ALGUNOS PROBLEMAS DE GEOMETRÍA PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE SELECTIVIDAD DE 2015

1. Andalucía, junio 15

Sean los puntos $A(0, 1, 1)$, $B(2, 1, 3)$, $C(–1, 2, 0)$ y $D(2, 1, m)$.

a) [0,75 puntos] Calcula m para que A, B, C y D estén en el mismo plano.

b) [0,75 puntos] Determina la ecuación del plano respecto del cual A y B son simétricos.

c) [1 punto] Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C.

Solución:

a) Los puntos A, B, C y D están en el mismo plano cuando los vectores $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$ y $\boldsymbol{AD}$ sean linealmente dependientes, lo que implica que el determinante asociado valdrá 0.

$\boldsymbol{AB} = (2, 1, 3) – (0, 1, 1) = (2, 0, 2)$; $\boldsymbol{AC} = (–1, 2, 0) – (0, 1, 1) = (–1, 1, –1)$;

$\boldsymbol{AD} = (2, 1, m) – (0, 1, 1) = (2, 0, m – 1)$

El determinante asociado es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = 2(m-1)-4=0 \Rightarrow m=3$$

Los cuatro puntos dados estarán en el mismo plano cuando $m = 3$.

b) Es el plano mediador: el que pasa por el punto medio de A y B y tiene como vector característico a $\boldsymbol{AB}$.

El punto medio de A y B es: $P\left(\dfrac{0+2}{2},\dfrac{1+1}{2},\dfrac{1+3}{2}\right) \to P(1,1,2)$

Como $\boldsymbol{AB} = (2, 0, 2)$, el plano pedido es:

$$\pi \equiv 2(x-1)+0(y-1)+2(z-2)=0 \Rightarrow \pi \equiv 2x+2z-6=0 \;\Rightarrow\; \pi \equiv x+z-3=0$$

c) El área del triángulo de vértices A, B y C viene dada por $S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

Como $\boldsymbol{AB} = (2, 0, 2)$ y $\boldsymbol{AC} = (–1, 1, –1)$ se tiene que:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2,\ 0,\ 2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Luego, la superficie del triángulo será: $S=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

2. Andalucía, junio 15

Sea el plano $\pi \equiv 2x+y-z+8=0$.

a) [1,5 puntos] Calcula el punto $P´$, simétrico del punto $P(2, –1, 5)$ respecto del plano π.

b) [1 punto] Calcula la recta $r´$, simétrica de la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-5}{1}$ respecto del plano π.

Solución:

a) Ambos puntos, P y $P’$ estarán en la recta s, perpendicular a π por P. Además, si M es el punto de corte de la recta y el plano, M debe ser el punto medio entre P y $P´$.

La recta perpendicular al plano π desde P es: $s \equiv \begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1+t \\ z = 5-t \end{cases}$.

Corte de s con π: Se sustituyen las ecuaciones de s en la del plano.

$\pi \equiv 2(2+2t)+(-1+t)-(5-t)+8=0 \Rightarrow 6t+6=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow M(0, -2, 6)$.

Sea $P' = (x_0, y_0, z_0)$ el simétrico de P respecto de π.

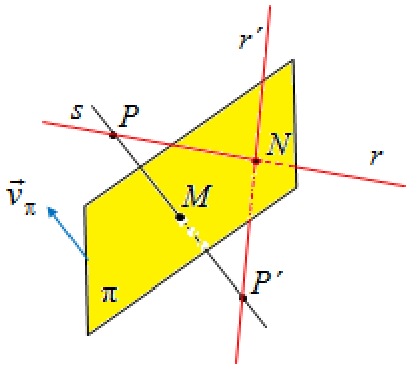
Punto medio de P y P': $\left(\dfrac{2+x_0}{2}, \dfrac{-1+y_0}{2}, \dfrac{5+z_0}{2}\right)$

Como $M(0, -2, 6) = \left(\dfrac{2+x_0}{2}, \dfrac{-1+y_0}{2}, \dfrac{5+z_0}{2}\right) \Rightarrow$

$0 = \dfrac{2+x_0}{2} \Rightarrow x_0 = -2$; $-2 = \dfrac{-1+y_0}{2} \Rightarrow y_0 = -3$; $6 = \dfrac{5+z_0}{2} \Rightarrow z_0 = 7$

Por tanto, $P' = (-2, -3, 7)$.

b) La recta r contiene al punto P. Por tanto, su simétrica respecto a π queda definida por el punto P' y por el punto de corte de r con π.



Corte de r con π.

$r \equiv \begin{cases} x = 2-2h \\ y = -1+3h \\ z = 5+h \end{cases} \to$ Se sustituye en π:

$\pi \equiv 2(2-2h)+(-1+3h)-(5+h)+8=0 \Rightarrow h = 3$

Luego $N = (-4, 8, 8)$.

Además, el vector $\mathbf{NP'} = (-2, -3, 7) - (-4, 8, 8) = (2, -11, -1)$

La recta simétrica queda definida por N y P'. Su ecuación es: $r' \equiv \begin{cases} x = -4+2t \\ y = 8-11t \\ z = 8-t \end{cases}$.

<u>**3**. Aragón, junio 15</u>

2. (2 puntos) a) (1 punto) Determina, como intersección de dos planos, la ecuación de la recta paralela a la recta:

$r: \begin{cases} 5x-3y+2z=1 \\ x+3y-2z=-4 \end{cases}$

que pasa por el punto $(0, 2, -4)$.

b) (1 punto) Determina la distancia del punto $P = (1, 1, 0)$ a la recta r anterior.

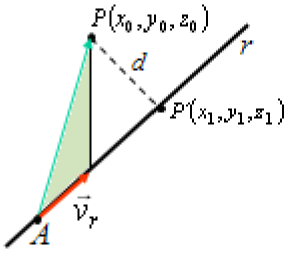
<u>Solución</u>:

a) Los planos que determinen a la paralela buscada deben ser paralelos a los que determinan a r pero pasando por el punto $(0, 2, -4)$.

Esos planos serán: $r': \begin{cases} 5x-3y+2z=d \\ x+3y-2z=e \end{cases}$

Sustituyendo el punto: $(0, 2, -4) \to \begin{cases} 0-6-8=d \\ 0+6+8=e \end{cases} \Rightarrow d=-14; e=14 \Rightarrow r': \begin{cases} 5x-3y+2z=-14 \\ x+3y-2z=14 \end{cases}$

b) La ecuación de la distancia de un punto P a una recta r es:



$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|},\ \text{siendo } A\in r.$$

El punto A y el vector $\vec{v}_r$ se obtienen expresando la recta r en paramétricas.

$$r:\begin{cases}5x-3y+2z=1\\x+3y-2z=-4\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}5x-3y=1-2z\\x+3y=-4+2z\end{cases}\underset{E2+E1}{\Rightarrow}\begin{cases}5x-3y=1-2z\\6x=-3\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x=-1/2\\y=t\\z=7/4+3t/2\end{cases}$$

Luego: A = (–1/2, 0, 7/4), P = (1, 1, 0), $\overrightarrow{AP}$ = (3/2, 1, –7/4), $\vec{v}_r$ = (0, 1, 3/2)

El producto vectorial vale:

$$\overrightarrow{AP}\times\vec{v}_r=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\3/2 & 1 & -7/4\\0 & 1 & 3/2\end{vmatrix}=\left(\frac{13}{4},-\frac{9}{4},\frac{3}{2}\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}_r\right|=\sqrt{\frac{169}{16}+\frac{81}{16}+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{286}}{4}$$

El módulo de $\vec{v}_r$: $\left|\vec{v}_r\right|=\sqrt{1+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Luego $d(P,r)=\frac{\sqrt{286}/4}{\sqrt{13}/2}=\frac{\sqrt{22}}{2}$.

4. Asturias, septiembre 15

Los puntos A(1, 0, 0) y B(0, 2, 1) son los vértices que forman el lado desigual de un triángulo isósceles. Se sabe que el tercer vértice pertenece a la recta $r:\left.\begin{matrix}y=0\\z=10\end{matrix}\right\}$.

a) Halla las coordenadas del tercer vértice. (1,5 puntos)
b) Encuentra el área del triángulo. (1 punto)

Solución:

a) Si el vértice C pertenece a la recta dada, sus coordenadas serán: $C(t,0,10)$.

Si los vértices A y B determinan el lado desigual, para que el triángulo ABC sea isósceles es necesario que los lados AC y BC sean iguales, luego:

$$d(A,C)=\sqrt{(1-t)^2+0+(-10)^2}=\sqrt{(-t)^2+2^2+(1-10)^2}=d(B,C)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(1-t)^2+100=t^2+85\Rightarrow1-2t+100=85\Rightarrow t=8$$

Por tanto, el tercer vértice debe ser C(8, 0 10).

b) El área del triángulo de vértices A, B y C viene dada por

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

En este caso:

AB = (0, 2, 1) – (1, 0, 0) = (–1, 2, 1); **AC** = (8, 0, 10) – (1, 0, 0) = (7, 0, 10)

Como:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ -1 & 2 & 1\\ 7 & 0 & 10\end{vmatrix}=(20,\ \ 17,\ \ -14)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{400+289+196}=\sqrt{885}$$

Luego, la superficie del triángulo será: $S=\dfrac{\sqrt{885}}{2}$.

<u>**5**. Baleares, junio 15</u>
Estudia la posición relativa de las rectas:

$$r:\frac{x-2}{-3}=\frac{y-3}{5}=z,\qquad s:\begin{cases}x=1-t\\ y=2t\\ z=5\end{cases}$$

y, en caso de que se corten, encuentra el punto de intersección.
<u>Solución</u>:

Ecuaciones paramétricas de *r*: $r:\begin{cases}x=2-3h\\ y=3+5h\\ z=h\end{cases}$.

Si las rectas se cortan, debe ser compatible el sistema: $\begin{cases}2-3h=1-t\\ 3+5h=2t\\ h=5\end{cases}$ (se han igualado las respectivas componentes de una y otra recta).
Efectivamente es compatible, con solución h = 5 y t = 14.
Por tanto, el punto de corte será P(–13, 28, 5).

<u>**6**. Cantabria, junio 15</u>
Sean *A*, *B* y *C* los puntos de coordenadas *A* = (2, –1, 2), *B* = (1, 0, 0), *C* = (2, 4, –3) y sea *r* la recta $r\equiv\begin{cases}2y-z=0\\ x+z=2\end{cases}$.

a) Calcula las ecuaciones de la recta que pasas por el punto *A* y por el punto medio del segmento *BC*.
b) Calcula el área del triángulo *ABC*.
c) Calcula la distancia del punto *C* a la recta *r*.
<u>Solución</u>:

a) El punto medio del segmento *BC* es $M=\left(\dfrac{1+2}{2},\dfrac{0+4}{2},\dfrac{0-3}{2}\right)=(3/2,2,-3/2)$.

El vector de dirección de la recta es ***AM*** = (3/2, 2, –3/2) – (2, –1, 2) = (–1/2, 3, –7/2).

La recta pedida es: $s\equiv\begin{cases}x=2-t/2\\ y=-1+3t\\ z=2-7t/2\end{cases}\Leftrightarrow s\equiv\begin{cases}x=2-h\\ y=-1+6h\\ z=2-7h\end{cases}$.

b) El área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C* viene dada por: $S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

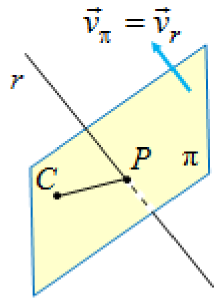
En este caso:
AB = (1, 0, 0) – (2, –1, 2) = (–1, 1, –2); ***AC*** = (2, 4, –3) – (2, –1, 2) = (0, 5, –5)

Como:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ -1 & 1 & -2\\ 0 & 5 & -5\end{vmatrix}=(5,\ -5,\ -5)\ \Rightarrow\ \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{25+25+25}=5\sqrt{3}$$

Luego, la superficie del triángulo será: $S=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

c) La distancia de C a la recta r es iguala a la distancia entre el punto C y el punto de corte del plano π, perpendicular a r por C.



La recta r en paramétricas es: $r\equiv\begin{cases}x=2-2t\\ y=t\\ z=2t\end{cases}\Rightarrow \vec{v}_r=(-2,1,2)$.

El plano π, perpendiculara a r por C, es:

$$\pi:-2(x-2)+(y-4)+2(z+3)=0\Rightarrow \pi:-2x+y+2z+6=0.$$

Corte de π con r: $-2(2-2t)+t+2\cdot 2t+6=0\Rightarrow t=-2/9\Rightarrow$

$$P\left(2+\frac{4}{9},-\frac{2}{9},-\frac{4}{9}\right)\to P\left(\frac{2}{9},-\frac{22}{9},-\frac{4}{9}\right)\ \Rightarrow\ \overrightarrow{CP}=\left(\frac{22}{9},-\frac{2}{9},-\frac{4}{9}\right)-(2,4,-3)=\left(\frac{4}{9},-\frac{38}{9},\frac{23}{9}\right)$$

Luego,

$$d(C,r)=d(C,P)=\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(-\frac{38}{9}\right)^2+\left(\frac{23}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{1989}{81}}=\frac{\sqrt{221}}{3}$$

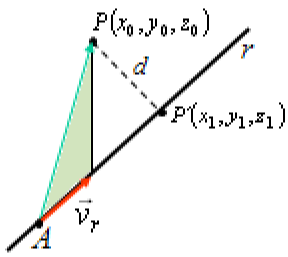
<u>7. Castilla– La Mancha, junio 15</u>

a) Calcula la distancia del punto $P(-1, 2, 0)$ a la recta $r\equiv\begin{cases}-x+y+2z=0\\ y+z=1\end{cases}$ (1,25 puntos)

b) Calcula el punto simétrico de P respecto de r. (1,25 puntos)

<u>Solución</u>:

a) La ecuación de la distancia de un punto P a una recta r es:



$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|},\ \text{siendo } A\in r.$$

El punto A y el vector $\vec{v}_r$ se obtienen expresando la recta r en paramétricas.

$$r\equiv\begin{cases}-x+y+2z=0\\ y+z=1\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=y+2z\\ y=1-z\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=1+t\\ y=1-t\\ z=t\end{cases}$$

Luego: $A=(1,1,0)$, $P=(-1,2,0)$), $\overrightarrow{AP}=(-2,1,0)$, $\vec{v}_r=(1,-1,1)$

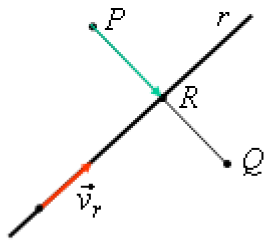
El producto vectorial vale:

$$\overrightarrow{AP}\times\vec{v}_r=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=(1,\ 2,\ 1)\ \Rightarrow\ \left|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}_r\right|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$$

Como $|\vec{v}_r| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$, se tiene que $d(P,r) = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$

b) Si Q es el simétrico de P respecto la recta, se cumplen dos cosas:

- Su punto medio R debe ser de la recta.
- El vector $\boldsymbol{PR}$ debe ser perpendicular al vector $\vec{v}_r$ de dirección de la recta. Esto es, debe cumplirse que $\vec{v}_r \cdot \boldsymbol{PR} = 0$.



Sea R un punto genérico de la recta: $R = (1 + t, 1 - t, t)$.
Por tanto: $\boldsymbol{PR} = (1 + t, 1 - t, t) - (-1, 2, 0) = (t + 2, -1 - t, t)$

- $\vec{v}_r \cdot \boldsymbol{PR} = 0 \Rightarrow (1, -1, 1) \cdot (t + 2, -1 - t, t) = t + 2 + 1 + t + t = 0 \Rightarrow 3t + 3 = 0 \Rightarrow t = -1$.

Sustituyendo en la recta se obtiene $R = (0, 2, -1)$.

- Si $Q = (a, b, c)$, el punto medio entre P y Q es: $R = \left(\dfrac{-1+a}{2}, \dfrac{b+2}{2}, \dfrac{c}{2}\right)$

Igualando las coordenadas de *ambos* R se tiene:

$$\frac{-1+a}{2} = 0 \Rightarrow a = 1; \quad \frac{b+2}{2} = 2 \Rightarrow b = 2; \quad \frac{c}{2} = -1 \Rightarrow c = -2.$$

El punto el punto simétrico de P respecto de r es: $Q = (1, 2, -2)$.

8. Castilla y León, junio 15

a) Calcular la recta que corta perpendicularmente al eje OZ y que pasa por el punto $P = (1, 2, 3)$. (1,25 puntos)

b) Estudiar, en función del parámetro a, la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + y + az = 1$. (1,25 puntos)

Solución:

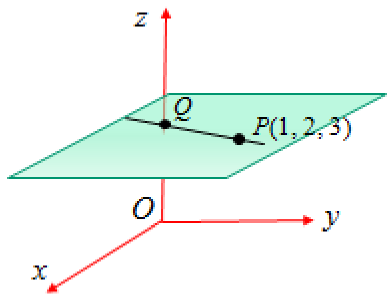
a) La recta pedida debe estar en el plano $z = d$, perpendicular al eje OZ. Como debe pasar por el punto P(1, 2, 3) $\Rightarrow d = 3$. Luego, el plano es $z = 3$.

Como la recta corta al eje, debe pasar por el punto de corte del plano con el eje, que es $Q(0,0, 3)$.

Por tanto, el vector director de la recta será:

$\boldsymbol{PQ} = (0, 0, 3) - (1, 2, 3) = (-1, -2, 0)$.

La recta pedida es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 \end{cases}$.



b) Si se sustituyen las ecuaciones de la recta en la del plano se obtiene: $az = 1$, que es una ecuación compatible siempre que $a \neq 0$.

Por tanto, la recta r y el plano π se cortarán siempre que $a \neq 0$; no lo harán cuando $a = 0$.

9. Castilla y León, junio 15

a) ¿Puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de $\mathbf{R}^3$ tales que $\vec{u}\cdot\vec{v}=-3$, $|\vec{u}|=1$ y $|\vec{v}|=2$? (1 punto) b) Hallar el valor de *a* para que exista una recta que pase por el punto $P=(1+a,1-a,a)$, corte a la recta $r\equiv\begin{cases}x+y=2\\ z=1\end{cases}$ y sea paralela a la recta $s\equiv\begin{cases}x+z=0\\ y=0\end{cases}$. (1,5 puntos)

Solución:

a) La definición del producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$.

En este caso, debe cumplirse que:

$-3=1\cdot 2\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})\Rightarrow\cos(\vec{u},\vec{v})=-1,5$, que no puede ser.

b) Las ecuaciones paramétricas de ambas rectas son: $r\equiv\begin{cases}x=h\\ y=2-h\\ z=1\end{cases}$; $s\equiv\begin{cases}x=t\\ y=0\\ z=-t\end{cases}$

La recta que pasa por el punto $P=(1+a,1-a,a)$ y es paralela a *s* es: $s'\equiv\begin{cases}x=1+a+t\\ y=1-a\\ z=a-t\end{cases}$

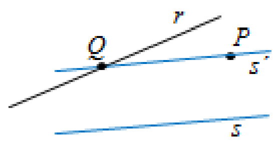
Para que las rectas se corten, sus coordenadas deben ser iguales en algún punto. Esto exige que debe ser compatible el sistema:

$$\begin{cases}h=1+a+t\\ 2-h=1-a\\ 1=a-t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h=1+a+t\to 1+a=1+a+1-a\Rightarrow a=1\\ h=1+a\\ t=1-a\end{cases}$$

(Se han igualado las respectivas componentes de una y otra recta, despejado *h* y *t* en la 2ª y 3ª ecuación, y se ha determinado *a*, que es único).

Luego, el sistema es compatible, con solución: *a* = 1, *h* = 2 y *t* = 0.

Por tanto, la recta paralela a *s* es: $s'\equiv\begin{cases}x=2+t\\ y=0\\ z=1-t\end{cases}$.



El punto de corte de las rectas *r* y *s´* es *Q*(2, 0, 1).

10. Cataluña, junio 15

2. Sigui *r* la recta de l'espai que té per equació $r: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=z$ i sigui *P* el punt de coordenades $(6, 0, -1)$.

a) Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, que té la forma $Ax+By+Cz=D$) del pla que passa pel punt *P* i talla perpendicularment la recta *r*.
[1 punt]

b) Trobeu l'equació paramètrica del pla que passa pel punt *P* i conté la recta *r*.
[1 punt]

Solución:

a) El vector de dirección de la recta dada es $\vec{v}_r$ = (2, –1, 1).

Ese vector es el característico de todos los planos perpendiculares a la recta.

Por tanto, la ecuación del plano pedido será: $\pi \equiv 2x - y + z + d = 0$.
Como se quiere que pase por el punto $P(6, 0, -1)$, entonces:
$\pi \equiv 2\cdot 6 - 1\cdot 0 + 1(-1) + d = 0 \Rightarrow d = -11$
Luego, la ecuación d el plano pedido es: $\pi \equiv 2x - y + z - 11 = 0$

b) El plano buscado estará determinado por el punto $P(6, 0, -1)$ y los vectores $\vec{v}_r = (2, -1, 1)$ y $\boldsymbol{PR}$, donde R es un punto de la recta r.
Si $R(1, -3, 0)$, $\boldsymbol{PR} = (1, -3, 0) - (6, 0, -1) = (-5, -3, 1)$.

Las ecuaciones paramétricas del plano son: $\pi' \equiv \begin{cases} x = 6 + 2t - 5h \\ y = -t - 3h \\ z = -1 + t + h \end{cases}$.

<u>**11**. Cataluña, junio 15</u>

4. Considereu a $\mathbb{R}^3$ la recta que té per equació $r: (x, y, z) = (-4 + 2\lambda, -2, 1 - \lambda)$ i els plans π_1 i π_2 d'equacions $\pi_1: x + 2y + 2z = -1$ i $\pi_2: x - 2y + 2z = -3$, respectivament.

a) Determineu la posició relativa de π_1 i π_2.
[1 punt]

b) Comproveu que tots els punts de la recta r estan situats a la mateixa distància dels plans π_1 i π_2.
[1 punt]

NOTA: Podeu calcular la distància d'un punt de coordenades (x_0, y_0, z_0) al pla d'equació

$Ax + By + Cz + D = 0$ amb l'expressió $\dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

<u>Solución</u>:
a) La posición relativa de dos planos se determina estudiando la solución del sistema asociado. Si es compatible indeterminado se cortan (rango 2) o son coincidentes (rango 1); si es incompatible, los planos son paralelos.

Como las matrices asociadas son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right) = M$; y el rango de ambas es 2, el sistema es indeterminado. Luego, los planos se cortan y determina una recta.
Aunque no se pide, las ecuaciones de la recta que determinan es:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases} \Rightarrow \text{(Restando ecuaciones)} \Rightarrow 4y = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo: $x + 1 + 2z = -1 \Rightarrow x = -2 - 2z$.

Si se hace $z = t$, se pueden escribir las ecuaciones de la recta así: $\begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 1/2 \\ z = t \end{cases}$

b) Los puntos genéricos P de la recta r son:
$P(x, y, z) = (-4 + 2\lambda, -2, 1 - \lambda)$

La distancia de P al plano π_1 es: $d(P, \pi_1) = \left| \dfrac{-4 + 2\lambda + 2\cdot(-2) + 2(1-\lambda) + 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} \right| = \dfrac{5}{3}$

La distancia de P al plano π_2 es: $d\left(P,\pi_2\right)=\left|\dfrac{-4+2\lambda-2\cdot(-2)+2(1-\lambda)+3}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}\right|=\dfrac{5}{3}$

12. Comunidad Valenciana, junio 15

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

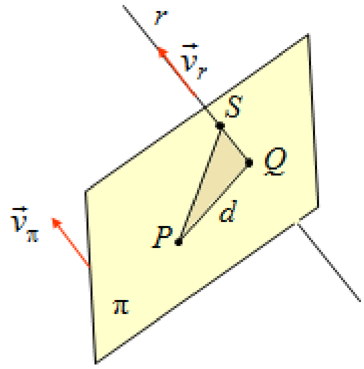
a) La ecuación del plano π que pasa por el punto $P(2, 0, 1)$ y es perpendicular a la recta $r:\begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

b) Las coordenadas del punto Q situado en la intersección de la recta r y del plano π.

c) La distancia del punto P a la recta r, y justificar razonadamente que la distancia del punto P a un punto cualquiera de la recta r es mayor o igual que $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Solución:

a) El vector característico del plano buscado es el de dirección de la recta.



$$r:\begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=-2y \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=-2t \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \vec{v}_r = (-2, 1, 0) = \vec{v}_\pi$

Luego:

$\pi: -2x+y+d=0 \to$ contiene a $P \to -4+d=0 \Rightarrow d=4$

Por tanto:

$\pi: -2x+y+4=0$

b) El punto Q se obtiene resolviendo el sistema recta/plano. Sustituyendo las ecuaciones de la recta en la del plano se obtiene:

$$-2(-2t)+t-4=0 \Rightarrow t=-\frac{4}{5}$$

Luego $Q\left(\dfrac{8}{5},-\dfrac{4}{5},0\right)$.

c) La distancia de P a r es la que hay entre P y $Q \Rightarrow$

$$\Rightarrow d(P,r)=d(P,Q)=\sqrt{\left(2-\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2+1^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Cualquier otro punto S de r determina con P y Q un triángulo rectángulo, siendo PS la hipotenusa. Por tanto $d(P,S\in r)\geq\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

13. Extremadura, junio 15

En $\mathbf{R}^3$, considere el plano $\pi: ax+by+cz=d$, la recta $r:\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, y el punto $P = (1, 0, 1)$.

a) (1 punto) Obtenga cómo deben ser los números reales a, b, c, d para que el plano π contenga a la recta r.

b) (1,5 puntos) Suponiendo que π contiene a *r*, pruebe que la distancia del punto *P* a π es menor o igual a 1: $d(P,\pi)\le 1$.

Solución:

a) Para que la recta esté contenida en el plano es necesario que dos puntos de la recta pertenezcan al plano. (Esos puntos deberán cumplir la ecuación del plano).

El punto (0, 0, 0) es de la recta $\Rightarrow\ a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 0=d \Rightarrow d=0\ \Rightarrow\ \pi: ax+by+cz=0$

El punto (0, 0, 1) es de la recta $\Rightarrow\ \pi: a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 1=0 \Rightarrow c=0\ \Rightarrow\ \pi: ax+by=0$

Por tanto, los números reales *a*, *b*, *c*, *d* son: *a* y *b* cualesquiera, no ceros a la vez; *c* = 0; *d* = 0.

b) La distancia de *P* al plano π es:

$$d\left(P(1,0,1),\pi: ax+by=0\right)=\left|\frac{a\cdot 1+b\cdot 0}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le\left|\frac{a}{\sqrt{a^2}}\right|=1$$

14. Extremadura, junio 15

Dados en $\mathbf{R}^3$ los planos $\pi_1: x+y-z=1$ y $\pi_2: x-y+z=1$, obtenga el conjunto *H* de los puntos de $\mathbf{R}^3$ que distan igual de dichos planos.

Solución:

El conjunto pedido es el plano bisector, cuya ecuación viene dada por $d(P,\pi_1)=d(P,\pi_2)$, siendo $P(x,y,z)$ un punto genérico de *H*.

En consecuencia:

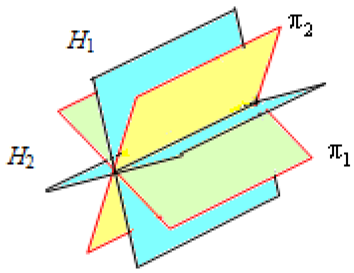
$$d(P,\pi_1)=\left|\frac{x+y-z-1}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}\right|=\left|\frac{x-y+z-1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}\right|=d(P,\pi_2)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\frac{x+y-z-1}{\sqrt{3}}\right|=\left|\frac{x-y+z-1}{\sqrt{3}}\right|\Rightarrow x+y-z-1=\pm(x-y+z-1)$$

Se obtiene dos planos:

$$H_1\equiv x+y-z-1=x-y+z-1\Rightarrow H_1\equiv y-z=0$$

$$H_2\equiv x+y-z-1=-x+y-z+1\Rightarrow H_2\equiv x=1$$



15. Galicia, junio 15

Dadas las rectas $r:\begin{cases}x=3+\lambda\\ y=-1\\ z=4+2\lambda\end{cases}$; $s:\left\{\frac{x-4}{3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-5}{4}\right.$

a) Estudia su posición relativa. Calcula la ecuación implícita o general del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a *r* y a *s*.

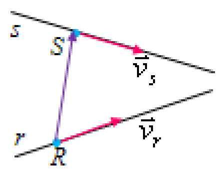
b) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que corta perpendicularmente a *r* y a *s*.

Solución:

a) Hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores:

$\vec{v}_r$ = (1, 0, 2), $\vec{v}_s$ = (3, –1, 4) y ***RS*** = (4, 3, 5) – (3, –1, 4) = (1, 4, 1)

siendo *R* un punto de *r* y *S* un punto de *s*.



Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -17 + 26 \neq 0$, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas *r* y *s* se cruzan.

b) Perpendicular común.

1) Se toman puntos genéricos de *r* y *s*:

$R = (3 + \lambda, -1, 4 + 2\lambda), S = (4 + 3t, 3 - t, 5 + 4t)$

El vector $\mathbf{SR} = (-1 + \lambda - 3t, -4 + t, -1 + 2\lambda - 4t)$, que indica la dirección de la recta perpendicular común a *r* y *s*, debe ser perpendicular a los de dirección de *r* y *s*:

$\vec{v}_r = (1, 0, 2)$ y $\vec{v}_s = (3, -1, 4)$

2) Se multiplica escalarmente ($\mathbf{SR} \cdot \vec{v}_r = 0$, $\mathbf{SR} \cdot \vec{v}_s = 0$), y se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 5\lambda - 11t = 3 \\ 11\lambda - 26t = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = 5;\ t = 2$$

Con esto:

$R = (8, -1, 14)$, $S = (10, 1, 13)$ y $\mathbf{RS} = (2, 2, -1)$.

3) La recta perpendicular común, que pasa por *R* y lleva la dirección de **RS** es:

$$p: \begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 14 - t \end{cases}.$$

<u>**16**. La Rioja, junio 15</u>

(3 puntos) Consideremos el punto $P(6, -1, 5)$ y la recta $r: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}$.

i) Halla la ecuación del plano π, perpendicular a *r* que contiene a *P*.

ii) Determina el punto *Q* donde la recta *r* corta al plano π.

iii) Determina el punto *S* simétrico de *P* respecto a la recta *r*.

<u>Solución</u>:

i) El vector normal al plano debe ser el de dirección de la recta: $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (1, -1, -2)$.

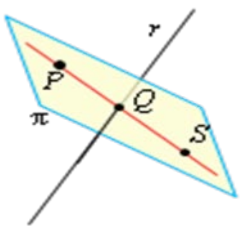
Como debe contener al punto $P(6, -1, 5)$, la ecuación del plano será:

$$\pi \equiv (x-6) - (y+1) - 2(z-5) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - y - 2z + 3 = 0$$

ii) Sustituyendo las ecuaciones de la recta en la del plano:

$$\pi \equiv (5+t) - (-t) - 2(1-2t) + 3 = 0 \Rightarrow 6t + 6 = 0 \Rightarrow t = -1.$$

El punto *Q* es el de coordenadas (4, 1, 3).



iii) El punto *S*, simétrico de *P* respecto a la recta *r*, es tal que el punto medio de *P* y *S* es el punto *Q* hallado anteriormente.

Por tanto, si $S(a, b, c)$, el punto medio entre *P* y *S* es:

$$Q = \left(\frac{a+6}{2}, \frac{b-1}{2}, \frac{c+5}{2} \right)$$

Igualando las coordenadas de *ambos* Q se tiene:

$$\frac{a+6}{2}=4 \Rightarrow a=2; \qquad \frac{b-1}{2}=1 \Rightarrow b=3; \quad \frac{c+5}{2}=3 \Rightarrow c=1.$$

El punto el punto simétrico de P respecto de r es: $S(2, 3, 1)$.

17. Madrid, junio 15

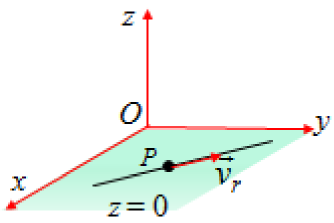
a) (1 punto) Dados los vectores $\vec{u} = (2, 3, 4)$, $\vec{v} = (-1, -1, -1)$ y $\vec{w} = (-1, \lambda, -5)$, encontrar los valores de λ que hacen que el paralelepípedo P generado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 6.
b) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta incluida en el plano $z = 0$, con dirección perpendicular a $\vec{u} = (2, -1, 4)$ y que pasa por el punto $(1, 1, 0)$.
Solución:
a) El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u} = (2, 3, 4)$, $\vec{v} = (-1, -1, -1)$ y $\vec{w} = (-1, \lambda, -5)$ vale:

$$V_P = \left|\,[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\,\right| = \left\|\begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -5 \end{matrix}\right\| = \left|2(5+\lambda)-1 \ \ +(2-\lambda-1)\right| = \left|-3+\lambda\right|$$

Si se desea que ese volumen sea 6 $u^3 \Rightarrow \lambda = 9$.

b) Si la recta está en el plano $z = 0$, su vector director es de la forma $\vec{v}_r = (a, b, 0)$.
Como se desea que sea perpendicular a $\vec{u} = (2, -1, 4)$, debe cumplirse que $\vec{u} \cdot \vec{v}_r = 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{v}_r = (2, -1, 4) \cdot (a, b, 0) = 2a - b = 0 \Rightarrow b = 2a.$$

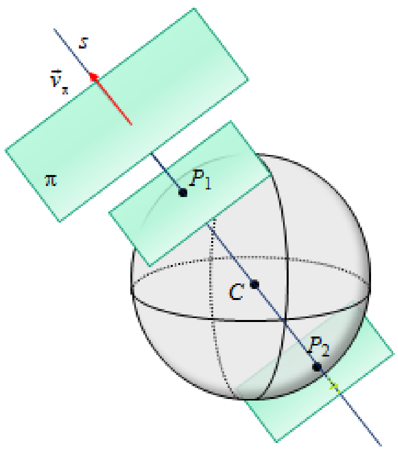


Por tanto: $\vec{v}_r = (a, 2a, 0) = (1, 2, 0)$; y $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 0 \end{cases}$.

18. Madrid, junio 15

Dados el plano $\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$ y la superficie esférica $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$
Hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π.
Solución:
Los puntos de tangencia son los de corte de la esfera con la recta s, que pasa por el centro de la esfera y es perpendicular al plano dado.
El centro de la esfera es el punto $C(1, 1, 2)$; el su vector normal al plano es $\vec{v}_\pi = (1, -2, 2)$.

Las ecuaciones de la recta son: $s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.



El punto de corte de recta con la esfera se obtiene sustituyendo los valores de las componentes la recta en la ecuación de la esfera.

Como $s: \begin{cases} x - 1 = t \\ y - 1 = -2t \\ z - 2 = 2t \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (t)^2+(-2t)^2+(2t)^2=9 \Rightarrow t=\pm 1$$

Para $t = 1$: $P_1 = (2, -1, 4) \Rightarrow \pi_1 \equiv (x-1)-2(y+1)+2(z-4)=0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x-2y+2z-12=0$

Para $t = -1$: $P_1 = (0, 3, 0) \Rightarrow \pi_2 \equiv x-2(y-3)+2z=0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x-2y+2z+6=0$

19. Madrid, septiembre 15

La recta r pasa por $P(2, -1, 0)$ y tiene vector director $(1, \lambda, -2)$; la recta s pasa por $Q(1, 0, -1)$ y tiene vector director $(2, 4, 2)$.

a) (2 puntos) Calcular $\lambda > 0$ para que la distancia entre r y s sea $\dfrac{9}{\sqrt{59}}$.

b) (1 punto) Calcular λ para que r sea perpendicular a la recta que pasa por P y Q.

Solución:

a) La distancia mínima ente dos rectas que se cruzan viene dada por la fórmula

$$d(r,s)=\frac{\left\|\left[\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{PQ}\right]\right\|}{\left|\vec{v}_r\times\vec{v}_s\right|}.$$

En este caso: $\vec{v}_r = (1, \lambda, -2)$; $\vec{v}_s = (2, 4, 2)$; $\overrightarrow{PQ} = (1, 0, -1) - (2, -1,0) = (-1, 1, -1)$

Luego,

$$\left[\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{PQ}\right]=\begin{vmatrix}1 & \lambda & -2\\ 2 & 4 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-18\,;\quad \vec{v}_r\times\vec{v}_s=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 1 & \lambda & -2\\ 2 & 4 & 2\end{vmatrix}=(2\lambda+8,\ \ -6,\ \ 4-2\lambda)$$

$$\Rightarrow \left|\vec{v}_r\times\vec{v}_s\right|=\sqrt{(2\lambda+8)^2+(-6)^2+(4-2\lambda)^2}=\sqrt{8\lambda^2+16\lambda+116}=2\sqrt{2\lambda^2+4\lambda+29}$$

Como se desea que la distancia entre r y s sea $\dfrac{9}{\sqrt{59}}$, debe cumplirse que:

$$\frac{18}{2\sqrt{2\lambda^2+4\lambda+29}}=\frac{9}{\sqrt{59}} \Rightarrow \sqrt{2\lambda^2+4\lambda+29}=\sqrt{59} \Rightarrow 2\lambda^2+4\lambda-30=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda=-5\\ \lambda=3\end{cases}$$

b) Para que la recta r sea perpendicular a la recta que pasa por P y Q es necesario que sus vectores de dirección sean perpendiculares.

Como $\vec{v}_r = (1, \lambda, -2)$ y $\overrightarrow{PQ} = (-1, 1, -1)$, debe cumplirse que:

$\vec{v}_r \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \Rightarrow (1, \lambda, -2)\cdot(-1, 1, -1) = 0 \Rightarrow -1 + \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$.

20. Madrid, septiembre 15

Dados los puntos $P(-1, -1, 1)$, $Q(1, 0, 2)$ y los planos

$$\pi_1 \equiv x-z=0\,,\qquad \pi_2 \equiv my-6z=0\,,\qquad \pi_3 \equiv x+y-mz=0$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular los valores de m para los que los tres planos se cortan en una recta.

b) (1 punto) Para $m = 3$, hallar la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta de intersección de los planos π_1 y π_2.

c) (1 punto) Hallar la distancia entre los puntos Q y P', siendo P' el punto simétrico de P respecto al plano π_1.

Solución:

a) El sistema asociado a los planos dados es $\begin{cases} x \qquad -z=0 \\ \quad my-6z=0 \\ x+y-mz=0 \end{cases}$.

Los tres planos determinan una recta (forman parte del mismo haz) cuando el rango de la matriz de coeficientes valga 2 (en ese caso el sistema es compatible indeterminado, con un grado de indeterminación).
Por tanto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = -m^2+6+m=0 \Rightarrow -m^2+m+6=0 \to m=3 \text{ o } m=-2.$$

Para $m = 3$, la recta que determinan es: $r \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ 3y-6z=0 \\ x+y-3z=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$

Para $m = -2$, la recta que determinan es: $s \equiv \begin{cases} x-z=0 \\ -2y-6z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=h \\ y=-3h \\ z=h \end{cases}$

b) Para $m = 3$, la recta que determinan los planos π_1 y π_2 es $r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$.

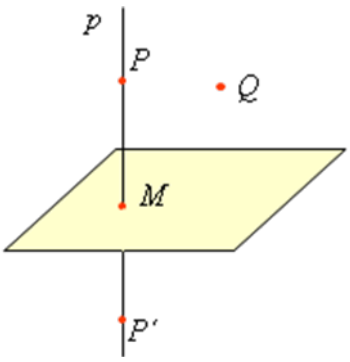
El vector normal del plano perpendicular a r es el de dirección de la recta: $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (1, 2, 1)$.
Como además debe contener al punto $P(-1, -1, 1)$, la ecuación del plano será:

$$\pi \equiv (x+1)+2(y+1)+(z-1)=0 \Rightarrow \pi \equiv x+2y+z+2=0$$

c) Puede observarse que ni P ni Q pertenecen al plano π_1, en cuyo caso la solución sería inmediata.
El punto $P´$, simétrico de P respecto del plano π_1, cumple dos condiciones:

– Debe estar en la recta que pasa por P y sea perpendicular al plano.
– El punto medio de P y $P´$ es el punto de corte de la recta y el plano.

La recta perpendicular es $p \equiv \begin{cases} x=-1+t \\ y=-1 \\ z=1-t \end{cases}$.



(Pasa por P y su vector director es $\vec{v}_{\pi 1} = (1, 0, -1)$).
El corte de esa recta con el plano se obtiene sustituyendo las ecuaciones de la recta en la del plano ($\pi_1 \equiv x-z=0$):

$$\pi_1 \equiv (-1+t)-(1-t)=0 \Rightarrow -2+2t=0 \Rightarrow t=1$$

Por tanto, $M = (0, -1, 0)$
Si $P´(a, b, c)$, el punto medio entre P y $P´$ será:

$$M = \left(\frac{a-1}{2}, \frac{b-1}{2}, \frac{c+1}{2}\right)$$

Igualando las coordenadas de *ambos M* se tiene: $a = 1$; $b = -1$; $c = -1 \Rightarrow$ el punto simétrico de P respecto de π_1 es: $P'(1, -1, -1)$.

Por último, la distancia pedida es $d(Q, P') = \sqrt{1^2 + 3^3} = \sqrt{10}$.

21. Murcia, junio 15

Tres de los cuatro vértices de un tetraedro son los puntos $A = (2, 1, 0)$, $B = (3, 4, 0)$ y $C = (5, 1, 0)$. El cuarto vértice D está en la recta r que pasa por el punto (1, 2, 3) y tiene como vector director el vector (−1, 1, 1).

a) (0,75 puntos) Determine las ecuaciones paramétricas de la recta r.

b) (1,75 puntos) Calcule las coordenadas del vértice D para que el volumen del tetraedro sea 9.

Observación: Hay dos soluciones distintas; basta con calcular una de ellas.

Solución:

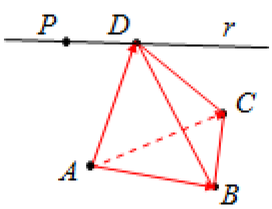
a) $r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

b) El volumen de este tetraedro viene dado por $\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|$, siendo:

$\overrightarrow{AB} = (3, 4, 0) - (2, 1, 0) = (1, 3, 0)$

$\overrightarrow{AC} = (5, 1, 0) - (2, 1, 0) = (3, 0, 0)$

$\overrightarrow{AD} = (1-t, 2+t, 3+t) - (2,1,0) = (-1-t, 1+t, 3+t)$



$$V_T = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1-t & 1+t & 3+t \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\left|-9(3+t)\right| = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |3+t| = 6 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -9 \end{cases}$$

Por tanto, el punto D puede ser: $D(-2, 5, 6)$, si $t = 3$; o $D(10, -7, -6)$, si $t = -9$.

22. Navarra, junio 15

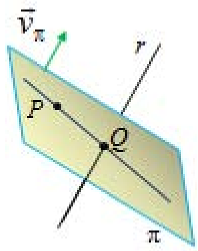
Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(1, -2, 3)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 3x + y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

Solución:

La recta pedida debe estar en el plano perpendicular a r que pasa por P; además debe contener al punto Q, de corte del plano con la recta.

El vector director de la recta se obtiene multiplicando vectorialmente los vectores normales de los planos que determinan r.



$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-4,\ 6, -2) \equiv (-2, 3, -1).$$

El vector característico del plano π será: $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (-2,3,-1)$.
Por pasar por $P(1, -2, 3)$ su ecuación es:

$$\pi \equiv -2\cdot(x-1)+3(y+2)-1\cdot(z-3)=0 \Rightarrow \pi \equiv -2x+3y-z+11=0$$

El punto Q, de corte de la recta y el plano, es la solución del sistema:

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 3x+y-3z-2=0 \end{cases} \\ \pi \equiv -2x+3y-z+11=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=4 \\ 3x+y-3z=2 \\ -2x+3y-z=-11 \end{cases} \Rightarrow (\text{Gauss})$$

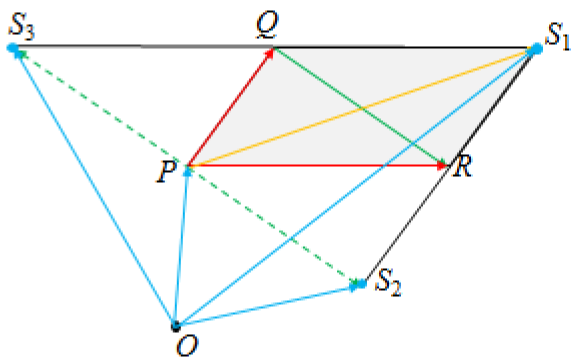
$$\Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-3E1 \\ E3+2E1 \end{matrix}\begin{cases} x+y+z=4 \\ -2y-6z=-10 \\ 5y+z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 6E3+E2 \end{matrix}\begin{cases} x+y+z=4 \\ -2y-6z=-10 \\ 28y=-28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases}$$

El punto solución es $Q(3,-1,2)$.
Un vector director de la recta perpendicular pedida es

$$\overrightarrow{PQ} = (3,-1,2)-(1,-2,3) = (2,1,-1)$$

Por tanto, su ecuación continua puede ser: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$.

23. Navarra, julio 15
Dados los puntos $P(1, 2, -1)$, $Q(2, -1, 1)$ y $R(3, 1, 2)$, encuentra todos los posibles puntos S tales que P, Q, R y S son vértices de un paralelogramo.
Solución:
Se pueden obtener tres soluciones, como puede observarse en el dibujo siguiente.



A las distintas soluciones se puede llegar desde P, sumando o restando los vectores ***PQ*** y ***PR***, como sigue:

$$\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}; \quad \overrightarrow{OS_2} = \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PQ}; \quad \overrightarrow{OS_3} = \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PR}$$

Como:
OP = (1, 2, –1);
PQ = (2, –1, 1) – (1, 2, –1) = (1, –3, 2);
PR = (3, 1, 2) – (1, 2, –1) = (2, –1, 3)
se tendrá:

$$\overrightarrow{OS_1} = \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR} = (1, 2, -1) + (1, -3, 2) + (2, -1, 3) = (4, -2, 4) \Rightarrow S_1 = (4, -2, 4)$$

$$\overrightarrow{OS_2} = \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PQ} = (1, 2, -1) + (2, -1, 3) - (1, -3, 2) = (2, 4, 0) \Rightarrow S_2 = (2, 4, 0)$$

$$\overrightarrow{OS_3} = \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PR} = (1, 2, -1) + (1, -3, 2) - (2, -1, 3) = (0, 0, -2) \Rightarrow S_3 = (0, 0, -2)$$

24. País Vasco, junio 15

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(–1, 2, 3)$ y es paralelo a los vectores $\vec{a}(–1, –2, –3)$ y $\vec{b}(1, 3, 5)$.

b) Calcular el valor de m para que el plano calculado en el apartado anterior y el plano $mx - y + 5z = 8$ sean paralelos.

Solución:

a) El plano pedido es:

$$\begin{cases} x = -1 - t + h \\ y = 2 - 2t + 3h \\ z = 3 - 3t + 5h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & -1 & 1 \\ y-2 & -2 & 3 \\ z-3 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y + z + 2 = 0$$

b) Si los planos son perpendiculares deben serlo sus vectores característicos, que son $(1, –2, 1)$ y $(m, –1, 5)$. Para ello, su producto escalar debe ser 0.

$(1, –2, 1) \cdot (m, –1, 5) = m + 2 + 5 = 0 \Rightarrow m = –7$