ALGUNOS PROBLEMAS DE ANÁLISIS PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE SELECTIVIDAD DE 2016

1. Aragón, junio 2016

a) (2,25 puntos) Considere la función: $f(x)=\dfrac{1}{8x-x^2}$

a.1) (1,5 puntos) Determine las asíntotas, si existen, de la función $f(x)$.

a.2) (0,75 puntos) Determine los extremos relativos, si existen, de la función $f(x)$.

b) (1,25 puntos) Determine: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\ln(x^2)\right)\left(\dfrac{x+1}{x^2+3}\right)\right)$

c) (1,5 puntos) Calcule el área de la región encerrada entre las curvas $f(x)=x^3$ y $g(x)=2x^2-x$.

Solución:

a) La función $f(x)=\dfrac{1}{8x-x^2}$ no está definida en los puntos $x = 0$ y $x = 8$, valores en los que se anula el denominador.

a.1) En esos puntos tiene asíntotas verticales, pues:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{8x-x^2}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty \text{ y } \lim_{x\to 8}\frac{1}{8x-x^2}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty$$

Las asíntotas son las rectas de ecuación $x = 0$ y $x = 8$

También tiene una asíntota horizontal, pues $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{8x-x^2}=0$. La asíntota es la recta $y = 0$.

a.2) Derivando:

$$f'(x)=\frac{-8+2x}{\left(8x-x^2\right)^2} \to \text{Se anula cuando } -8+2x=0 \Rightarrow x=4.$$

$$f''(x)=\frac{2\cdot\left(8x-x^2\right)^2-(-8+2x)\cdot 2\left(8x-x^2\right)\cdot(8-2x)}{\left(8x-x^2\right)^4} \Rightarrow f''(x)=\frac{6x^2-48x+124}{\left(8x-x^2\right)^3}.$$

Como $f''(4)>0$, en $x = 4$ se tiene un mínimo relativo.

(También puede llegarse a esa conclusión estudiando el signo de las derivadas laterales en $x = 4$).

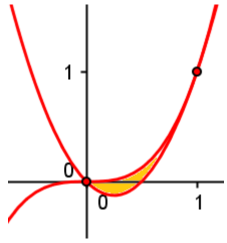
b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\ln(x^2)\right)\left(\dfrac{x+1}{x^2+3}\right)\right)$ = [∞ · 0] = $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2)}{\dfrac{x^2+3}{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{\dfrac{x^2+3}{x+1}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ → (Aplicando L´Hôpital) = $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}}{\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2(x+1)^2}{x^3+2x^2-3x}=0$ → el numerador tiene menor grado que el denominador. También puede reiterarse L´Hôpital dos veces más.

c) Las curvas $f(x)=x^3$ y $g(x)=2x^2-x$ se cortan cuando

$$x^3=2x^2-x \Rightarrow x^3-2x^2+x=0 \Rightarrow x\left(x^2-2x+1\right)=0 \Rightarrow x(x-1)^2=0 \Rightarrow x=0 \text{ y } x=1.$$

Por tanto, el área encerrada entre ellas viene dada por:

$$\int_0^1 \left(x^3-2x^2+x\right)dx = \left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{1}\ \text{u}^2.$$



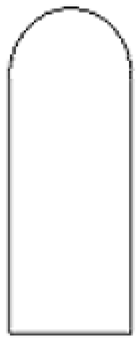
La situación gráfica (que en este caso no se pide) es la representada en la figura

2. Aragón, junio 2016

a) (1,5 puntos) Determine el límite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{2x-1}-\frac{3}{2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}$

b) (1,5 puntos) Usando el cambio de variable $t = \cos(x)$, calcule:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1-\cos(x)}dx$$



c) (2 puntos) Queremos construir una ventana con la forma de la figura que aparece debajo, es decir rectangular en la parte inferior y semicircular en la superior (la parte superior es un semicírculo completo).
Sabiendo que el perímetro total de la ventana son 5 metros, determine las dimensiones de la ventana para que la superficie de la misma sea máxima.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{2x-1}-\frac{3}{2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+5}{4x-2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}} = \left[1^\infty\right].$

Puede hacerse aplicando logaritmos y la regla de L´Hôpital.

$$\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{2x-1}-\frac{3}{2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\left(\frac{5x+1}{2x-1}-\frac{3}{2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+1}{x-1}\ln\left(\frac{4x+5}{4x-2}\right) = [\infty\cdot 0] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{4x+5}{4x-2}\right)}{\frac{x-1}{2x^2+1}} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4}{4x+5}-\frac{4}{4x-2}}{\frac{2x^2+1-(x-1)\cdot 4x}{\left(2x^2+1\right)^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-28}{(4x+5)(4x-2)}}{\frac{-2x^2+4x+2}{\left(2x^2+1\right)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-28\left(2x^2+1\right)^2}{\left(-2x^2+4x+2\right)(4x+5)(4x-2)} = \ldots = \frac{-28\cdot 4}{-2\cdot 4\cdot 4} = \frac{7}{2}.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{2x-1}-\frac{3}{2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}} = e^{7/2}$.

Observación:

Aplicando la fórmula $\underset{x\to\infty}{lím}\left(f(x)^{g(x)}\right) = \left[1^\infty\right] = e^{\left(\underset{x\to\infty}{lím}\ (f(x)-1)\cdot g(x)\right)}$ se tiene:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+1}{2x-1}-\frac{3}{2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}} = \left[1^\infty\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+5}{4x-2}\right)^{\frac{2x^2+1}{x-1}} =$$

$$= e^{\underset{x\to+\infty}{lím}\left(\frac{4x+5}{4x-2}-1\right)\cdot\left(\frac{2x^2+1}{x-1}\right)} = e^{\underset{x\to+\infty}{lím}\left(\frac{7}{4x-2}\right)\cdot\left(\frac{2x^2+1}{x-1}\right)} = e^{\underset{x\to+\infty}{lím}\left(\frac{1\ \ x^2 4 7}{4x^2-6x+2}\right)} = e^{7/2}.$$

b) Si $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$.
Por tanto:

$$\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{1-\cos(x)} dx = \int \frac{\cos x(\sin x dx)}{1-\cos x} = \int \frac{t(-dt)}{1-t} = \int \left(1 - \frac{1}{1-t}\right) dt = t + \ln(1-t).$$

Deshaciendo el cambio queda:

$$\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{1-\cos(x)} dx = \cos x + \ln(1-\cos x)$$

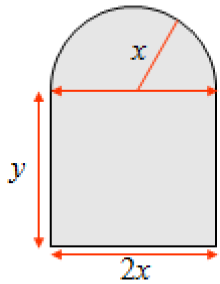
Luego:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1-\cos(x)} dx = \left(\cos x + \ln(1-\cos x)\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} =$$

$$= \cos\frac{\pi}{3} + \ln\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right) - \left(\cos\frac{\pi}{4} + \ln\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2} + \ln\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{2} + \ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$$ $\longrightarrow$ Se han agrupado los ln y se ha racionalizado.

c) Si el ancho de la ventana es $2x$ y la altura y, la suma de las áreas del semicírculo y del rectángulo será:



$$S = \frac{1}{2}\cdot\pi x^2 + 2xy$$

El perímetro es la suma: ancho + altura de los lados + longitud del arco.
Si vale 5 m $\Rightarrow 2x + 2y + \pi x = 5$
Despejando la incógnita y y sustituyendo en la función de área se tiene:

$$y = \frac{5-2x-\pi x}{2}.$$

Luego: $S(x) = \dfrac{\pi x^2}{2} + x(5-2x-\pi x) = \dfrac{10x-4x^2-\pi x^2}{2}$

El máximo de S se obtiene en la solución de $S´= 0$ que hace negativa a $S´´$.

$$S´(x) = \frac{10-x(8+2\pi)}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{8+2\pi} \approx 0,7 \text{ m.}$$

Como $S´´(x) = -\dfrac{8+2\pi}{2} < 0$, para ese valor de x se tiene el máximo buscado.
El ancho de la ventana será de 1,4 m;
la altura de las paredes laterales $y \approx \dfrac{5-2\cdot 0,7-\pi\cdot 0,7}{2} = 0,7$ m;
y su altura máxima será también de 1,4 m.

3. Asturias, junio 16

a) Calcule los valores de a y b para que la función $f(x)=\dfrac{bx}{x-a}$ tenga como asíntota vertical la recta $x = 2$, y como asíntota horizontal la recta $y = 3$. (1,5 puntos)

b) Dados a y b distintos de cero, razone si la función tiene algún extremo relativo. (1 punto)

Solución:

a) Para que $f(x)=\dfrac{bx}{x-a}$ tenga como asíntota vertical la recta $x = 2$ es necesario que $a = 2$ y $b \neq 0$, pues así:

$$\lim_{x\to 2}\frac{bx}{x-2}=\frac{2b}{0}=\infty.$$

Tendrá como asíntota horizontal la recta $y = 3$ cuando $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{bx}{x-2}=b=3$.

b) Derivando:

$$f'(x)=\frac{b(x-a)-bx}{(x-a)^2}=\frac{-ab}{(x-a)^2}.$$

Si a y b son distintos de cero, la derivada no se anula en ningún punto. Por tanto no tendrá ni máximo ni mínimo.

4. Asturias, junio 16

a) Dibuje un esquema del recinto cerrado plano finito limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$, $g(x)=e^{-x}$ y $h(x)=e^2$. (1 punto)

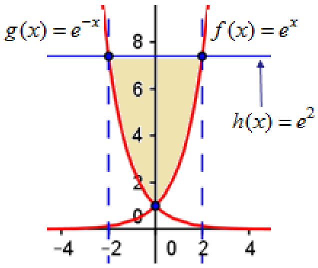
b) Halle el área de dicho recinto. (1,5 puntos)

Solución:

a) Ambas funciones son muy conocidas: pueden representarse dando algunos valores.

El recinto es el representado en la figura adjunta.

Las funciones f y h se cortan cuando $x = 2$; g y h, cuando $x = –2$.



b) Dada la simetría del recinto, el área, S, puede calcularse como sigue:

$$S=2\int_0^2\left(e^2-e^x\right)dx = \left[2\left(e^2x-e^x\right)\right]_0^2=2\left[\left(2e^2-e^2\right)-(0-1)\right] = 2e^2+2\ \text{u}^2.$$

5. Asturias, junio 16

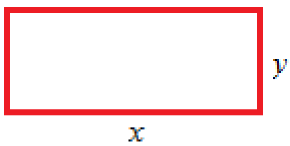
En un concurso se da a cada participante un alambre de dos metros de longitud para que doblándolo convenientemente hagan con el mismo un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos. Aquellos que lo logren reciben como premio tantos euros como decímetros cuadrados tenga de superficie el cuadrilátero construido. Calcule razonadamente la cuantía del máximo premio que se puede obtener en este concurso.

Solución:

Se pide construir un rectángulo de perímetro 2 m con superficie máxima.

Si x es la base e y la altura, se tiene que $2x + 2y = 2 \Rightarrow x + y = 1$.

Se desea que la superficie, $S = xy$, sea máxima.



Como $y = 1 - x$, sustituyendo en $S = xy \Rightarrow S = x(1-x) = x - x^2$.
El máximo de S se obtiene en la solución de $S' = 0$ que hace negativa a S''.
Derivando:

$$S' = 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Como $S'' = -2 < 0$, para ese valor se obtiene el máximo buscado.
Se trata de un cuadrado de lado 0,5 m y superficie 0,25 m^2 = 25 dm^2.
El precio máximo que se puede obtener es de 25 €.

6. Asturias, junio 16

Determine la función $f: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ sabiendo que es dos veces derivable, que $f(1) = e + 2$, que $f'(1) = e + 2$ y que $f''(x) = e^x - \frac{1}{x^2}$. (2,5 puntos)

Solución:

Si $f''(x) = e^x - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \int \left(e^x - \frac{1}{x^2}\right) dx = e^x + \frac{1}{x} + c'$.

Como $f'(1) = e + 2$ y $f'(1) = e^1 + \frac{1}{1} + c' \Rightarrow c' = 1$. Por tanto, $f'(x) = e^x + \frac{1}{x} + 1$.

En consecuencia,

$$f(x) = \int \left(e^x + \frac{1}{x} + 1\right) dx = e^x + \ln x + x + c.$$

Por último, como $f(1) = e + 2$ y $f(1) = e^1 + \ln 1 + 1 + c \Rightarrow c = 1$.

Por tanto, $f(x) = e^x + \ln x + x + 1$.

7. Castilla y León, junio 16

a) Calcular a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga pendiente nula en el punto (1, 1) de su gráfica y, sin embargo, no tenga un extremo relativo en dicho punto. (1,25 puntos)

b) Probar que la ecuación $x^5 + x + 1 = 0$ tiene una única solución real positiva. (1,25 puntos)

Solución:

a) La función y sus dos primeras derivadas son:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 6x + 2a$$

Por pasar por el punto (1, 1), $f(1) = 1 \Rightarrow 1 + a + b + c = 1$.

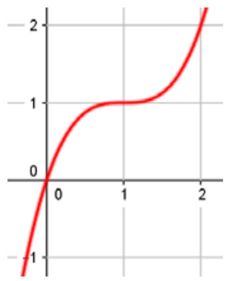
Por tener pendiente nula en (1, 1), $f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0$.

Si no tiene extremo relativo en (1, 1), pero $f'(1) = 0$, en ese punto debe darse una inflexión.

Por tanto, $f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0$.

De $6 + 2a = 0 \Rightarrow a = -3$. Sustituyendo en las otras dos ecuaciones se tiene que $b = 3$ y $c = 0$.

Por tanto, la función será $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.



Nota: Para que el lector entienda mejor el resultado se adjunta la gráfica de esta función.

b) Si se considera la función $g(x) = x^5 + x + 1$ que, por ser un polinomio, es continua y derivable para todo *x*, se tiene:
1) Cumple el teorema de Bolzano.
Así, como $g(-1) = -1 < 0$ y $g(0) = 1 > 0 \Rightarrow$ la función corta al eje *OX* al menos una vez en el intervalo (–1, 0).
2) Como $g'(x) = 5x^4 + 1$ es mayor que 0 para todo *x*, se deduce que la función es creciente siempre.
Por tanto, la función solo corta una vez al eje *OX*; lo que significa que solo tiene una raíz.

8. Castilla y León, junio 16

a) Calcular $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$. (1 punto)

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x) = 1 - x^2$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisa y *x* =1 y *x* = –1. (1,5 puntos)

Solución:

b) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$ = [∞ – ∞]. Haciendo la resta indicada se tiene:

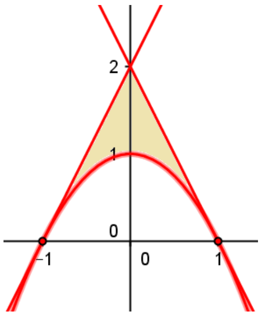
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x - 1 - x}{x\left(e^x - 1\right)} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+1+0} = \frac{1}{2}.$$

b) La tangente a $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_0 es $y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot\left(x - x_0\right)$.

En este caso, para $f(x) = 1 - x^2 \Rightarrow f(\pm 1) = 0$, y como $f'(x) = -2x$, se tiene:

- En $x = 1$: $y = -2\cdot\left(x - 1\right) \Leftrightarrow y = -2x + 2$.
- En $x = -1$: $y = 2\cdot\left(x + 1\right) \Leftrightarrow y = 2x + 2$.



El recinto limitado por la curva y las dos tangentes es el sombreado en la figura adjunta. (Para dibujarlo basta con dar algunos valores).
El área pedida vale:

$$A = 2\left[\int_0^1 \left(-2x + 2 - (1 - x^2)\right) dx\right] = 2\left[\int_0^1 \left(-2x + 1 + x^2\right) dx\right] =$$

$$= 2\left(-x^2 + x + \frac{x^3}{3}\right)_0^1 = 2\left(-1 + 1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\ \text{u}^2$$

Se ha tenido en cuenta la simetría del recinto.

9. Castilla–La Mancha, junio 16

Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax - 6$, $a \in \mathbf{R}$, se pide:

a) Determinar el valor del parámetro $a \in \mathbf{R}$ para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en su punto de inflexión sea –3. (1,25 puntos)

b) Para el valor del parámetro encontrado, calcular los extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. (1,25 puntos)

Solución:

a) Cálculo del punto de inflexión.

$f(x)=x^3+3x^2+ax-6 \Rightarrow f´(x)=3x^2+6x+a \Rightarrow f´´(x)=6x+6=0 \Rightarrow x=-1$.

(Que efectivamente es un punto de inflexión, pues $f´´´(x)=6\neq 0$).

En ese punto la pendiente de la tangente debe valer –3:

$f´(-1)=-3 \Rightarrow -3=3-6+a \Rightarrow a=0$.

b) Luego, la función es $f(x)=x^3+3x^2-6$; siendo $f´(x)=3x^2+6x$ y $f´´(x)=6x+6=0$.

$f´(x)=0 \Rightarrow 3x^2+6x=0 \Rightarrow x=-2; x=0$

Como $f´´(-2)=-6<0$, en x = –2 se tiene un máximo relativo.

Como $f´´(0)=6>0$, en x = 0 se tiene un mínimo relativo.

<u>**10**. Castilla–La Mancha, junio 16</u>

Calcula la integral definida $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{2}dx$. (2,5 puntos)

Nota: Puede ayudarte hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$ y a continuación aplicar integración por partes.

<u>Solución</u>:

Si $t=\sqrt{x} \Rightarrow dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow 2\sqrt{x}\cdot dt=dx \Rightarrow 2tdt=dx$ .Por tanto:

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{2}dx=\int\frac{\cos t}{2}\cdot 2tdt=\int (t\cos t)\,dt$$

La última integral puede hacerse por el método de partes.

Tomando:

$u=t$ y $dv=\cos t dt \Rightarrow du=dt$ y $v=\sin t$

Luego,

$$\int t\cos t dt = t\sin t-\int \sin t\, dt = t\sin t+\cos t+c$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{2}dx=\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{2}dx = \left[\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\right]_0^{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}-0-\cos 0=\frac{\pi}{2}-1.$$

<u>**11**. Castilla–La Mancha, junio 16</u>

a) Enuncia los Teoremas de Bolzano y de Rolle. (1 punto)

b) Razona que la ecuación $2e^x+x^5=0$ tiene al menos una solución real. (0,75 puntos)

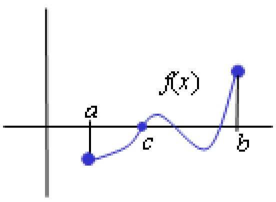
c) Razona que, de hecho, dicha solución es única. (0,75 puntos)

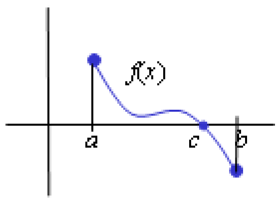
<u>Solución</u>:

a) Teorema de Bolzano.

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado [a, b] y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a)<0<f(b)$ o $f(a)>0>f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c)=0$.

Esto significa que si $f(a)<0$ y $f(b)>0$, entonces la gráfica de $f(x)$ corta al eje OX en





un punto, al menos. (Análogamente si $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$.)
Desde el punto de vista algebraico, este teorema asegura que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución (una raíz) entre *a* y *b*. Esa solución será el punto *c* cuya existencia afirma el teorema.

Teorema de Rolle.
Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), y además $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

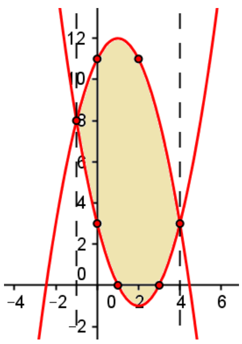
b) Si se considera la función $f(x) = 2e^x + x^5$, que cumple las condiciones del teorema de Bolzano, como $f(-1) = 2e^{-1} - 1 < 0$ y $f(0) = 2e^0 > 0$, se deduce que la función corta al eje *OX* en el intervalo $(-1, 0)$. Esto es, existe un valor $c \in (-1, 0)$ tal que $f(c) = 0$; dicho valor es una solución de la ecuación $2e^x + x^5 = 0$.

c) Como $f'(x) = 2e^x + 5x^4$ siempre toma valores positivos, $\left(f'(x) > 0\right)$, se deduce que la función es siempre creciente. Por tanto, solo puede cortar una vez al eje *OX*; lo que significa que la ecuación $2e^x + x^5 = 0$ solo puede tener una solución.

12. Castilla–La Mancha, junio 16
a) Calcula el área de la región acotada por las gráficas de las parábolas $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 11$. (1,5 puntos)
b) Calcula $c \in \mathbf{R}$ para que las rectas tangentes a las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el punto de abscisa $x = c$ tengan la misma pendiente. (1 punto)
Solución:
a) Las gráficas se cortan en los puntos solución de la ecuación $f(x) = g(x)$:

$$x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 11 \Rightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0 \Rightarrow x = -1; x = 4$$

Las funciones pueden representarse dando algunos valores, siendo el recinto el sombreado en la figura adjunta.
Como la función $g(x)$ va por encima de $f(x)$ en el intervalo considerado, el área pedida es:



$$\int_{-1}^{4}\left(-x^2 + 2x + 11 - \left(x^2 - 4x + 3\right)\right)dx = \int_{-1}^{4}\left(-2x^2 + 6x + 8\right)dx =$$

$$= \left[\frac{-2x^3}{3} + 3x^2 + 8x\right]_{-1}^{4} = \frac{-2\cdot 64}{3} + 3\cdot 16 + 8\cdot 4 - \left(\frac{2}{3} + 3 - 8\right) = \frac{125}{3} \text{ u}^2.$$

b) La pendiente a una curva viene dada por el valor de la derivada en la abscisa del punto en cuestión: $f'(c)$ y $g'(c)$.
Como se desea que sean iguales, el valor *c* será la solución de $f'(x) = g'(x)$:

$$2x - 4 = -2x + 2 \Rightarrow 4x = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

13. Cataluña, junio 16

Sea la función $f(x)=xe^{x-1}$.

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa *x* = 1. [1 punto]

b) Determine en qué intervalos la función *f* es creciente y en qué intervalos es decreciente. [1 punto]

Solución:

a) La ecuación de la tangente en el punto de abscisa *x* = 1 es $y-f(1)=f´(1)\cdot(x-1)$.

De $f(x)=xe^{x-1} \Rightarrow f´(x)=e^{x-1}+xe^{x-1}$.

Se tiene: $f(1)=1\cdot e^0=1$; $f´(1)=e^0+e^0=2$.

La recta tangente es:

$$y-1=2(x-1) \Rightarrow y=2x-1$$

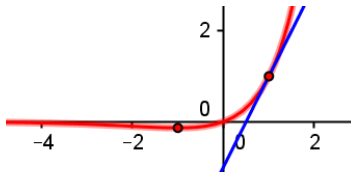
b) La derivada se anula cuando $e^{x-1}+xe^{x-1}=0 \Leftrightarrow (1+x)e^{x-1}=0 \Rightarrow x=-1$.

Si $x<-1$, $f´(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

Si $x>-1$, $f´(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Es evidente que en el punto *x* = –1 se tiene un mínimo.

Aunque no se pide, la gráfica de la función es la adjunta.



14. Cataluña, junio 16

Sean las parábolas $f(x)=x^2+k^2$ y $g(x)=-x^2+9k^2$.

a) Calcule las abscisas, en función de *k*, de los puntos de intersección entre las dos parábolas. [1 punto]

b) Calcule el valor del parámetro *k* para que el área comprendida entre las parábolas sea de 576 unidades cuadradas. [1 punto]

Solución:

a) Las parábolas se cortan en las soluciones de $f(x)=g(x)$:

$$x^2+k^2=-x^2+9k^2 \Rightarrow 2x^2=8k^2 \Rightarrow x=-2k; x=2k$$

b) El área pedida viene dada por:

$$S=\int_{-2k}^{2k}\left(-x^2+9k^2-\left(x^2+k^2\right)\right)dx=\int_{-2k}^{2k}\left(-2x^2+8k^2\right)dx=2\int_{0}^{2k}\left(-2x^2+8k^2\right)dx$$

$$=2\left[\frac{-2x^3}{3}+8k^2x\right]_0^{2k}=2\left(\frac{-16k^3}{3}+16k^3\right)=\frac{64k^3}{3}\ \mathrm{u}^2.$$

Como se desea que $\dfrac{64k^3}{3}=576 \Rightarrow 64k^3=1728 \Rightarrow k^3=27 \Rightarrow k=3$.

15. Comunidad Valenciana, junio 16

Se da la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Dominio y asíntotas de la función *f*. (2 *puntos*)

b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función *f*. (3 *puntos*)

c) La integral $\int f(x)dx$. (3 *puntos*)

d) El valor de $a > 4$ para el que el área de la superficie limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 4$ y $x = a$ es ln(3/2). (2 *puntos*)

Solución:

a) La función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$ no está definida en los valores anulan al denominador:

$x^2-5x+6=0 \Rightarrow x = 2$ y $x = 3$.

En esos puntos tiene asíntotas verticales, pues:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-5x+6}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty \text{ y } \lim_{x\to 3}\frac{1}{x^2-5x+6}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty$$

Las asíntotas son las rectas de ecuación $x = 2$ y $x = 3$.

También tiene una asíntota horizontal ya que $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2-5x+6}=\left[\dfrac{1}{\infty}\right]=0$.

La asíntota es la recta $y = 0$.

b) Derivando: $f'(x)=\dfrac{-2x+5}{\left(x^2-5x+6\right)^2} \longrightarrow$ Se anula en $x=\dfrac{5}{2}$.

Si $x<2$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Si $2<x<\dfrac{5}{2}$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Si $\dfrac{5}{2}<x<3$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente. En $x=\dfrac{5}{2}$ la función tendrá un máximo.

Si $x>3$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

c) $\int\dfrac{1}{x^2-5x+6}dx$ puede hacerse por descomposición en fracciones simples.

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{x^2-5x+6} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -3A-2B=1 \end{cases} \Rightarrow A=-1;\ B=1.$$

Por tanto:

$$\int\frac{1}{x^2-5x+6}dx=\int\left(\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)dx=-\ln(x-2)+\ln(x-3)+c=\ln\frac{x-3}{x-2}+c.$$

d) Para $x > 4$ la función es positiva; por tanto el área pedida es:

$$\int_4^a\frac{1}{x^2-5x+6}dx=\left[\ln\frac{x-3}{x-2}\right]_4^a=\ln\frac{a-3}{a-2}-\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{2(a-3)}{a-2}.$$

Si se quiere que su valor sea $\ln\dfrac{3}{2}$, se tendrá que.

$$\ln\frac{2(a-3)}{a-2}=\ln\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2(a-3)}{a-2}=\frac{3}{2}\Rightarrow 4a-12=3a-6\Rightarrow a=6.$$

16. Comunidad Valenciana, junio 16

Cada día, una planta productora de acero vende *x* toneladas de acero de baja calidad e *y* toneladas de acero de alta calidad. Por restricciones del sistema de producción debe suceder que $y=\dfrac{23-5x}{10-x}$, siendo $0<x<\dfrac{23}{5}$.

El precio de una tonelada de acero de alta calidad es de 900 euros y el precio de una tonelada de acero de baja calidad es de 300 euros.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los ingresos obtenidos en un día en función de *x*. (3 *puntos*)

b) Cuántas toneladas de cada tipo de acero se deben vender en un día para que los ingresos obtenidos ese día sean máximos. (5 *puntos*)

c) El ingreso máximo que se puede obtener por las ventas de acero en un día. (2 *puntos*)

Solución:

a) Los ingresos vienen dados por la función $I=300x+900y$.

Como $y=\dfrac{23-5x}{10-x} \Rightarrow I(x)=300x+\dfrac{900\cdot(23-5x)}{10-x}$.

b) Los ingresos son máximos en las soluciones de $I'(x)=0$ que hacen negativa a $I''(x)$.

Derivando:

$$I'(x)=300+\frac{-4500(10-x)-900\cdot(23-5x)\cdot(-1)}{(10-x)^2} \Rightarrow \text{(Operando) } I'(x)=300+\frac{-24300}{(10-x)^2}.$$

$$300+\frac{-24300}{(10-x)^2}=0 \Rightarrow 300(10-x)^2-24300=0 \Rightarrow x^2-20x+19=0 \Rightarrow x=1;\ x=19$$

La derivada segunda es: $I''(x)=\dfrac{48600}{(10-x)^3}$.

Como $I''(1)>0$ e $I''(19)<0$, el máximo se da cuando *x* = 19 toneladas.

c) El ingreso máximo será $I(19)=300\cdot19+\dfrac{900\cdot(23-5\cdot19)}{10-19}=12180$ €.

17. Islas Canarias, junio 16

Dada la función $f(x)=\begin{cases} x-x^2 & \text{si } 0\le x\le 1 \\ (x-1)\ln^2(x) & \text{si } 1<x\le 2\end{cases}$.

a) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$ en *x* = 1

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa *x* = 3/4.

Solución:

a) Continuidad: deben coincidir los límites laterales en *x* = 1.

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(x-x^2\right)=0;\quad \lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}(x-1)\ln^2(x)=0\cdot0=0$$

Por tanto, es continua.

Derivabilidad: deben coincidir las derivadas laterales en *x* = 1.

Salvo en *x* = 1, $f'(x)=\begin{cases} 1-2x & \text{si } 0<x<1 \\ \ln^2(x)+2(x-1)\ln(x)\cdot\dfrac{1}{x} & \text{si } 1<x<2\end{cases}$

Derivada por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} f´(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(1-2x) = -1$;

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} f´(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\ln^2(x) + 2(x-1)\ln(x)\cdot\frac{1}{x}\right) = 0+0=0$.

Como no coinciden, la función no es derivable en $x = 1$.

b) La ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3/4$ es:

$$y - f\left(\frac{3}{4}\right) = f´\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(x-\frac{3}{4}\right)$$

Como $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} - \frac{9}{16} = \frac{3}{16}$ y $f´\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - 2\cdot\frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - \frac{3}{16} = -\frac{1}{2}\cdot\left(x - \frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{16} \Leftrightarrow 8x + 16y - 9 = 0.$$

<u>**18**. Islas Canarias, junio 16</u>

Calcular las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int \frac{5}{(6x+4)^2+2}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{(2x-3)^2}{3\sqrt{x}}dx$

<u>Solución</u>:

a) Si se hace $6x+4=t \Rightarrow 6dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{6}dt$.

Por tanto:

$$\int \frac{5}{(6x+4)^2+2}dx = \int \frac{5}{t^2+2}\cdot\frac{1}{6}dt = \frac{5}{6}\int\frac{1}{t^2+2}dt = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dt =$$

$$= \frac{5}{12}\cdot\sqrt{2}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dt = \frac{5\sqrt{2}}{12}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+c = \frac{5\sqrt{2}}{12}\arctan\left(\frac{6x+4}{\sqrt{2}}\right)+c.$$

b) Si se opera resulta casi inmediata. Bastaría con ajustar constantes.

$$\int\frac{(2x-3)^2}{3\sqrt{x}}dx = \int\frac{4x^2-12x+9}{3\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{4}{3}x^{3/2} - 4x^{1/2} + 3x^{-1/2}\right)dx =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{x^{5/2}}{5/2} - 4\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} + 3\cdot\frac{x^{1/2}}{1/2} + c = \frac{8}{15}x^{5/2} - \frac{8}{3}x^{3/2} + 6\cdot x^{1/2} + c$$

<u>**19**. La Rioja, junio 16</u>

2. (2 puntos)

i) Calcule, si existe, $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+4x^2\right)^{1/\sin^2 x}$

ii) Halle el área de la región delimitada por las gráficas de las parábolas $y = x^2$, $x = y^2$.

<u>Solución</u>:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+4x^2\right)^{1/\sin^2 x} = \left[1^\infty\right]$.

Puede hacerse aplicando logaritmos y la regla de L´Hôpital.

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}\left(1+4x^2\right)^{1/\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\ln\left(1+4x^2\right)^{1/\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^2 x}\ln\left(1+4x^2\right)=\left[\infty\cdot 0\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+4x^2\right)}{\sin^2 x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left(L´H\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{8x}{1+4x^2}}{2\sin x\cdot\cos x}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\left(L´H\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{8\left(1+4x^2\right)-8x\cdot 8x}{\left(1+4x^2\right)^2}}{2\cos x\cdot\cos x-2\sin x\cdot\sin x}=\frac{8}{2}=4$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0}\left(1+4x^2\right)^{1/\sin^2 x}=e^4$.

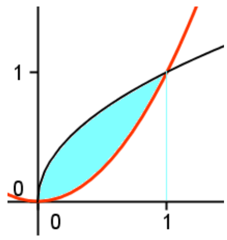
ii) Las parábolas $y=x^2$, $x=y^2$ se representan en la figura adjunta. (Puede hacerse dando valores).

Se cortan en los puntos x = 0 y x = 1, soluciones de la ecuación $x^2=\sqrt{x}$.

La curva que va por encima es $y=\sqrt{x}$.

Luego:

$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left(\frac{2x^{3/2}}{3}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\ \text{u}^2$$



<u>**20**. La Rioja, junio 16</u>

3. (3 puntos) Sea $g(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-4}$.

i) Determine el dominio y la continuidad de *g*.
ii) Halle las asíntotas de la gráfica de *g*.
iii) Determine los extremos relativos y estudie la monotonía de *g*.
iv) Dibuje la gráfica de *g* destacando los elementos hallados anteriormente.

<u>Solución</u>:

i) La función no está definida cuando $x^2-4=0\Rightarrow x=\pm 2$.

Por tanto, Dom(g) = **R** – {–2, 2} ⇒ En x = –2 y en x = 2 la función no es continua, por no estar definida.

ii) La función puede tener asíntotas verticales en los puntos x = –2 y x = 2.

En x = –2:

$\lim_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ = (L´H) = $\lim_{x\to -2}\dfrac{3x^2+4x}{2x}=\dfrac{4}{-4}=-1\to$ En x = –2 no hay asíntota vertical: la discontinuidad en ese punto es evitable.

En x = 2:

$\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-4}=\dfrac{16}{0}=\infty\Rightarrow$ La recta x = 2 es una asíntota vertical.

La función tiene también una asíntota oblicua: las funciones racionales tiene asíntotas oblicuas cuando el grado del numerador supera en 1 al grado del denominador. Esta asíntota puede hallarse aplicando límites o dividiendo la expresión.

→Mediante límites:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2}{x^3-4x} = 1;$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(g(x)-mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2x^2}{x^2-4} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+4x}{x^2-4}\right) = 2.$$

La asíntota es la recta $y = x+2$.

→Si se hace la división $\frac{x^3+2x^2}{x^2-4}$ se obtiene:

$$g(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-4} = x+2+\frac{4x+8}{x^2-4}$$

La ecuación de la asíntota es $y = x+2$.

$$\begin{array}{rr|l} x^3+2x^2 & & x^2-4 \\ \cline{3-3} -x^3 \quad +4x & & x+2 \\ \cline{1-1} 2x^2+4x & & \\ -2x^2 \quad +8 & & \\ \cline{1-1} 4x+8 & & \end{array}$$

iii) Derivando:

$$g'(x) = \frac{(3x^2+4x)(x^2-4)-(x^3+2x^2)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4-12x^2-16x}{(x^2-4)^2}$$

Descomponiendo el numerador en factores se obtiene:

$$x^4-12x^2-16x = x(x^3-12x-16) = x(x+2)(x^2-2x-8) = x(x+2)(x+2)(x-4).$$

Luego, la derivada se anula en los puntos $x = 0$ y $x = 4$. El punto $x = -2$ no puede considerarse, la función no está definida en él.

Podría escribirse que: $g'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$ → simplemente se ha simplificado.

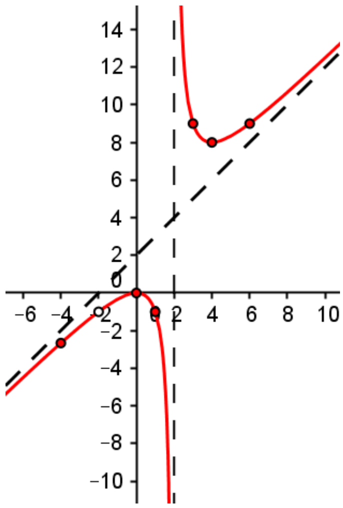
Para determinar el crecimiento y decrecimiento también hay que tener en cuenta que en los puntos $x = -2$ y $x = 2$ la función no está definida. Por tanto hay que estudiar el signo de la derivada en los intervalos: $(-\infty, -2)$; $(-2, 0)$; $(0, 2)$; $(2, 4)$; $(4, +\infty)$

- Si $x < -2$, $g'(x) > 0 \Rightarrow g(x)$ es creciente.
- Si $-2 < x < 0$, $g'(x) > 0 \Rightarrow g(x)$ es creciente.
- Si $0 < x < 2$, $g'(x) < 0 \Rightarrow g(x)$ es decreciente.

Por tanto, en $x = 0$ hay un máximo relativo.

- Si $2 < x < 4$, $g'(x) < 0 \Rightarrow g(x)$ es decreciente.
- Si $x > 4$, $g'(x) > 0 \Rightarrow g(x)$ es creciente.

En consecuencia, en $x = 4$ hay un mínimo relativo.



iv) Para representar esta función, además de lo ya visto, puede estudiarse la posición de la curva respecto a las asíntotas, concluyendo que:

Si $x \to 2^-$, $g(x) \to -\infty$; y si $x \to 2^+$, $g(x) \to +\infty$.

Si $x \to -\infty$, $g(x) = x+2+\frac{4x+8}{x^2-4}$ va por debajo de la asíntota,

pues el término $\frac{4x+8}{x^2-4}$ es negativo. Sucede al revés cuando $x \to +\infty$.

Pueden darse algunos valores:

(0, 0), máximo; (–4, –8/3); el punto (–2, –1) debe dejarse en blanco: $g(x)$ no está definida; (1, –1); (3, 9); (4, 8), mínimo; (6, 9).

21. La Rioja, junio 16

(3 puntos) Sean a y b números reales y la función $f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{si } x<-1 \\ ax+1, & \text{si } -1\le x\le 1 \\ x^2+bx+2, & \text{si } x>1 \end{cases}$

i) Calcule los valores de a y b tales que la función f es continua en todos los puntos reales.
ii) Determine, en función de a y b, la derivabilidad de f y calcule $f\,'$ cuando sea posible.
iii) Utilice el teorema de Bolzano para justificar que si p es un polinomio de grado 5, con coeficiente principal positivo, tal que $p(-1)>-1$, entonces la ecuación $f(x)=p(x)$ tiene al menos una solución c, con $c<-1$.

Solución:

i) La continuidad debe estudiarse en los puntos $x=-1$ y $x=1$. Será continua si los límites laterales coinciden en cada caso.

En $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-} x^3=-1\ ; \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(ax+1)=-a+1.$$

Será continua si $-1=-a+1 \Rightarrow a=2$.

En $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x+1)=3\ ; \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(x^2+bx+2\right)=b+3.$$

Será continua si $3=b+3 \Rightarrow b=0$.

ii) la función continua es: $f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{si } x<-1 \\ 2x+1, & \text{si } -1\le x\le 1. \\ x^2+2, & \text{si } x>1 \end{cases}$

Su derivada, salvo en los puntos $x=-1$ y $x=1$, que son los que se cuestionan, es:

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2, & \text{si } x<-1 \\ 2, & \text{si } -1<x<1 \\ 2x, & \text{si } x>1 \end{cases}$$

En $x=-1$:

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x)=\lim_{x\to -1^-} 3x^2=3\ ; \qquad \lim_{x\to -1^+} f'(x)=\lim_{x\to -1^-} 2=2.$$

No es derivable en $x=-1$.

En $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-} 2=2\ ; \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^-} 2x=2.$$

Es derivable en $x=1$.

iii) Si $p(x)=ax^5+bx^4+\ldots$, con $a>0$, como para $x<-1$, $f(x)=x^3$, la ecuación $f(x)=p(x)$ es $x^3=p(x)$.

Sea la función $F(x)=p(x)-f(x)=p(x)-x^3$, que es también es un polinomio de grado 5 y, por tanto, cumple el teorema de Bolzano.

Como su coeficiente principal $a>0$, para valores suficientemente grandes y negativos de x toma valores muy negativos, pues: $\lim_{x\to -\infty} F(x)=\lim_{x\to -\infty}\left(p(x)-x^3\right)=-\infty$.

Esto es, para algún valor negativo $k<-1$, $F(k)=p(k)-k^3<0$.

Y como $F(-1)=p(-1)-(-1)^3=p(-1)+1>0$, pues $p(-1)>-1$.

Por tanto (aplicando el teorema de Bolzano), la función $F(x) = p(x) - x^3$ tomará el valor 0 en algún punto $c \in (-\infty, -1)$.
Esto es, $F(c) = p(c) - c^3 = 0$, lo que significa que la ecuación $f(x) = p(x)$ tiene al menos una solución *c*, con $c < -1$.

22. Madrid, junio 16

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, donde ln denota el logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad de *f* y calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) (0,5 puntos) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$, en $x = 2$.

c) (1,5 puntos) Calcular $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Solución:
a) Será continua cuando coincidan los límites laterales en $x = 0$, que es el único punto dudoso.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1-x)}{1-x} = \frac{0}{1} = 0\,;\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} xe^{-x} = 0\cdot 1 = 0$$

Por tanto, es continua.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1-x)}{1-x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \rightarrow$ (Aplicando L´Hôpital) $\rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{-1}{1-x}}{-1} = \dfrac{0}{-1} = 0$.

b) La ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es:

$$y - f(2) = f´(2)\cdot(x-2)$$

Como $f(x) = xe^{-x}$ y $f(x) = e^{-x} - xe^{-x}$, se tendrá: $f(2) = 2\cdot e^{-2} = \dfrac{2}{e^2}$ y $f´(2) = -e^{-2} = -\dfrac{1}{e^2}$.

Luego, la ecuación de la recta tangente es: $y - \dfrac{2}{e^2} = -\dfrac{1}{e^2}\cdot(x-2) \Rightarrow y = -\dfrac{1}{e^2}x + \dfrac{4}{e^2}$.

23. Murcia, junio 16

Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\sin x(1-\sin x)}{\cos^2 x}$

Solución:
a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}\right) = \left[\dfrac{0}{0}\right] \rightarrow$ multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada del numerador $= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\left(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}\right)\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}{4x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x}{4x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}\right) =$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}\right)=\frac{1}{2\cdot(2+2)}=\frac{1}{8}.$$

b) $\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x(1-\sin x)}{\cos^2 x}=\left[\frac{0}{0}\right]\to$ Aplicando L´Hôpital =

$$= \lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x\cdot(1-\sin x)+\sin x(-\cos x)}{2\cos x\cdot(-\sin x)}=\left[\frac{0}{0}\right]= \text{(operando y simplificando)} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x\cdot(1-2\sin x)}{2\cos x\cdot(-\sin x)}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-1+2\sin x}{2\sin x}=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}.$$

24. Murcia, junio 16

a) [1,5 puntos] Calcule la siguiente integral indefinida $\int\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx$.

b) [1 punto] Determine el área del recinto limitado por el eje *OX*, las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$, y la gráfica de la función $f(x)=\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.

Solución:

a) La integral pedida es inmediata; basta con observar que el numerador es la derivada del denominador y recordar que $\int\frac{-f´(x)}{(f(x))^2}dx=\frac{1}{f(x)}+c$.

Por tanto:

$$\int\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx = -\int\frac{-(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx=-\frac{1}{x^2+x+1}+c.$$

b) Como en el intervalo [0, 2] la función toma valores positivos, el área pedida viene dada por la integral definida

$$\int_0^2\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}dx=\left[-\frac{1}{x^2+x+1}\right]_0^2 = -\frac{1}{7}-(-1)=\frac{6}{7}.$$

25. Murcia, junio 16

El número de personas, medido en miles, afectadas por una enfermedad infecciosa viene dado por la función $f(x)=\frac{90x}{x^2+2x+9}$, donde x es el tiempo transcurrido, medido en días, desde que se inició el contagio.

a) [0,5 puntos] ¿Cuál es el número de personas enfermas el cuarto día?

b) [1,5 puntos] ¿Qué día se alcanza el máximo número de personas enfermas? ¿Cuál es ese número máximo?

c) [0,5 puntos] ¿Puede afirmarse que la enfermedad se irá erradicando con el paso del tiempo? Razone la respuesta. (Indicación: calcule el límite de $f(x)$ cuando $x\to+\infty$ y observe qué ocurre).

Solución:

a) Como $f(4)=\dfrac{90\cdot 4}{4^2+2\cdot 4+9}=\dfrac{360}{33}\approx 10,909$, el número de personas enfermas el cuarto día será de 10909.

b) Hay que hallar el máximo de la función.
Derivando e igualando 0:

$$f'(x)=\frac{90\left(x^2+2x+9\right)-90x\left(2x+2\right)}{\left(x^2+2x+9\right)^2}=\frac{-90x^2+810}{\left(x^2+2x+9\right)^2}\Rightarrow f'(x)=0 \text{ en } x=-3 \text{ y en } x=3.$$

En $x = -3$ no tiene sentido.
Como a la izquierda de $x = 3$ la función es creciente $\left(f'(x)>0\right)$, y a la derecha es decreciente $\left(f'(x)<0\right)$, en $x = 3$ se da el máximo.

Ese máximo es $f(3)=\dfrac{90\cdot 3}{3^2+2\cdot 3+9}=\dfrac{270}{24}=11,25\to 11250$ personas.

c) Con el paso del tiempo la función decrece, lo que indica que el número de enfermos va siendo menor. Esto no implica su erradicación, pues podría tender a un número concreto, a estabilizarse. Para comprobar su erradicación hay que hacer el límite de $f(x)$ cuando $x\to+\infty$ y ver que tiende a 0, como efectivamente sucede:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{90x}{x^2+2x+9}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left(L'H\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{90}{2x+2}=0.$$

<u>**26**. Navarra, junio 16</u>
Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\tan x}{1-\cos(2x)} \quad \text{(1 punto)} \qquad\qquad \lim_{x\to 1}x^{\left(\frac{x}{\sin(\pi x)}\right)} \quad \text{(1 punto)}$$

<u>Solución</u>:
Ambos límites se pueden hacer aplicando L´Hôpital.

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{x\tan x}{1-\cos(2x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left(L'H\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+x\left(1+\tan^2 x\right)}{2\sin(2x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left(L'H\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan^2 x+\left(1+\tan^2 x\right)+x\left(2\tan x\cdot\left(1+\tan^2 x\right)\right)}{4\cos(2x)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

b) $\lim_{x\to 1}x^{\left(\frac{x}{\sin(\pi x)}\right)}=[1^\infty]$. Puede hacerse aplicando logaritmos y la regla de L´Hôpital.

$$\ln\left(\lim_{x\to 1}x^{\left(\frac{x}{\sin(\pi x)}\right)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\ln x^{\left(\frac{x}{\sin(\pi x)}\right)}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{\sin(\pi x)}\ln x=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{\sin(\pi x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\left(L'H\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}}{\pi\cos(\pi x)}=\frac{0+1}{\pi\cdot(-1)}=-\frac{1}{\pi}.$$

Por tanto, $\lim_{x\to 1}x^{\left(\frac{x}{\sin(\pi x)}\right)}=e^{-1/\pi}$.

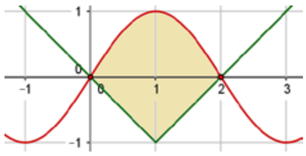
27. Navarra, junio 16

Dadas las funciones $f(x)=|x-1|-1$ y $g(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, encuentra los dos puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas. (3 puntos)

Solución:

La función $f(x)=|x-1|-1 = \begin{cases} -x, & \text{si } x<1 \\ x-2, & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$.

Si se cortan: $f(x)=g(x) \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)=-x, & \text{si } x<1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)=x-2, & \text{si } x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, & \text{si } x<1 \\ x=2, & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$.



Para $0\leq x<1$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)>-x$, cuya solución es $x = 0$;

y para $1\leq x\leq 2$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)>x-2$, con solución $x = 2$.

Por tanto, el área pedida viene dada por:

$$\int_0^1\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+x\right)dx+\int_1^2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)-x+2\right)dx =$$

$$=\left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1+\left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$=\left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{2}{\pi}\cos 0\right)+\left(-\frac{2}{\pi}\cos\pi-2+4-\left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}+2\right)\right) =$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}+\frac{1}{2}=\frac{4}{\pi}+1 \text{ u}^2.$$

28. Navarra, junio 16

Dada la función $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)e^{x^2}$, demuestra que existe un valor $\alpha\in(-1, 1)$ tal que $f´(\alpha)=2$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (3 puntos)

Solución:

$$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)e^{x^2} \Rightarrow f´(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\cdot 2\pi x\cdot e^{x^2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\cdot 2xe^{x^2}.$$

Si se extrae factor común y se iguala a 2 se tiene:

$$f´(x)=2xe^{x^2}\left(\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\right)=2 \to \text{No es posible resolverla.}$$

Por tanto hay que buscar otra alternativa.

Puede probarse cuánto vale $f´(x)$ en los extremos del intervalo dado:

$$f´(-1)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2\pi(-1)\cdot e+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2\cdot(-1)e=-2e$$

$$f'(1) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2\pi\cdot e + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2\cdot e = 2e\,.$$

Como la función $f'(x)$ es continua y derivable en todo **R**, en particular en el intervalo dado, verifica el teorema de los valores intermedios, que dice: Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces la función toma todos los valores comprendidos (intermedios) entre $f(a)$ y $f(b)$. Esto es, para cualquier valor c, $f(a) \le c \le f(b)$, existe un punto $\alpha \in [a, b]$, tal que $f(\alpha) = c$.

Como $f'(x)$ toma los valores $f'(-1) = -2e$ y $f'(1) = 2e$ y $-2e < 2 < 2e$, por el teorema, existe un valor $\alpha \in (-1, 1)$ tal que $f'(\alpha) = 2$.

Nota: El problema inicial sugiere el uso del teorema del valor medio (incrementos finitos; de Lagrange), que dice: Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Pero, en este caso, como $f(-1) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)e = e$ y $f(1) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)e = e$, lo que puede asegurarse de manera inmediata es que existe un punto $\alpha \in (-1, 1)$ tal que $f'(\alpha) = 0$ (teorema de Rolle).

29. País vasco, junio 16

Dada la función $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + C$

a) Calcula los valores de los parámetros A, B y C de manera que la función satisfaga las siguientes propiedades:

- Pase por el punto (0, 0).
- Tenga un máximo local en el punto (1, 2).

b) Calcula todos los valores de la variable x en los que la gráfica de la función tiene tangente horizontal.

Solución:

a) Por pasar por el punto (0, 0) $\Rightarrow$ $f(0) = 0 \to 0 = C$.

Por tener un máximo local en el punto (1, 2) $\Rightarrow$ $f(1) = 2$ y $f'(1) = 0$.

Como $f'(x) = 3Ax^2 + 2Bx$, se tendrá: $\begin{cases} f(1) = 2 \to A + B = 2 \\ f'(1) = 0 \to 3A + 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -4;\ B = 6$.

La función es $f(x) = -4x^3 + 6x^2$.

b) La tangente es horizontal en los puntos con derivada 0.

$$f'(x) = -12x^2 + 12x = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = 1.$$

30. País vasco, junio 16

Resolver la siguiente integral: $\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x\left(x^2 + x - 2\right)}dx$.

Solución:

Como las raíces del denominador son $x = 0$, $x = 1$ y $x = -2$, se hace la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{2x^2+5x-1}{x\left(x^2+x-2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x+2)} = \frac{A\left(x^2+x-2\right)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x\left(x^2+x-2\right)} \Rightarrow$$

$$\frac{2x^2+5x-1}{x\left(x^2+x-2\right)} = \frac{x^2(A+B+C)+x(A+2B-C)-2A}{x\left(x^2+x-2\right)}.$$

Por identificación de coeficientes:

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ A+2B-C=5 \\ -2A=-1 \end{cases} \Rightarrow E2+E1 \begin{cases} A+B+C=2 \\ 2A+3B=7 \\ -2A=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1/2 \\ B=2 \\ C=-1/2 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x^2+5x-1}{x\left(x^2+x-2\right)}dx=\int\left(\frac{1/2}{x}+\frac{2}{(x-1)}-\frac{1/2}{(x+2)}\right)dx = \frac{1}{2}\ln x+2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x+2)+c.$$