambas expresiones:

$$4|\vec{u}|\cdot|\vec{v}| = 16 \Rightarrow |\vec{u}|\cdot|\vec{v}| = 4$$

b) El ángulo que forman dos rectas es el que determinan sus vectores de dirección correspondientes.

Se expresa *s* en paramétricas:

$$s: \begin{cases} x-y-z=1 \\ x-y+2z=3 \end{cases} \Rightarrow s: \underset{E2-E1}{} \begin{cases} x-y-z=1 \\ 3z=2 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1+y+z \\ y = t \\ z = 2/3 \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 5/3 + t \\ y = t \\ z = 2/3 \end{cases}$$

Los vectores de dirección de las rectas son:

$\vec{v}_r = (3, 2, 2)$; $\vec{v}_s = (1, 1, 0)$

$$\cos(r, s) = \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \left|\frac{\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s}{|\vec{v}_r|\cdot|\vec{v}_s|}\right| \Rightarrow \cos(r, s) = \frac{(3, 2, 2)\cdot(1, 1, 0)}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3+2}{\sqrt{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}}.$$

El ángulo que forman es:

$$\alpha = \arccos\frac{5}{\sqrt{34}} = 30{,}96^{\circ}$$

2. Asturias, junio 16

a) Encuentre *m* tal que los puntos *A*(2, –5, 2), *B*(4, *m*, 2) y *C*(5, –2, 2) estén alineados . (1 punto)

b) Obtenga las ecuaciones implícitas de la recta determinada por los puntos anteriores. (1 punto)

c) Halle la distancia del origen de coordenadas a la recta encontrada en b). (0,5 puntos)

Solución:
a) Los puntos A, B y C estarán alineados cuando los vectores $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$ y $\mathbf{BC}$ tiene la misma dirección. Esto significa que $\mathbf{AB} = p \cdot \mathbf{AC}$ y $\mathbf{AC} = q \cdot \mathbf{BC}$.

$\mathbf{AB} = (4, m, 2) - (2, -5, 2) = (2, m + 5, 0)$
$\mathbf{AC} = (5, -2, 2) - (2, -5, 2) = (3, 3, 0)$
$\mathbf{BC} = (5, -2, 2) - (4, m, 2) = (1, -2 - m, 0)$

- $\mathbf{AB} = p \cdot \mathbf{AC} \Rightarrow (2, m + 5, 0) = p \cdot (3, 3, 0) \Rightarrow \begin{cases} 2 = 3p \\ m+5 = 3p \end{cases} \Rightarrow p = \dfrac{2}{3}$ y $m = -3$.
- Para ese valor de m, $\mathbf{BC} = (1, -2 + 3, 0) = (1, 1, 0)$, que tiene la misma dirección que $\mathbf{AC}$.

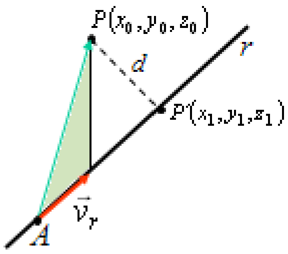
b) La recta puede determinarse a partir del punto A y del vector $\mathbf{BC}$. Sus ecuaciones paramétricas son: $r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -5 + t \\ z = 2 \end{cases}$.

Las dos primeras ecuaciones (restándolas) generan el plano $x - y = 7$.

Por tanto, la recta puede darse en forma implícita como sigue: $r: \begin{cases} x - y = 7 \\ z = 2 \end{cases}$.

c) La ecuación de la distancia de un punto P a una recta r es:

$$d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|},\ \text{siendo } A \in r.$$



En este caso: $A = (2, -5, 2)$, $P = O = (0, 0, 0)$, $\overrightarrow{AP} = (2, -5, 2)$, $\vec{v}_r = (1, 1, 0)$.

El producto vectorial vale:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,\ 2,\ 7) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 7^2} = \sqrt{57}.$$

El módulo de $\vec{v}_r$: $\left|\vec{v}_r\right| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Luego $d(P, r) = \sqrt{\dfrac{57}{2}}$.

3. Asturias, junio 16

Considere la recta $r: \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$.

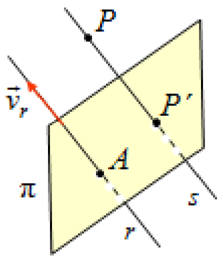
a) Escriba la ecuación implícita de un plano π perpendicular a r pasando por el punto $A(-1, 2, 2)$. (1,25 puntos)
b) Obtenga el punto proyección ortogonal de $P(-1, 3, 3)$ sobre el plano π. (1,25 puntos)
Solución:
a) Se expresa r en forma paramétrica.

$$r:\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x+1=0 \\ y=z \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=-1 \\ y=t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (0,\ 1,\ 1)$$

El plano perpendicular a r que pasa por $A(–1, 2, 2)$ es:

$$\pi:0(x+1)+(y-2)+(z-2)=0 \Rightarrow \pi:y+z-4=0.$$

b) El punto, $P´$, proyección ortogonal de $P(–1, 3, 3)$ sobre el plano π, es el de intersección del plano π con la recta, s, perpendicular a él que pasa por P.



La recta s es: $s:\begin{cases} x=-1 \\ y=3+t \\ z=3+t \end{cases}$.

Sustituyendo en π: $3+t+3+t-4=0 \Rightarrow t=-1$. Luego, $P´ = (–1, 2, 2)$.

4. <u>Castilla La Mancha, junio 16</u>

Sea r la recta determinada por el punto $P(1, 0, 1)$ y el vector $\vec{v} = (1, –1, 0)$.

a) Calcula el punto de r más cercano al punto $Q(0, 0, 1)$. (1,5 puntos)

b) Calcula el punto simétrico de Q respecto a r. (1 punto)

<u>Solución</u>:

a) El punto pedido es el de corte de la recta r con del plano perpendicular a r por el punto Q.

La recta es: $r \equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases}$.

Como $\vec{v} = (1, –1, 0)$, el plano perpendicular a r por el punto Q es:

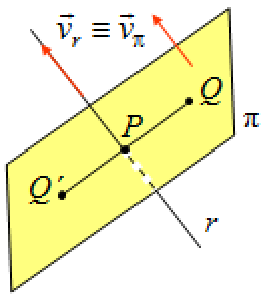
$\pi \equiv x-y+d=0 \rightarrow$ por contener a Q: $\pi \equiv 0+0+d=0 \Rightarrow d=0$.

Luego: $\pi \equiv x-y=0$

Corte de r con π: se sustituyen las ecuaciones de $r \equiv (1+t,\ -t,\ 1)$ en π, obteniéndose

$\pi \equiv 1+t+t=0 \Rightarrow t=-1/2$

Para $t = –1/2$ se obtiene $P = (1/2, 1/2, 1)$.



b) Sea $Q´= (x_0, y_0, z_0)$ es punto simétrico de Q respecto de π.

Punto medio de Q y $Q´$: $\left(\dfrac{x_0}{2},\ \dfrac{y_0}{2},\ \dfrac{1+z_0}{2}\right)$

Como $P(1/2, 1/2, 1) = \left(\dfrac{x_0}{2},\ \dfrac{y_0}{2},\ \dfrac{1+z_0}{2}\right) \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}=\frac{x_0}{2} \Rightarrow x_0=1;\ \frac{1}{2}=\frac{y_0}{2} \Rightarrow y_0=1;\ 1=\frac{1+z_0}{2} \Rightarrow z_0=1$$

Por tanto, $Q´ = (1, 1, 1)$.

5. Castilla y León, junio 16

a) Calcular un vector de módulo 4 que tenga la misma dirección, pero distinto sentido, que el vector $\vec{v}$ = (2, 1, –2). (1 punto)

b) Calcular un punto de la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$ cuya distancia al punto A = (–1, 2, 0) sea mínima. (1,5 puntos)

Solución:

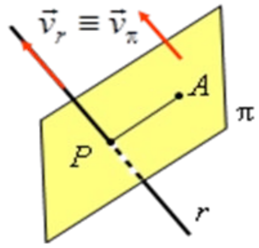
a) Como el módulo de $\vec{v}$ = (2, 1, –2) es $|\vec{v}| = \sqrt{2^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{9} = 3$, el vector $-\dfrac{4}{3}\vec{v}$ tendrá módulo 4 y cumple que su sentido es el opuesto de $\vec{v}$.

El vector pedido es: $-\dfrac{4}{3}(2,1,-2) = \left(-\dfrac{8}{3}, -\dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$.

b) El punto buscado es el de corte de la recta r con del plano perpendicular a ella por el punto A.

Como $\vec{v}_r$ = (–1, 1, –2) y A = (–1, 2, 0), dicho plano es:

$$\pi \equiv -(x+1)+(y-2)-2z=0 \Rightarrow \pi \equiv -x+y-2z-3=0$$



Corte de r con π: se sustituyen las ecuaciones de $r \equiv (1-t, -2+t, 3-2t)$ en π, obteniéndose

$$\pi \equiv -(1-t)+(-2+t)-2(3-2t)-3=0 \Rightarrow 6t-12=0 \Rightarrow t=2$$

Para t = 2 se obtiene P = (–1, 0, –1).

6. Castilla y León, junio 16

Consideremos las rectas $r \equiv \dfrac{x}{2} = y = \dfrac{z-1}{2}$ y $s \equiv \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z$.

a) Comprobar que las rectas r y s se cruzan. (1 punto)

b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a las rectas r y s. (1,5 puntos)

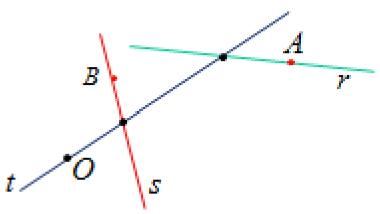
Solución:

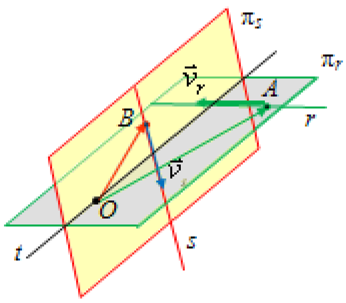
a) Hay que comprobar que los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\boldsymbol{AB}$ son linealmente independientes, donde A = (0, 0, 1) es un punto de r y B = (0, 1, 0) un punto de s.

$\vec{v}_r$ = (2, 1, 2), $\vec{v}_s$ = (2, 3, 1) y $\boldsymbol{AB}$ = (0, 1, 0) – (0, 0, 1) = (0, 1, –1),

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8+1 \quad =24 \neq 0$, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas r y s se cruzan.

b) La recta pedida se obtiene por intersección de los planos π_r, que contiene a r y pasa por el origen, y π_s, que contiene a s y pasa por el origen.





Plano π_r:
Determinado por $O(0, 0, 0)$ y por los vectores $\mathbf{OA}$ = (0, 0, 1) y $\vec{v}_r$ = (2, 1, 2); el punto $A(0, 0, 1)$ pertenece a la recta r.
Su ecuación es:

$$\pi_r: \begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_r: x - 2y = 0$$

Plano π_s:
Determinado por $O(0, 0, 0)$ y por los vectores $\mathbf{OB}$ = (0, 1, 0) y $\vec{v}_s$ = (2, 3, 1); el punto $B(0, 1, 0)$ pertenece a la recta s.
Su ecuación es:

$$\pi_s: \begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ y & 3 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_s: -x + 2z = 0$$

Por tanto, $t: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases}$. En paramétricas: $t: \begin{cases} y = x/2 \\ z = x/2 \end{cases} \Rightarrow t: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

<u>**7**. Comunidad Valenciana, junio 16</u>

Se dan las rectas $r: \begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 3x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha - 2 \end{cases}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:
a) La recta paralela a r que pasa por el punto (0, 1, 0). (3 *puntos*)
b) El plano π que contiene a la recta r y es paralelo a s. (3 *puntos*)
c) La distancia entre las rectas r y s.
<u>Solución</u>:
a) Se expresa r en forma paramétrica.

$$r: \begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ 3x + y - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x + z = -3 + 2y \\ 3x - z = -1 - y \end{cases} \Rightarrow r: \begin{matrix} \\ E2 + E1 \end{matrix} \begin{cases} x + z = -3 + 2y \\ 4x = -4 + y \Rightarrow y = 4 + 4x \end{cases}.$$

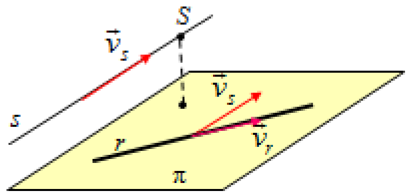
Sustituyendo en $E1$: $x + z = -3 + 2(4 + 4x) \Rightarrow z = 5 + 7x \Rightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 + 4\lambda \\ z = 5 + 7\lambda \end{cases}$.

Por tanto, la paralela a r por el punto (0, 1, 0) será: $r': \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = 7\lambda \end{cases}$.

b) El plano pedido viene determinado por la recta r y el vector de dirección de s, $\vec{v}_s$ = (0, 2, 1)
Su ecuación será:

$$\pi: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 + 4\lambda + 2\mu \\ z = 5 + 7\lambda + \mu \end{cases} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y - 4 & 4 & 2 \\ z - 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi: -10x-(y-4)+2(z-5)=0 \Rightarrow 10x+y-2z+6=0.$$



c) La distancia entre *r* y *s* es igual a la distancia de cualquier punto de $S \in s$ al plano π.
Tomando *S* = (1, 0, –2) se tendrá:

$$d(r,s)=d(S,\pi)=\frac{10+4+6}{\sqrt{10^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{20}{\sqrt{105}}$$

8. <u>Comunidad Valenciana, junio 16</u>

Se da el plano $\pi: 6x+3y+2z-12=0$ y los puntos *A*(1, 0, 0), *B*(0, 2, 0) y *C*(0, 0, 3).
Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:
a) La ecuación implícita del plano σ que pasa por los puntos *A*, *B* y *C*, (2 *puntos*); y la posición relativa de los planos σ y π. (2 *puntos*)
b) El área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C*. (3 *puntos*)
c) Un punto *P* del plano y el volumen del tetraedro cuyos vértices son *P*, *A*, *B* y *C*. (3 *puntos*)

<u>Solución</u>:

a) El plano σ queda determinado el punto *A*(1, 0, 0) y por los vectores:
AB = (0, 2, 0) – (1, 0, 0) = (–1, 2, 0) y ***AC*** = (0, 0, 3) – (1, 0, 0) = (–1, 0, 3)
Su ecuación es:

$$\sigma: \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y & 2 & 0 \\ z & 0 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \sigma: 6(x-1)+3y+2z=0 \Rightarrow \sigma: 6x+3y+2z-6=0.$$

Los planos $\pi: 6x+3y+2z-12=0$ y $\sigma: 6x+3y+2z-6=0$ son paralelos: ambos tienen el mismo vector normal: $\vec{v}_\pi=\vec{v}_\sigma$ = (6, 3, 2).

b) El área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C* viene dada por $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

Como:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=(6,\ 3,\ 2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{36+9+4}=\sqrt{49}=7$$

Luego, la superficie del triángulo será: $S=\frac{7}{2}$.

c) Como los plano π y σ son paralelos, el volumen del tetraedro cuyos vértices son *P*, *A*, *B* y *C* es independiente del punto *P* elegido. Puede tomarse *P*(2, 0, 0) ∈ π.
El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan. En este caso, los vectores: ***AB***, ***AC*** y ***AP***.
Como ***AB*** = (–1, 2, 0), ***AC*** = (–1, 0, 3) y ***AP*** = (2, 0, 0) – (1, 0, 0) = (1, 0, 0), el volumen es:

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}|6|=1 \text{ u}^3$$

9. Islas Canarias, junio 16

Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y-2z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi : 2x+y+mz-3=0$.

a) Determinar el valor del parámetro m para que la recta y el plano sean secantes.
b) Determinar el valor del parámetro m para que la recta y el plano sean paralelos.
c) ¿Cuál es la posición relativa de la recta r del enunciado y un plano α de ecuación:
$\alpha : 2x+y+z-\frac{5}{3}=0$?

Solución:
La recta y el plano serán secantes cuando el sistema que determinan sea compatible.

El sistema es: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y-2z=0 \\ 2x+y+mz=3 \end{cases}$.

Hay que estudiar los rangos de la matrices de coeficientes y ampliada.
Matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = -3m+3 \rightarrow \text{se anula cuando } m = 1.$$

Si m = 1 la matriz ampliada es: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6-3+5 \neq 0 \Rightarrow$

El sistema será incompatible.
Por tanto:
a) Si $m \neq 1$ el sistema es compatible determinado. La recta y el plano se cortan en un punto.

b) Si m = 1 el sistema es incompatible. La recta y el plano son paralelos.

c) Como el plano $\alpha : 2x+y+z-\frac{5}{3}=0 \Leftrightarrow \alpha : 6x+3y+3z=5$ habrá que estudiar el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y-2z=0 \\ 6x+3y+3z=5 \end{cases} \rightarrow \text{Transformaciones de Gauss: } \begin{matrix} \\ E2+2E1 \\ E3-3E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x=2 \\ 3x=2 \end{cases} \text{; sistema}$$

compatible indeterminado. Esto significa que los tres planos considerados son del mismo haz; luego, la recta r está contenida en el plano α.

Observación: Si se expresa r en sus ecuaciones paramétricas y se sustituye en la ecuación del plano α, se tiene:

$$r \equiv \begin{cases} x=2/3 \\ y=t \\ z=1/3-t \end{cases} \rightarrow (\text{Sustituyendo en } \alpha) \rightarrow \alpha : 2\cdot\frac{2}{3}+t+\frac{1}{3}-t-\frac{5}{3}=0 \Leftrightarrow \text{cualquier punto de } r$$

pertenece a $\alpha \Rightarrow r \subset \alpha$.

<u>**10**. Islas Canarias, junio 16</u>

Dadas las rectas $r_1 \equiv x-1=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2}$ y $r_2 \equiv \frac{x+5}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+4}{3}$, se pide

a) Demostrar que se encuentran en un mismo plano.
b) Hallar la ecuación del plano que determinan.

<u>Solución</u>:

a) Hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores:

$\vec{v}_{r1}$ = (1, –1, 2), $\vec{v}_{r2}$ = (4, –2, 3) y ***AB*** = (–5, 3, –4) – (1, 1, –2) = (–6, 2, –2)

donde *A* es un punto de *r* y *B* un punto de *s*.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ -6 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2+10-8=0$, los vectores son linealmente dependientes. En consecuencia, están en el mismo plano. (Como no son paralelas, se cortarán).

b) El plano pedido viene determinado por los vectores $\vec{v}_{r1}$ y $\vec{v}_{r2}$ y por cualquier punto de alguna de las rectas; por ejemplo *A*(1, 1, –2).

Su ecuación será:

$$\pi : \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 4 \\ y-1 & -1 & -2 \\ z+2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : x-1+5(y-1)+2(z+2)=0 \Rightarrow \pi : x+5y+2z-2=0.$$

<u>**11**. Madrid, junio 16</u>

Dado el punto *P*(2, 1, –1), determine el punto simétrico de *P* respecto al plano que pasa por los puntos *A*(0, 2, –1), *B*(1, –3, 0) y *C*(2, 1, 1).

<u>Solución</u>:

El plano determinado por los puntos dados viene dado por el punto *A*(0, 2, –1) y por los vectores:

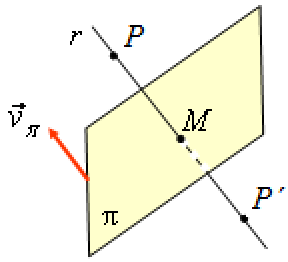
AB = (1, –3, 0) – (0, 2, –1) = (1, –5, 1) y ***AC*** = (2, 1, 1) – (0, 2, –1) = (2, –1, 2)

Su ecuación es:

$$\pi : \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y-2 & -5 & -1 \\ z+1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi : -9x+9(z+1)=0 \Rightarrow \pi : x-z-1=0.$$

El punto simétrico está en la recta *r* perpendicular a π que pasa por *P*, cuya ecuación es:

$$r : \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1 \\ z = -1-\lambda \end{cases}.$$



Corte de la recta *r* con plano π: (2 + λ) – (–1 – λ) – 1 = 0 ⇒ λ = –1

Por tanto, *M* = (1, 1, 0).

Punto medio de *P* y *P*´: $\left(\frac{2+x_0}{2}, \frac{1+y_0}{2}, \frac{-1+z_0}{2}\right)$

Como $M = (1, 1, 0) = \left(\frac{2+x_0}{2}, \frac{1+y_0}{2}, \frac{-1+z_0}{2}\right) \Rightarrow$

$$1=\frac{2+x_0}{2} \Rightarrow x_0=0;\ 1=\frac{1+y_0}{2} \Rightarrow y_0=1;\ 0=\frac{-1+z_0}{2} \Rightarrow z_0=1$$

Por tanto, $P´ = (0, 1, 1)$.

12. Madrid, junio 16

Se consideran los puntos $A(0, 5, 3)$, $B(0, 6, 4)$, $C(2, 4, 2)$ y $D(2, 3, 1)$ y se pide:

a) (1 punto) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono *ABCD* es un paralelogramo.

b) (1 punto) Calcular el área de dicho paralelogramo.

c) (1 punto) Determinar el lugar geométrico de los puntos *P* cuya proyección sobre el plano *ABCD* es el punto medio del paralelogramo.

Solución:

a) Los puntos son coplanarios si los vectores ***AB***, ***AC*** y ***AD*** son linealmente dependientes.

AB = (0, 6, 4) – (0, 5, 3) = (0, 1, 1); ***AC*** = (2, 4, 2) – (0, 5, 3) = (2, –1, –1);

AD = (2, 3, 1) – (0, 5, 3) = (2, –2, –2)

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2-2=0$, se deduce que son coplanarios.

El polígono *ABCD* será un paralelogramo cuando los vectores ***AB*** y ***DC*** sean iguales; y lo mismo para los vectores y ***BC*** y ***AD***.

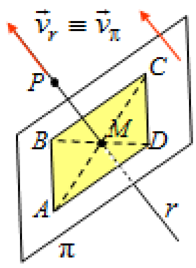
AB = (0, 1, 1); ***DC*** = (2, 4, 2) – (2, 3, 1) = (0, 1, 1) → son iguales.

AD = (2, –2, –2); ***BC*** = (2, 4, 2) – (0, 6, 4) = (2, –2, –2) → son iguales.

b) El área del paralelogramo viene dada por $S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (0,\ 2,\ -2) \Rightarrow S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}\ \text{u}^2.$$

c) Los puntos cuya proyección son el punto medio del paralelogramo, *M*, son los de la recta, *r*, perpendicular al plano que contiene al paralelogramo por ese punto *M*.



El punto $M = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{5+4}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(1, \frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

El vector normal al plano es $\vec{v}_\pi = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (0,\ 2,\ -2)$.

Luego, $r: \begin{cases} x=1 \\ y=9/2+2t \\ z=5/2-2t \end{cases}$.

13. Murcia, junio 16

Considere los puntos $P = (2, 7, 3)$, $Q = (1, 2, 5)$ y $R = (-1, -2, 5)$.

a) [1 punto] Calcule el área del triángulo *PQR*.

b) [0,5 puntos] Determine la ecuación general (o ímplícita) del plano que contiene al triángulo *PQR*.
c) [1 punto] Calcule la ecuación (en cualquiera de sus formas) de la recta que pasa por *P*, está contenida en el plano que contiene al triángulo *PQR* y es perpendicular al lado *QR*.
Solución:

a) El área del triángulo de vértices *P*, *Q* y *R* viene dada por $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right|$.

En este caso:
PQ = (1, 2, 5) – (2, 7, 3) = (–1, –5, 2); **PR** = (–1, –2, 5) – (2, 7, 3) = (–3, –9, 2)
Como:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -1 & -5 & 2 \\ -3 & -9 & 2 \end{vmatrix} = (8, \ -4, \ -6) \Rightarrow \left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{64+16+36} = \sqrt{116}.$$

Luego, la superficie del triángulo será: $S = \frac{\sqrt{116}}{2} = \sqrt{29}$ u^2.

b) El plano viene determinado por el punto *P* y por los vectores **PQ** y **PR**. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -1 & -3 \\ y-7 & -5 & -9 \\ z-3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8(x-2) - 4(y-7) - 6(z-3) = 0 \Rightarrow$$

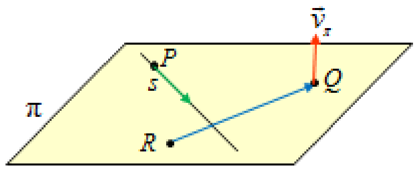
$$\Rightarrow \pi:\ 8x - 4y - 6z + 30 = 0 \Rightarrow \pi:\ 4x - 2y - 3z + 15 = 0.$$

c) El vector de dirección de la recta pedida, $\vec{v}_s$, debe ser perpendicular a $\vec{v}_\pi$ = (4, –2, –3) y al vector **QR** = (–1, –2, 5) – (1, 2, 5) = (–2, –4, 0).

Por tanto, $\vec{v}_s = \vec{v}_\pi \times \overrightarrow{QR} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 4 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (-12, \ 6, \ -20)$.

Su ecuación será:

$$s: \begin{cases} x = 2 - 12t \\ y = 7 + 6t \\ z = 3 - 20t \end{cases}.$$



14. Murcia, junio 16
Considere los puntos *P* = (1, 0, 0), *Q* = (0, 2, 0) y *R* = (0, 0, 1).
a) [1,25 puntos] Estudie si el triángulo *PQR* es o no rectángulo en el vértice *P*.
b) [1,25 puntos] Dado el punto *S* = (1, 2, 3), calcule el volumen del tetraedro de vértices *P*, *Q*, *R* y *S*.
Solución:
a) El triángulo de vértices *PQR* será rectángulo en P si los vectores PQ y PR son perpendiculares.
Los vectores son:
PQ = (0, 2, 0) – (1, 0, 0) = (–1, 2, 0) y **PR** = (0, 0, 1) – (1, 0, 0) = (–1, 0, 1)
Como el producto escalar **PQ** · **PR** = (–1, 2, 0) · (–1, 0, 1) = 1, los vectores no son perpendiculares.

b) El volumen del tetraedro de vértices P, Q, R y S ves un sexto del valor absoluto del producto mixto de tres de los vectores que se obtienen. Esto es, $V = \frac{1}{6}[\boldsymbol{PQ}, \boldsymbol{PR}, \boldsymbol{PS}]$, siendo

PS = (1, 2, 3) – (1, 0, 0) = (0, 2, 3).

Se obtiene:

$$V = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(2+6) = \frac{4}{3}\ \text{u}^3.$$

<u>**15**. País Vasco, junio 16</u>

Calcular la distancia del punto A de coordenadas (4, 4, 3) al plano que pasa por los puntos B(1, 1, 0), C(1, 0, 1) y D(0, 1, 1).

<u>Solución</u>:

El plano que pasas por los puntos B, C y D viene determinado por el punto B y los vectores ***BC*** y ***BD***.

BC = (1, 0, 1) – (1, 1, 0) = (0, –1, 1); ***BD*** = (0, 1, 1) – (1, 1, 0) = (–1, 0, 1)

Su ecuación es:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y-1 & -1 & 0 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: -(x-1)-(y-1)-z=0 \Rightarrow \pi: x+y+z-2=0.$$

Por tanto,

$$d(P,\pi) = \frac{4+4+3-2}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}.$$