ALGUNOS PROBLEMAS DE ÁLGEBRA PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE SELECTIVIDAD DE 2016

1. Aragón, junio 16

a) (2 puntos) Sea λ un parámetro real cualquiera, determina para qué valores de λ el sistema que aparece a continuación es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{cases} -x+\lambda y+\lambda z=4 \\ \lambda x+\lambda y+z=6 \\ -\lambda x+\lambda y+\lambda z=3+\lambda \end{cases}$$

b) (1 punto) Resuélvelo, si es posible, para λ = 2.

Solución:

a) Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema será compatible determinado cuando el rango de ambas matrices sea 3, que es el número de incógnitas; será compatible indeterminado si tienen el mismo rango, pero menor 3; y será incompatible cuando el rango de A sea menor que el rango de M.

Las matrices son: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \lambda & \lambda & 4 \\ \lambda & \lambda & 1 & 6 \\ -\lambda & \lambda & \lambda & 3+\lambda \end{array}\right)=M$

Conviene transformar ambas matrices: $A=\begin{array}{c} \\ \\ F3-F1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & \lambda & \lambda & 4 \\ \lambda & \lambda & 1 & 6 \\ -\lambda+1 & 0 & 0 & -1+\lambda \end{array}\right)=M$

El determinante de A, $|A|=\begin{vmatrix} -1 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \\ -\lambda+1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-\lambda+1)\left(\lambda-\lambda^2\right)$.

Este determinante vale 0 si λ = 1 o λ = 0.

Con esto:

- Si λ ≠ 1 y 0 ⇒ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si λ = 1 se tendrá, sustituyendo en la matriz transformada (aunque puede hacerse en la primera): $A=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=M$ ⇒ r(A) = r(M) = 2. El sistema será compatible indeterminado con un grado de indeterminación.
- Si λ = 0 se tendrá: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)=M$ ⇒ r(A) = 2; r(M) = 3. El sistema será incompatible.

En efecto: $|M_1|=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=1-3=-2\neq 0$.

b) Si λ = 2 el sistema es compatible determinado, equivalente a:

$$\begin{cases} -x+2y+2z=4 \\ 2x+2y+z=6 \\ -2x+2y+2z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2+2E1 \\ E3-2E1 \end{matrix} \begin{cases} -x+2y+2z=4 \\ 6y+5z=14 \\ -2y-2z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3E3+E2 \end{matrix} \begin{cases} -x+2y+2z=4 \\ 4y+5z=14 \\ -z=5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+13-10=4 \to x=-1 \\ 6y-25=14 \to y=13/2 \\ z=-5 \end{cases}$$

2. Aragón, junio 16

Opción B. 1. b) (1 punto) Se considera una matriz de orden 3 × 3 cuyas columnas son $C1$, $C2$ y $C3$ y cuyo determinante es 2.

Se define ahora la matriz B cuyas columnas son $-C2$, $C3+C2$ y $3C1$. Determine el determinante de la inversa de B, si existe.

Solución:

Utilizando las propiedades de los determinantes se tiene:

$$\det\left(-C2, C3+C2, 3C1\right) = -\det\left(C2, C3+C2, 3C1\right) = -3\det\left(C2, C3, C1\right) =$$

→ Se ha extraído el – de la primera columna y el 3 de la 3ª; y se ha restado $C2$ a la segunda columna del determinante.

$$= +3\det\left(C3, C2, C1\right) = -3\det\left(C1, C2, C3\right) = -3\cdot 2 = -6.$$

→ Se han intercambiado columnas.

Por tanto, el determinante de la inversa de B valdrá –1/6.

3. Asturias, junio 16

Dados los números reales a y b se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{pmatrix}$.

a) Obtenga el determinante de A. (1 punto)

b) Estudie el rango de A dependiendo de los valores de a y b. (1,5 puntos)

Solución:

a) Haciendo transformaciones de Gaauss:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a+b & a & a \\ 3a+b & a+b & a \\ 3a+b & a & a+b \end{vmatrix} = (3a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a+b & a \\ 1 & a & a+b \end{vmatrix}$$ → (se han sumado las tres columnas y sacado "factor común" $3a+b$ de la primera columna) →

$$= \begin{matrix} F2-F1 \\ F3-F1 \end{matrix} (3a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = (3a+b)b^2.$$

b) Como $(3a+b)b^2 = 0$ cuando $b = 0$ o $b = -3a$ se tendrá:

- Si $b \neq 0$ y $b \neq -3a$ el rango de A será 3.
- Si $b = 0$, la matriz es $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$, cuyo rango es 1 si $a \neq 0$; y 0 si $a = 0$.

- Si $b \neq 0$ pero $b = -3a$, la matriz es $A = \begin{pmatrix} -2a & a & a \\ a & -2a & a \\ a & a & -2a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 0 & -2a & a \\ 0 & a & -2a \end{pmatrix}$ → (sumando las tres columnas).

Sus menores de orden dos no nulos valen $\pm 3a^2$. Por tanto, si $b = -3a$ con $a \neq 0$, el rango valdrá 2.

4. Asturias, junio 16

Considere un número de tres cifras cumpliendo que la suma de su número de decenas y su número de unidades es 5, y si al número original le restamos el número escrito con los dígitos en orden contrario, se obtiene 792.

a) Escriba el sistema de ecuaciones lineales. (1 punto)

b) Determine la matriz del sistema y la matriz ampliada. (0,5 puntos)

c) Obtenga los posibles números en las condiciones dadas. (1 punto)

Solución:

Sea "*XYZ*" el número.

a) De acuerdo con el enunciado se cumple:

$$\begin{cases} Y + Z = 5 \\ "XYZ" - "ZYX" = 792 \end{cases}$$

Como $XYZ = 100X + 10Y + Z$ y $ZYX = 100Z + 10Y + X \Rightarrow XYZ - ZYX = 99X - 99Z$.

Por tanto:

$$\begin{cases} Y + Z = 5 \\ "XYZ" - "ZYX" = 792 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y + Z = 5 \\ 99X - 99Z = 792 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y + Z = 5 \\ X - Z = 8 \end{cases}.$$

b) Matriz de coeficientes del sistema: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Matriz ampliada: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.

c) Transformando el sistema:

$\begin{cases} Y + Z = 5 \\ X - Z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = 5 - Z \\ X = 8 + Z \end{cases}$ → Como las cifras no pueden ser negativas ni mayores de 9, los valores para *Z* den ser 0 o 1. Por tanto:

Si *Z* = 0, el número será: 850.

Si *Z* = 1, el numero es 941.

5. Castilla La Mancha, junio 16

Sabiendo que $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = 10$, donde *x*, *y*, *z*, *a*, *b* y *c* ∈**R**, calcula los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta. (1,25 puntos cada determinante).

Solución:

Se extrae "factor común" de las filas 1ª y 3ª: después se resta a la 2ª fila el doble de la 1ª.

$$\begin{vmatrix} 14 & 14 & 21 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ \frac{a}{5} & \frac{2b}{5} & \frac{3c}{5} \end{vmatrix} = 7\cdot\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x+4 & y+4 & z+6 \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = 7\cdot\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = 7\cdot\frac{1}{5}\cdot 10 = 14\,.$$

Se desarrolla el determinante por la 1ª columna; después se intercambian las filas como se indica en cada caso (cada cambio de filas implica un cambio de signo):

$$\begin{vmatrix} 0 & 3x & y & z \\ 0 & 3a & 2b & 3c \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 3x & y & z \\ 3a & 2b & 3c \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{F1 \leftrightarrow F3}{=} +5\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 3a & 2b & 3c \\ 3x & y & z \end{vmatrix} \underset{F3 \leftrightarrow F2}{=} -5\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 3x & y & z \\ 3a & 2b & 3c \end{vmatrix} = -5\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ a & 2b & 3c \end{vmatrix} = -5\cdot 3\cdot 10 = -150\,.$$

$\rightarrow$ En el último paso se ha extraído el factor 3 de la primera columna.

6. Cataluña, junio 16

Responda a las siguientes cuestiones:

a) (1 punto) Calcule todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$ que satisfacen la igualdad $A^2 + A = 2I$, donde I es la matriz identidad.

b) (1 punto) Justifique que si A es una matriz cuadrada que cumple la igualdad $A^2 + A = 2I$, entonces A es invertible, y calcule la expresión de A^{-1} en función de las matrices A e I.

Solución:

a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^2 + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I\,.$$

Todas las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$ satisfacen la igualdad $A^2 + A = 2I$. No depende del valor de m.

b) Si $A^2 + A = 2I \Rightarrow A(A+I) = 2I$.

Por tanto,

$$|A(A+I)| = |2I| \Rightarrow |A| \cdot |A+I| = 2 \cdot |I| \Rightarrow |A| \cdot |A+I| = 2 \Rightarrow |A| \neq 0.$$

Luego, A es invertible.

Su inversa será $A^{-1} = \frac{1}{2}(A+I)$.

En efecto: $A \cdot A^{-1} = A \cdot \frac{1}{2}(A+I) = \frac{1}{2}A(A+I) = \frac{1}{2} \cdot 2I = I$.

<u>7. Comunidad Valenciana, junio 16</u>

Se da la matriz $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La comprobación de que $A^{-1} = 5^{-1} A^t$, siendo A^t la matriz traspuesta de A (4 *puntos*)

b) Los valores del parámetro real λ para los cuales $A - \lambda I$ no es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. (3 *puntos*)

c) El determinante de una matriz cuadrada cuyo determinante es mayor que 0 y verifica la ecuación $B^{-1} = B^t$. (3 *puntos*)

<u>Solución</u>:

a) Si se multiplica $A^{-1} = 5^{-1} A^t$ por A, por la derecha, se tiene: $A^{-1}A = 5^{-1}A^tA \Leftrightarrow I = 5^{-1}A^tA$.

Efectivamente es así, pues:

$$5^{-1} \cdot (A^tA) = 5^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 5^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $$A - \lambda I = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Esa matriz no tendrá inversa cuando su determinante valga 0.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} \sqrt{5}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \left(\sqrt{5}-\lambda\right)\left((1-\lambda)^2 + 4\right) = 0 \Rightarrow \lambda = \sqrt{5}.$$ (No hay más raíces).

c) Si $B^{-1} = B^t$, multiplicando miembro a miembro por la matriz B se tendrá:

$$B \cdot B^{-1} = B \cdot B^t \Rightarrow I = B \cdot B^t$$

Teniendo en cuenta que el determinante de una matriz es igual al de su traspuesta: $|A| = |A^t|$; y que el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes: $|A \cdot P| = |A| \cdot |P|$, entonces:

$$|I| = |B| \cdot |B^t| \Rightarrow 1 = |B|^2 \Rightarrow |B| = \pm 1.$$

Como se desea que su determinante sea positivo, la respuesta es: $|B|=1$.
Observación: La matrices que cumplen esta propiedad se llaman ortogonales.

8. Madrid, junio 16
a) (1,5 puntos) Despeje X en la ecuación matricial $X\left(CD\right)^{-1}=A+X\left(D^{-1}C^{-1}-B\right)$, siendo A, B, C, D matrices cuadradas invertibles. Exprese X de la forma más simple posible.
b) (1,5 puntos) Para $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ determine la matriz Y tal que $YB=A$.
Solución:
a) $X\left(CD\right)^{-1}=A+X\left(D^{-1}C^{-1}-B\right)$ $\rightarrow$ teniendo en cuenta que $\left(CD\right)^{-1}=D^{-1}C^{-1}$, se tiene:

$$X\left(CD\right)^{-1}=A+X\left(D^{-1}C^{-1}\right)-XB \Rightarrow X\left(CD\right)^{-1}=A+X\left(CD\right)^{-1}-XB \Rightarrow O=A-XB \Rightarrow$$

$\Rightarrow XB=A \Rightarrow X=AB^{-1}$. (Se ha multiplicado por B^{-1} por la derecha).

b) $YB=A \Rightarrow Y=AB^{-1}$.
La inversa de B es $B^{-1}=\dfrac{\left(Adj(B)\right)^t}{|B|}$, siendo $Adj\left(B\right)$ la matriz de los adjuntos de B.

Dicha inversa existe si $|B|\neq 0$. En efecto: $|B|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-1+2+1=2$.

La matriz de los adjuntos es: $\left(B_{ij}\right)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Luego $B^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Con esto:

$$X=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -4 & 1\\ -2 & -2 & 2\\ -1 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

9. Navarra, junio 16
Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, calcula A^{57} y A^{-68}.
Solución:
Se hacen algunas potencias de A.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix};\ A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix};$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix};\ A^5 = A \cdot A^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como puede observarse:

- Las potencias impares son de la forma: $A^{2n-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2n-1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{57} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 57 & -1 \end{pmatrix}$.
- Las potencias pares son de la forma: $A^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2n & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-68} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 68 & 1 \end{pmatrix}$.

También podría hacerse la inversa de $A^{68} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -68 & 1 \end{pmatrix}$, que es $A^{-68} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 68 & 1 \end{pmatrix}$.

→ Aplicando el método de inducción puede deducirse que $A^n = (-1)^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ n & -1 \end{pmatrix}$.

En efecto:

La igualdad se cumple para n = 1: $A^1 = (-1)^{1-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$.

Hay que ver que también se cumple para n + 1:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = (-1)^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n-1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot (-1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ n+1 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{(n+1)-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ n+1 & -1 \end{pmatrix}.$$

→ Faltaría demostrar que también es válido para valores enteros negativos.

Es así porque $|A| = 1 \Rightarrow |A|^n = 1 \Rightarrow \left(A^n\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n = A^{-n}$.

<u>**10**. País Vasco, junio 16</u>

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Encuentra los valores del parámetro a para que la matriz no sea inversible.
b) En caso de existir, calcula la inversa de A para a = 2.
<u>Solución</u>:
a) Una matriz cuadrada es inversible cuando su determinante es distinto de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = a(2a-2) + 2 - (a-2) - (2 - a(a-2)) = 3a^2 - 5a + 2$$

$$|A| = 3a^2 - 5a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \begin{cases} 1 \\ 2/3 \end{cases}.$$

La matriz A no es invertible cuando a = 1 o $a = \dfrac{2}{3}$.

b) Si a = 2 la matriz es $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ tiene inversa, pues $|A| = 3\cdot 2^2 - 5\cdot 2 + 2 = 4$.

Su inversa es: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} Adj(A)^t$.

La matriz adjunta es $Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

11. País Vasco, julio 16

Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro b

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+2y+bz=-3 \\ x-2y-z=b \end{cases}$$

Encontrar la solución, si existe, para el caso b = 2.

Solución:

Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada. El sistema será compatible determinado cuando el rango de ambas matrices sea 3, que es el número de incógnitas; será compatible indeterminado si tienen el mismo rango, pero menor 3; y será incompatible cuando el rango de A sea menor que el rango de M.

Las matrices son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & b & -3 \\ 1 & -2 & -1 & b \end{array}\right) = M$

El determinante de A, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & b \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3b-3$.

Este determinante vale 0 si b = 1; y es distinto de 0 si $b \neq 1$.

Con esto:

- Si $b \neq 1 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si b = 1 se tendrá, sustituyendo en las matrices: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) = M$.

En este caso:

El rango de A es 2, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \to$ (Puede observarse que las filas 2ª y 3ª son opuestas).

El rango de M es 3, pues $|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -4-2 \neq 0$ r(A) = r(M) = 2.

El sistema será incompatible.

- Para b = 2 el sistema será compatible determinado.

Queda: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+2y+2z=-3 \\ x-2y-z=2 \end{cases}$.

Su solución, aplicando la regla de Cramer, es:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{3}{3}=1;\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}=0;\ z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-3}{3}=-1$$