ALGUNOS PROBLEMAS DE ANÁLISIS PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE SELECTIVIDAD DE 2015

1. Andalucía, junio 2015

Sea *f* la función definida por $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$ para $x \neq 1$.

a) [1 punto] Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) [1,5 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) de *f*.
Solución:
a) La función no está definida en x = 1. En ese punto tiene asíntota vertical, pues:

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x}{x-1}=\left[\frac{e}{0}\right]=\infty$$, la recta $x=1$ es asíntota vertical de la curva.

Puede verse que:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{e^x}{x-1}=\left[\frac{e}{0^-}\right]=-\infty$$ → Por la izquierda, cuando $x\to 1^-$, la curva tiende a –∞.

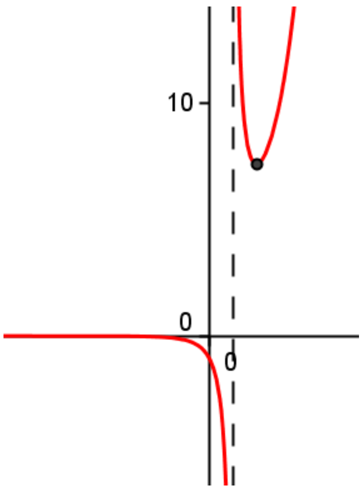
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{e^x}{x-1}=\left[\frac{e}{0^+}\right]=+\infty$$ → Por la derecha, cuando $x\to 1^+$, la curva tiende a +∞.

¿Asíntota horizontal?

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L'H)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\infty$$ → No tiene asíntota horizontal.

¿Asíntota oblicua?

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2-x}=(L'H)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x-1}=(L'H)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty$$ → Tampoco tiene asíntota oblicua.



b) Derivando: $f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)-e^e}{(x-1)^2}=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$ → La derivada se anula en x = 2.
Con esto:

- Si $x<-1$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si 1 < x < 2, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si x > 2, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Por tanto, en x = 2 se da un mínimo relativo, con $f(2)=e^2$.

Su gráfica es la adjunta.

2. Andalucía, junio 2015

Sea *f* la función definida por $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{2x}$ para x > 0 (ln denota la función logaritmo neperiano) y sea F la primitiva de *f* tal que $F(1)$ = 2.
a) [0,5 puntos] Calcula $F'(e)$.
b) [2 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa x = e.
Solución:

a) Por el teorema fundamental del cálculo: $F'(x)=f(x) \Rightarrow F'(e)=\dfrac{\ln e}{2e}=\dfrac{1}{2e}$.

b) La recta tangente pedida tiene por ecuación $y-F(e)=F'(e)(x-e)$.
Para hallar $F(e)$ hay que determinar la ecuación de $F(x)$, la primitiva de $f(x)$.
La primitiva, $F(x)=\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{2x}dx$, puede hacerse por partes.
Tomando:

$$u=\ln x \text{ y } dv=\frac{1}{2x}dx \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \text{ y } v=\int \frac{1}{2x}dx=\frac{1}{2}\ln x.$$

Por tanto:

$$F(x)=\int \frac{\ln x}{2x}dx=\ln x\cdot\frac{1}{2}\ln x-\int \frac{\ln x}{2x}dx \Rightarrow \int \frac{\ln x}{2x}dx+\int \frac{\ln x}{2x}dx=\ln x\cdot\frac{1}{2}\ln x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\int \frac{\ln x}{2x}dx=\ln x\cdot\frac{1}{2}\ln x \Rightarrow \int \frac{\ln x}{2x}dx=\frac{1}{4}(\ln x)^2+c.$$

Esto es: $F(x)=\dfrac{1}{4}(\ln x)^2+c$.

Como $F(1)=2 \Rightarrow F(1)=\dfrac{1}{4}(\ln 1)^2+c=2 \Rightarrow c=2$.

Luego $F(x)=\dfrac{1}{4}(\ln x)^2+2$; y, por tanto, $F(e)=\dfrac{1}{4}(\ln e)^2+2=\dfrac{9}{4}$.

Por consiguiente, la recta pedida es: $y-\dfrac{9}{4}=\dfrac{1}{2e}(x-e)$

3. Aragón, junio 15

Considera la función $f(x)=\dfrac{x^2-3}{e^x}$.

a) (1,5 puntos) Determina los máximos relativos, los mínimos relativos y los puntos de inflexión, si existen, de la función.

b) (1,5 puntos) Usando el cambio de variable $t=\cos x$, calcula $\displaystyle\int \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}dx$

c) 1) (1 punto) Calcula los valores de a y b para que la función $f(x)=ax^3+bx^2$ tenga un extremo relativo en el punto (1, 2).
2) (1 punto) Calcula el área encerrada por la curva $f(x)=2x^3-3x^2$ y la parte positiva del eje *OX*.

Solución:

a) Derivando dos veces la función $f(x)=\dfrac{x^2-3}{e^x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2xe^x-\left(x^2-3\right)e^x}{e^{2x}}=\frac{-\left(x^2-2x-3\right)e^x}{e^{2x}}=\frac{-x^2+2x+3}{e^x}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{(-2x+2)e^x-\left(-x^2+2x+3\right)e^x}{e^{2x}}=\frac{\left(x^2-4x-1\right)e^x}{e^{2x}}=\frac{x^2-4x-1}{e^x}$$

La derivada primera se anula cuando $-x^2+2x+3=0 \Rightarrow x=-1; x=3$.

Como $f''(-1)=\dfrac{4}{e^{-1}}>0 \;\Rightarrow$ en $x = -1$ se tiene un mínimo relativo.

Como $f''(3)=\dfrac{-4}{e^{3}}<0 \;\Rightarrow$ en $x = 3$ se tiene un máximo relativo.

La derivada segunda se anula cuando $x^2-4x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{20}}{2}=\begin{cases}2-\sqrt{5}\\2+\sqrt{5}\end{cases}$.

Por tanto, en esos puntos la función tendrá sendos de inflexión.
<u>Observación</u>: La seguridad de que son puntos de inflexión se obtiene haciendo la derivada tercera y comprobando que no se anula para esos valores $\to f'''(x)=\dfrac{-x^2+6x-3}{e^x}$

b) Si $t=\cos x \;\Rightarrow\; dt=-\sin x dx \Rightarrow dx=-\dfrac{1}{\sin x}dt=-\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}dt=-\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

Por tanto:

$$\int\frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}dx=\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt\right)=\int\frac{-t^2}{1-t^2}dt=$$
$$=\int\frac{1-t^2-1}{1-t^2}dt=\int\left(1+\frac{-1}{1-t^2}\right)dt=t+\int\frac{1}{t^2-1}dt$$

La segunda integral puede hacerse por descomposición en fracciones simples:

$$\int\frac{1}{t^2-1}dt=\int\left(\frac{1/2}{t-1}-\frac{1/2}{t+1}\right)dt=\frac{1}{2}\ln(t-1)-\frac{1}{2}\ln(t+1)=\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1} \to \text{(Omito detalles).}$$

Por tanto:

$$\int\frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}dx=\int\frac{-t^2}{1-t^2}dt=t+\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}+c$$

Deshaciendo el cambio,

$$\int\frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}dx=\cos x+\frac{1}{2}\ln\frac{\cos x-1}{\cos x+1}+c$$

c) 1) $f(x)=ax^3+bx^2 \;\Rightarrow\; f'(x)=3ax^2+2bx$.

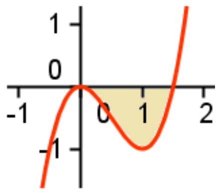
Tendrá un extremo relativo en el punto (1, 2) si:

$$f(1)=2;\ f'(1)=0 \Rightarrow \begin{cases}a+b=2\\3a+2b=0\end{cases} \Rightarrow a=-4; b=6 \;.$$

c) 2) La función $f(x)=2x^3-3x^2$ corta al eje OX cuando $2x^3-3x^2=0$

$\Rightarrow x^2(2x-3)=0 \Rightarrow x=0; x=3/2$.

Por tanto, el área pedida viene dada por



$$\left|\int_0^{3/2}\left(2x^3-3x^2\right)dx\right|=\left|\left(\frac{1}{2}x^4-x^3\right)\Big|_0^{3/2}\right|=\left|\frac{81}{32}-\frac{27}{8}\right|=\frac{27}{32}\ \text{u}^2.$$

Observación: El valor absoluto es necesario por estar el recinto por debajo del eje *OX*. Es obvio que el valor absoluto debe ponerse cuando se obtiene un resultado negativo para el área.

4. Aragón, junio 15

a) (2 puntos) Calcula las dimensiones de tres campos cuadrados que no tienen ningún lado común y que satisfacen que el perímetro de uno de ellos es triple que el de otro y, además, se necesitan 1248 metros de valla para vallar completamente los tres campos, de manera que la suma de las áreas es la mínima posible.

b) (1,5 puntos) Usando el cambio de variable $t = e^x$, calcula $\int \frac{2e^{2x}}{e^x - 2e^{-x}} dx$

c) (1,5 puntos) Calcula: $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

Solución:

a) Sean *x*, *y*, *z* las longitudes de los lados de cada uno de los tres campos. Supongamos que $y = 3x$, esto es, el campo de lado *y* tiene perímetro triple que el campo de lado *x*.

Se cumple que:

$$4x + 4y + 4z = 1248 \Rightarrow x + y + z = 312 \Rightarrow x + 3x + z = 312 \Rightarrow z = 312 - 4x$$

Se desea que la suma de las áreas, $S = x^2 + y^2 + z^2$, sea mínima.

Expresando todo en función de *x*:

$$S(x) = x^2 + (3x)^2 + (312 - 4x)^2 = 10x^2 + (312 - 4x)^2$$

El mínimo se da en la solución de $S´= 0$ que haga positiva a $S´´$.

$$S´(x) = 20x + 2(312 - 4x) \cdot (-4) \Rightarrow S´(x) = 52x - 2496 = 0 \Rightarrow x = 48$$

Como $S´´(x) = 52 > 0$, para ese valor se da el mínimo buscado.

Con esto, las dimensiones de los campos son: x = 48 m; y = 144 m; z = 120 m.

b) Si $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$.

Luego:

$$\int \frac{2e^{2x}}{e^x - 2e^{-x}} dx = \int \frac{2t^2}{t - 2t^{-1}} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{2t^2}{t^2 - 2} dt =$$

$$= \int \frac{2t^2 - 4 + 4}{t^2 - 2} dt = \int \left(2 + \frac{4}{t^2 - 2} \right) dt = 2t + \int \frac{4}{t^2 - 2} dt$$

La segunda integral se hace por descomposición en fracciones simples.

$$\frac{4}{t^2 - 2} = \frac{A}{t - \sqrt{2}} + \frac{B}{t + \sqrt{2}} = \frac{A\left(t + \sqrt{2}\right) + B\left(t - \sqrt{2}\right)}{t^2 - 2} \Rightarrow A = \sqrt{2}, B = -\sqrt{2}$$

Luego:

$$\int \frac{4}{t^2 - 2} dt = \int \left(\frac{\sqrt{2}}{t - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right) dt = \sqrt{2} \ln\left(t - \sqrt{2}\right) - \sqrt{2} \ln\left(t + \sqrt{2}\right)$$

Deshaciendo los cambios y operando:

$$\int \frac{2e^{2x}}{e^x - 2e^{-x}} dx = 2e^x + \sqrt{2} \ln\left(e^x - \sqrt{2}\right) - \sqrt{2} \ln\left(e^x + \sqrt{2}\right) + c$$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\left[\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty\right]$ → Forma indeterminada: puede resolverse operando y aplicando L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=(L´H)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x\ln x+x-1}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=(L´H)=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\ln x+1+1}=-\frac{1}{2}$$

<u>**5**. Asturias, junio 15</u>

Ejercicio 3.- El propietario de la empresa "Asturfabril" ha estimado que si compra "*x*" máquinas y contrata "*y*" empleados, el número de unidades de producto que podía fabricar vendría dado por la función $f(x,y)=9x\cdot y^2$. Sabiendo que tiene un presupuesto de 22500 €, que cada máquina supone una inversión de 2500 € y cada contrato de un nuevo empleado 1500 €, determine el número de obreros que debe contratar y el número de máquinas que debe comprar para optimizar la producción. (2,5 puntos)

<u>Solución</u>:

Si compra *x* máquinas y contrata a *y* empleados, invierte $2500x+1500y$: como su presupuesto es de 22500 debe cumplirse que:

$$2500x+1500y=22500 \Leftrightarrow 5x+3y=45$$

Despejando: $x=\frac{45-3y}{5}$.

La función que hay que optimizar depende de dos variables, pero sustituyendo e valor de *x*, se tiene:

$$f(x,y)=9x\cdot y^2 \Rightarrow f(y)=9\cdot\frac{45-3y}{5}\cdot y^2 \Rightarrow f(y)=81y^2-\frac{27}{5}y^3$$

El máximo de esta nueva función se obtiene en las soluciones de $f´(y)=0$ que hacen negativa a $f´´(y)$.

$$f´(y)=162y-\frac{81}{5}y^2=0 \Rightarrow f´(y)=\left(162-\frac{81}{5}y\right)\cdot y=0 \Rightarrow y=0 \text{ o } y=10$$

$$f´´(y)=162-\frac{162}{5}y \to f´´(0)=162>0;\ f´´(10)=-162<0$$

Por tanto, la producción máxima se obtiene contratando a 10 nuevos empleados y comparando 3 máquinas; pues si *y* = 10, *x* = 3.

<u>**6**. Asturias, junio 15</u>

Obtén $\lim\limits_{x\to 0}\left(\text{cotan}\, x-\frac{1}{x}\right)$.

<u>Solución</u>:

El límite indicado es indeterminado, pues sustituyendo:

$$\lim_{x\to 0}\left(\text{cotan}\, x-\frac{1}{x}\right)=\left(\text{cotan}\, 0-\frac{1}{0}\equiv\infty-\infty\right)$$

Habrá que hacer alguna transformación algebraica y aplicar L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\left(\text{cotan}\, x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin x}\right)=\left[\frac{0\cdot 1-0}{0\cdot 0}=\frac{0}{0}\right]$$

Ahora puede aplicarse la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin x}\right)=(L´H)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Otra vez se aplica L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}\right)=(L´H)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x-x\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}\right)=\frac{0}{2}=0$$

7. Asturias, septiembre 15

Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x\cdot\sin x}$.

Solución:

El límite indicado es indeterminado, pues sustituyendo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x\cdot\sin x}=\left[\frac{0-0}{0\cdot 0}=\frac{0}{0}\right]$$

Aplicando L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x\cdot\sin x}=(L´H)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{\sin x+x\cdot\cos x}=\left[\frac{1-1}{0+0}=\frac{0}{0}\right].$$

Se aplica de nuevo L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{\sin x+x\cdot\cos x}=(L´H)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{(1+x)^2}+\sin x}{\cos x+\cos x-x\cdot\sin x}=\frac{-1}{2}$$

8. Asturias, septiembre 15

Se sabe que la derivada de una función $f(x)$ es $f´(x)=(x+1)\cdot\left(x^2-4\right)$.

a) Determina la función *f* sabiendo que $f(0)=\frac{1}{7}$. (1 punto)

b) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de $f(x)$. (1,5 puntos)

Solución:

a) La función $f(x)$ será una primitiva de $f´(x)=(x+1)\cdot\left(x^2-4\right)$:

$$f(x)=\int(x+1)\left(x^2-4\right)dx=\int\left(x^3+x^2-4x-4\right)dx=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-2x^2-4x+c$$

Como se sabe que $f(0)=\frac{1}{7}\Rightarrow c=\frac{1}{7}$. Luego $f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-2x^2-4x+\frac{1}{7}$

b) Como $f´(x)=(x+1)\cdot\left(x^2-4\right)$ se anula en los puntos $x = –2$, $x = –1$ y $x = 2$, se tendrá:

- Si $x < –2$, $f´(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- Si $–2 < x < –1$, $f´(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente $\to$ en $x = –2$ hay un mínimo.
- Si $–1 < x < 2$, $f´(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente $\to$ en $x = –1$ hay un máximo.

- Si $x > 2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente → en $x = 2$ hay un mínimo.

Los máximos y mínimos pueden determinarse también mediante la derivada segunda.

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 4x + \frac{1}{7} \Rightarrow f'(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 \Rightarrow f''(x) = 3x^2 + 2x - 4$$

Como $f'(-2) = 0$ y $f''(-2) = 4 > 0 \Rightarrow$ en $x = -2$ hay un mínimo.
Como $f'(-1) = 0$ y $f''(-1) = -3 < 0 \Rightarrow$ en $x = -1$ hay un máximo.
Como $f'(2) = 0$ y $f''(2) = 12 > 0 \Rightarrow$ en $x = 2$ hay un mínimo.

9. Baleares, junio 15

Calcula la integra indefinida siguiente: $\int \frac{2x+5}{(x+3)^3} dx$.

Solución:
Hay que descomponer en fracciones simples la función racional del integrando.

$$\frac{2x+5}{(x+3)^3} = \frac{A}{(x+3)^3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{(x+3)} = \frac{A + B(x+3) + C(x+3)^2}{(x+3)^3}$$

Identificando coeficientes se tendrá:

$$2x + 5 = A + B(x+3) + C(x+3)^2 \Rightarrow 2x + 5 = Cx^2 + (B + 6C)x + A + 3B + 9C$$

$$\begin{cases} C = 0 \\ 2 = B + 6C \\ 5 = A + 3B + 9C \end{cases} \Rightarrow C = 0; B = 2; A = -1$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x+5}{(x+3)^3} dx = \int \frac{-1}{(x+3)^3} dx + \int \frac{2}{(x+3)^2} dx = -\int (x+3)^{-3} dx + 2\int (x+3)^{-2} dx =$$

$$= -\frac{(x+3)^{-2}}{-2} + 2\cdot\frac{(x+3)^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{2(x+3)^2} - \frac{2}{x+3} + c = \frac{-4x-11}{2(x+3)^2} + c$$

10. Baleares, junio 15

a) Demuestra que $x = 0$ es la única raíz (real) de la ecuación $5x^9 + 3x^5 + 7x = 0$.
b) Demuestra que $x = 0$ es la única raíz de la ecuación $e^x = 1 + x$.

Solución:
a) Es evidente que $x = 0$ es solución de la ecuación dada; por tanto, se puede escribir:

$$5x^9 + 3x^5 + 7x = 0 \Leftrightarrow x\left(5x^8 + 3x^4 + 7\right) = 0$$

El segundo factor nunca se anula, pues $5x^8 + 3x^4 + 7 = 0 \Rightarrow x^4 = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot5\cdot7}}{2\cdot5}$, que no es real. (Sin necesidad de cálculos puede observarse que los tres sumandos de la expresión $5x^8 + 3x^4 + 7$ son positivos siempre que $x \neq 0$).

b) Si se considera la función $g(x) = e^x - x - 1$, que es continua y derivable, se observa $g(0) = 0$; luego $x = 0$ es raíz de la ecuación $e^x = 1 + x$.
Derivando:

$g'(x) = e^x - 1 \to e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ es candidato a máximo o mínimo.

- Si $x < 0$, $g'(x) < 0 \Rightarrow g$ es decreciente.
- Si $x > 0$, $g'(x) > 0 \Rightarrow g$ es creciente.

Por tanto, en $x = 0$ se tiene un mínimo absoluto. Como, además, $g(0) = 0$, la función $g(x) = e^x - x - 1$ sólo se anula en ese punto, lo que significa de $x = 0$ es la única raíz de la ecuación $e^x = 1 + x$.

11. <u>Canarias, junio 2015</u>

Consideremos la función $f(x) = \ln(x-1)$ definida en el intervalo $[2, e + 1]$. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \ln(x-1)$ que sea paralela a la recta que pasa por los puntos $P(2, 0)$ y $Q(e + 1, 1)$. (2,5 puntos)

<u>Solución</u>:

La recta que pasa por los puntos $P(2, 0)$ y $Q(e + 1, 1)$ tiene por ecuación:

$$r: \begin{cases} x = 2 + (e-1)\lambda \\ y = \quad\quad \lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{e-1} = \frac{y}{1} \Leftrightarrow y = \frac{1}{e-1}(x-2) .$$

Si la tangente pedida es paralela a ella, su pendiente debe ser la misma. Por tanto, la derivada en el punto de tangencia valdrá $f'(x) = \frac{1}{e-1}$.

De $f(x) = \ln(x-1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x-1}$. Luego, la abscisa del punto de tangencia será $x = e$.

La ecuación de dicha tangente es:

$$y - f(e) = f'(e)(x-e) \Rightarrow y - \ln(e-1) = \frac{1}{e-1}(x-e)$$

12. <u>Canarias, junio 2015</u>

Calcular las integrales indefinidas siguientes

a) $\int \frac{dx}{(2x+1)^2 + 4}$ b) $\int x^2 (x^3+1)^{-7} dx$ (2,5 puntos)

<u>Solución</u>:

a) Si se hace $2x + 1 = t \Rightarrow 2dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$.

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^2+4} = \int \frac{1}{t^2+4} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+4} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 1} dt = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1} dt =$$

$$= \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{t}{2}\right) + c = \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{2x+1}{2}\right) + c$$

b) Es prácticamente inmediata. Bastaría con ajustar constante.

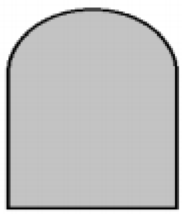
También puede hacerse el cambio $x^3 + 1 = t \Rightarrow 3x^2 dx = dt \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{3}dt$.

Luego:

$$\int x^2\left(x^3+1\right)^{-7}dx = \int\left(x^3+1\right)^{-7}x^2dx=\int t^{-7}\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-6}}{-6}+c=-\frac{1}{18t^6}+c=-\frac{1}{18\left(x^3+1\right)^6}+c$$

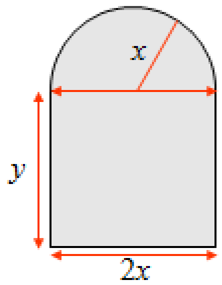
13. Canarias, junio 2015

La boca de un túnel tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo como se muestra en la figura. Encontrar las medidas del túnel que deje pasar más luz si el perímetro de la figura mide 5 metros.



Solución:

Dejará pasar más luz cuando la superficie de la boca del túnel sea máxima.
La sección del túnel está formada por un rectángulo y por un semicírculo.



Si la base del rectángulo es $2x$ y la altura y, la suma de las áreas del semicírculo y del rectángulo será:

$$S=\frac{1}{2}\cdot\pi x^2+2xy$$

El perímetro es la suma: ancho del túnel + altura de las dos paredes laterales + longitud del arco. Si vale 5 m $\Rightarrow$ $2x+2y+\pi x=5$

Despejando la incógnita y y sustituyendo en la función de área se tiene: $y=\dfrac{5-2x-\pi x}{2}$.

Luego: $S(x)=\dfrac{\pi x^2}{2}+x\left(5-2x-\pi x\right)=\dfrac{10x-4x^2-\pi x^2}{2}$

El máximo de S se obtiene en la solución de $S´= 0$ que hace negativa a $S´´$.

$$S´(x)=\frac{10-x\left(8+2\pi\right)}{2}=0\Rightarrow x=\frac{10}{8+2\pi}\approx 0,7 \text{ m.}$$

Como $S´´(x)=-\dfrac{8+2\pi}{2}<0$, para ese valor de x se tiene el máximo buscado.

El ancho del túnel será de 1,4 m;

la altura de las paredes laterales $y\approx\dfrac{5-2\cdot 0,7-\pi\cdot 0,7}{2}=0,7$ m;

y su altura máxima será también de 1,4 m.

14. Cantabria, junio 15

Considera la función $f(x)=\left(1+x^2\right)^{(1/x)}$.

a) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calcula la derivada de $f(x)$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x^2\right)^{(1/x)}=\left[\infty^{0^+}\right]$. Resulta una forma indeterminada.

Tomando logaritmos y aplicando la regla de L´Hôpital se tiene:

$$\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+x^2\right)^{(1/x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+x^2\right)^{(1/x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(1+x^2\right)=\left[0\cdot\infty\right]=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L'H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2x}{1+x^2}}{1} = \text{(operando)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L'H) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(1+x^2\right)^{(1/x)} = e^0 = 1.$$

b) Para calcular la derivada de $f(x)$ hay que aplicar logaritmos.

$$\ln f(x) = \ln\left(\left(1+x^2\right)^{(1/x)}\right) \Rightarrow \ln f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(1+x^2\right)$$

Derivando:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{x}\cdot\frac{2x}{1+x^2} = -\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(1+x^2\right) + \frac{2}{1+x^2} \Rightarrow$$

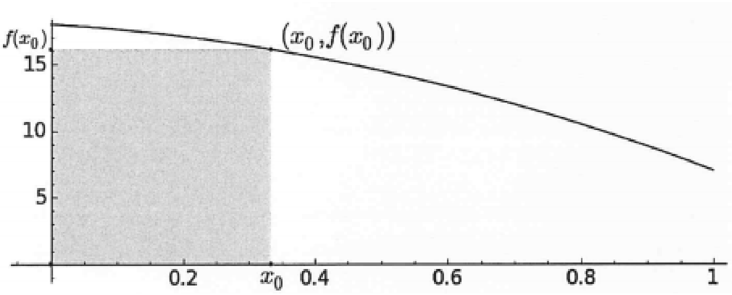
$$\Rightarrow f'(x) = \left(1+x^2\right)^{1/x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(1+x^2\right) + \frac{2}{1+x^2}\right)$$

15. Cantabria, junio 15

Consideremos el rectángulo de vértices (0, 0), $(x_0, 0)$, $(x_0, f(x_0))$, $(0, f(x_0))$, tal y como indica la figura, donde $0 \le x_0 \le 1$ y $f(x) = 18 - 3x - 8x^2$.

a) Calcula el valor de x_0 para que el área del rectángulo sea máxima. Calcula el área de dicho rectángulo.

b) Calcula el área del recinto encerrado bajo la gráfica de $f(x)$ entre $0 \le x \le 1$.



Solución:

a) El área del rectángulo indicado es:

$S = x_0 \cdot f(x_0) \to$ Dejando *x* variable: $S(x) = x\cdot f(x) = x\left(18-3x-8x^2\right) = 18x - 3x^2 - 8x^3$

Esa superficie será máxima en la solución de $S'(x) = 0$ que haga negativa a $S''(x)$.

$$S'(x) = 18 - 6x - 24x^2 \to S'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{1764}}{-48} = \begin{cases} -1 \\ 3/4 \end{cases} \to 0 \le x \le 1 \Rightarrow x = \frac{3}{4} = 0,75$$

Como $S''(x) = -6 - 48x$ y $S''(0,75) < 0$, para ese valor se tiene el máximo buscado.

El valor de esa área será: $S(0,75) = 18\cdot0,75 - 3\cdot0,75^2 - 8\cdot0,75^3 = 8,4375$ u².

b) El área de ese recinto viene dada por la integral:

$$\int_0^1 \left(18 - 3x - 8x^2\right)dx = \left(18x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{8}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1 = 18 - \frac{3}{2} - \frac{8}{3} = \frac{83}{6} \text{ u}^2.$$

16. Castilla– La Mancha, junio 15

Dada la función $f(x)=e^{\sin x}+x^2+ax+b$, a, $b\in\mathbf{R}$:

a) Determina los parámetros a, $b\in\mathbf{R}$ sabiendo que la gráfica de $f(x)$ pasa por el punto (0, 2) y que en dicho punto tiene un extremo relativo. (1,5 puntos)

b) Para los valores de los parámetros encontrados, estudia si dicho extremo relativo es un máximo o un mínimo. (1 punto)

Solución:

a) Si la gráfica de $f(x)$ pasa por el punto (0,2) y que en dicho punto tiene un extremo relativo, entonces: $f(0)=2$ y $f'(0)=0$

$$f(x)=e^{\sin x}+x^2+ax+b \Rightarrow f'(x)=\cos x e^{\sin x}+2x+a$$

$\to$ $f(0)=2 \Rightarrow 2=e^0+b\Rightarrow b=1$

$\to$ $f'(0)=0 \Rightarrow 0=1+a\Rightarrow a=-1$

La función será: $f(x)=e^{\sin x}+x^2-x+1$

b) $f'(x)=\cos x e^{\sin x}+2x-1 \Rightarrow f''(x)=-\sin x e^{\sin x}+\cos^2 x e^{\sin x}+2$.

Como $f''(0)=1+2>0$, en x = 0 se tiene un mínimo.

17. Castilla– La Mancha, junio 15

Calcula el domino y las asíntotas de las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x}-x}{x-2}, \qquad g(x)=\frac{x^3}{x^2-4x+4}$$

Solución:

$\to$ $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x}-x}{x-2}$: está definida siempre que $x\geq 0$ y $x\neq 2$. Dom(f) = [0, 2) $\cup$ (2, +∞).

Veamos si tiene una asíntota vertical en x = 2.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-x}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{2x}-x\right)\left(\sqrt{2x}+x\right)}{(x-2)\left(\sqrt{2x}+x\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-x^2}{(x-2)\left(\sqrt{2x}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x(2-x)}{(x-2)\left(\sqrt{2x}+x\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{-x}{\left(\sqrt{2x}+x\right)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

Como existe el límite, la función no tiene asíntotas verticales.

¿Asíntota horizontal?

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x}-x}{x-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{\sqrt{2x}}-1}{1}=-1$$ $\Rightarrow$ la recta y = –1 es asíntota horizontal.

¿Asíntota oblicua?

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{2x}-x}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x}-x}{x^2-2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left(L'H\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{2x}}-1}{2x-2}=\left[\frac{-1}{\infty}\right]=0.$$

No tiene asíntota oblicua.

$\to g(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4x+4}$: no está definida cuando $x^2-4x+4=0\Rightarrow (x-2)^2=0\Rightarrow x=2$.
Por tanto, Dom(g) = **R** – {2}.

Tiene una asíntota vertical en x = 2, pues:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3}{x^2-4x+4}=\left[\frac{8}{0}\right]=\infty.$$

También tiene una asíntota oblicua pues es un fracción racional con grado del numerador uno más que el del denominador.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2-4x+4}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-4x^2+4x}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4x+4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-4x}{x^2-4x+4}=4$$

La asíntota es la recta $y=x+4$.

18. Castilla– La Mancha, junio 15

Dada la función $f(x)=(x+1)e^{2x}$, se pide:

a) Calcula los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de $f(x)$. (1,25 puntos)

b) Encuentra una primitiva de la función $f(x)$ que pase por el origen de coordenadas. (1,25 puntos)

Solución:

a) Derivando dos veces:

$$f(x)=(x+1)e^{2x}\quad \to f'(x)=e^{2x}+2(x+1)e^{2x}=(2x+3)e^{2x}$$
$$\to f''(x)=2e^{2x}+2(2x+3)e^{2x}=(4x+8)e^{2x}$$

La derivada segunda se anula en x = –2, que puede ser un punto de inflexión.

- Si $x < -2$, $f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava (∩).
- Si $x > -2$, $f''(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es convexa (∪).
- Por tanto, en x = –2 se da un punto de inflexión.

b) $\int (x+1)e^{2x}dx=\int xe^{2x}dx+\int e^{2x}dx$

La primera integral, $\int xe^{2x}dx$, debe hacerse por partes; la segunda es inmediata.

Tomando:

$$u=x \text{ y } dv=e^{2x}dx \Rightarrow du=dx \text{ y } v=\frac{1}{2}e^{2x}$$

Luego,

$$\int xe^{2x}dx = x\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}dx=\frac{x}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}$$

Como $\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+c$, se tendrá que:

$$F(x)=\int (x+1)e^{2x}dx=\int xe^{2x}dx+\int e^{2x}dx = \frac{x}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{2x}+c=\frac{x}{2}e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+c$$

Si se quiere que $F(0)=0$ (que pase por el origen de coordenadas, punto (0, 0)) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{0}{2}\cdot e^0+\frac{1}{4}e^0+c=0\Rightarrow c=-\frac{1}{4}$$

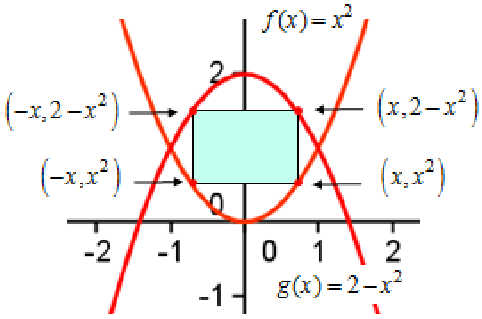
Luego $F(x)=\frac{x}{2}e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{4}$

19. Castilla y León, junio 15

Determinar los vértices del rectángulo de área máxima que tiene lados paralelos a los ejes de coordenadas y vértices en el borde del recinto delimitado por las gráficas de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=2-x^2$.

Solución:

La situación es la que se indica en la figura de la derecha.



El rectángulo tendrá de base 2*x*, y de altura $2-x^2-x^2=2-2x^2$.

Su área, que depende del valor de *x* elegido, vendrá dada por la función:

$$A(x)=2x\cdot\left(2-2x^2\right)=4x-4x^3$$

El máximo de *A* se obtiene en la solución de $A´=0$ que hace negativa a $A´´$.

Derivando:

$$A´(x)=4-12x^2=0\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Como $A´´(x)=-24x$, y $A´´\left(1/\sqrt{3}\right)<0$, para ese valor de *x* se obtiene el área máxima.

Los vértices son:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{3}\right);\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{5}{3}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{3}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{5}{3}\right)$$

20. Castilla y León, junio 15

a) Sea $g(x)$ una función continua y derivable en toda la recta real tal que $g(0)=0$ y $g(2)=2$. Probar que existe algún punto c del intervalo (0, 2) tal que $g´(c)=1$. (1 punto)

b) Hallar la función $f(x)$ que cumple $f´(x)=x\ln\left(x^2+1\right)$ y $f(0)=1$. (1,5 puntos)

Solución:

a) Es una consecuencia del teorema del valor medio, que dice: Si $f(x)$ es continua en [*a*, *b*] y derivable en (*a*, *b*), entonces existe algún punto $c\in(a, b)$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f´(c)$.

En este caso, la función $g(x)$ cumple las hipótesis del teorema en el intervalo [0, 2], luego existe algún punto $c\in(0, 2)$ tal que $\frac{g(2)-g(0)}{2-0}=g´(c)$

Como $\frac{g(2)-g(0)}{2-0}=\frac{2-0}{2-0}=1 \Rightarrow g´(c)=1$, que era lo se pedía.

b) La función $f(x)$ se obtiene integrado: $f(x) = \int x \ln\left(x^2+1\right) dx$.

Puede hacerse mediante un cambio de variable y aplicando el método de partes.
Si se hace el cambio $x^2+1 = t \Rightarrow 2xdx = dt$, entonces:

$$\int x \ln\left(x^2+1\right) dx = \frac{1}{2}\int \ln\left(x^2+1\right) 2xdx = \frac{1}{2}\int (\ln t)\, dt$$

La integral $\int \ln t\ dt$ puede hacerse por partes.

Tomando:

$$u = \ln t \ \Rightarrow\ du = \frac{1}{t} dt$$

$$dv = dt \ \Rightarrow\ v = t$$

$$\int \ln t\ dt = t\ln t - \int dt = t\ln t - t + c = t(\ln t - 1) + c$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int x\ln\left(x^2+1\right)dx = \frac{1}{2}\int \ln\left(x^2+1\right)2xdx = \frac{1}{2}\int(\ln t)\,dt = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\left(\ln\left(x^2+1\right)-1\right)+c$$

Como se desea que $f(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(0+1)\left(\ln(0+1)-1\right)+c \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot(-1)+c = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$.

Por tanto, la función es: $f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\left(\ln\left(x^2+1\right)-1\right)+\frac{3}{2}$.

21. Castilla y León, junio 15

Dada la función $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, determinar su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica. (2,5 puntos)

Solución:

La función está definida cuando lo está $\ln x$: por tanto, cuando $x > 0$. Dom(f) = $(0, +\infty)$.

¿Asíntota vertical?

Puede darse cuando se anula el denominador, en $x = 1$.

En efecto, como $\lim_{x\to 1} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$, la recta $x = 1$ es asíntota vertical de la curva.

Puede verse que:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty \to$$ Por la izquierda, cuando $x \to 1^-$, la curva tiende a $-\infty$.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty \to$$ Por la derecha, cuando $x \to 1^+$, la curva tiende a $+\infty$.

¿Asíntota horizontal?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L'H) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1/x} = \infty$$ $\to$ No tiene asíntota horizontal.

¿Asíntota oblicua?

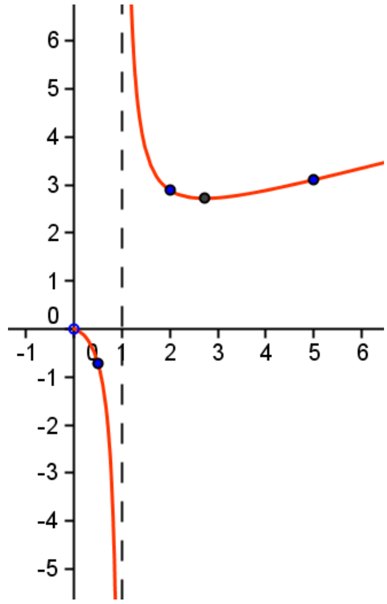
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{\ln x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}=0 \to \text{Tampoco tiene asíntota oblicua.}$$

Crecimiento y decrecimiento.

$$f(x)=\frac{x}{\ln x} \Rightarrow f´(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$$

La derivada se anula cuando $\ln x-1=0 \Rightarrow x=e$.
Con esto:

- Si $0 < x < 1$, $f´(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $1 < x < e$, $f´(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $x > e$, $f´(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Por tanto, en $x = e$ se da un mínimo relativo.



Para hacer un esbozo de su gráfica conviene dar algunos valores:

$$f(0,5)=\frac{0,5}{\ln 0,5}\approx -0,72;\quad f(2)=\frac{2}{\ln 2}\approx 2,89;$$

$$f(e)=\frac{e}{\ln e}\approx 2,72 \text{ (mínimo)};\quad f(5)=\frac{5}{\ln 5}\approx 3,11$$

También puede observarse que $\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln x}=\left[\frac{0}{-\infty}\right]=0^-$.

Su gráfica es la adjunta.

22. Castilla y León, junio 15

a) Calcular $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

b) Calcular el área del recinto delimitado por las gráficas de las funciones $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x^2}$ y la recta $x=e$.

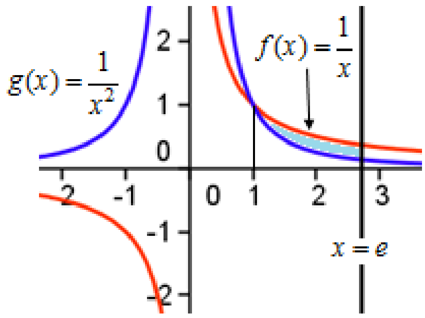
Solución:

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)=\left[\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty\right] \to$ Forma indeterminada: puede resolverse operando y aplicando L´Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=(L´H)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{(1+x)\ln(1+x)+x}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L´H)=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\ln(1+x)+1+1}=-\frac{1}{2}$$

b) Las gráficas de las funciones $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=\frac{1}{x^2}$ se cortan en la solución de $\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}\Rightarrow x^2=x\Rightarrow x=1$.



Por tanto, el área pedida viene dada por

$$S=\int_1^e\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^e=1+\frac{1}{e}-(0+1)=\frac{1}{e}\ \text{u}^2.$$

23. Castilla y León, septiembre 15

Consideremos la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & \text{si } x\le 2 \\ \ln(x-1), & \text{si } x>2\end{cases}$.

Hallar los valores de *a*, *b* y *c* para que $f(x)$ sea continua en toda la recta real y tenga un extremo relativo en el punto (1, –1). (2,5 puntos)

Solución:

Por separado, para cada intervalo de definición, las funciones dadas son continuas y derivables. El único punto conflictivo es *x* = 2, en donde las funciones difieren a izquierda y derecha.

En ese punto la función está definida, siendo $f(2)=4a+2b+c$; para que sea continua, además, debe tener límite en *x* = 2 (deben ser iguales los límites laterales) y coincidir con su valor de definición.

Veamos:

Si $x\to 2^-$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(ax^2+bx+c\right)=4a+2b+c$.

Si $x\to 2^+$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\ln(x-1)=\ln 1=0$.

Ambos límites coinciden si $4a+2b+c=0$.

Como pasa por el punto (1, –1) $\Rightarrow$ $f(1)=-1\to a+b+c=-1$.

Y por tener en máximo en ese punto: $f'(1)=0\to\left(f'(x)=2ax+b\right)\Rightarrow 2a+b=0$.

Por tanto se tiene el sistema: $\begin{cases}4a+2b+c=0\\ a+b+c=-1\\ 2a+b=0\end{cases}$

Con solución: $\begin{cases}4a+2b+c=0\\ a+b+c=-1\\ 2a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a+2(-2a)+c=0\\ a+(-2a)+c=-1\\ b=-2a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=0\\ a=1\\ b=-2\end{cases}$.

24. Cataluña, junio 15

3. Responeu a les qüestions següents:

a) Determineu l'equació de la recta tangent a la corba $y=x^3$ en el punt d'abscissa $x=2$.
[1 punt]

b) Calculeu l'àrea de la regió plana finita limitada per la corba $y=x^3$ i la recta $y=3x-2$.
[1 punt]

Solución:

a) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa *x* = *a*, en el punto (*a*, *f*(*a*)) es:

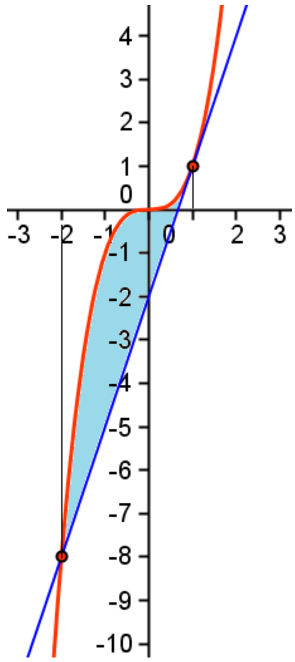
$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

En este caso:

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2;\; f(2) = 8;\; f'(2) = 12$$

La tangente pedida es:

$$y - 8 = 12(x-2) \Rightarrow y = 12x - 16$$



b) La curva y la recta se cortan en las soluciones de $x^3 = 3x - 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2 + x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 (x+2) = 0$$

(La solución *x* = 1 se ve a ojo; el factor $\left(x^2 + x - 2\right)$ se halla dividiendo; la descomposición final se determina haciendo la ecuación de segundo grado asociada).

Conviene hacer un esbozo gráfico, que en este caso resulta muy sencillo pues la funciones son conocidas.

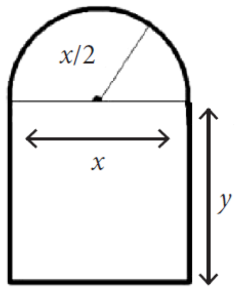
Con esto, el área pedida viene dada por el valor de la integral:

$$\int_{-2}^{1} \left(x^3 - 3x + 2\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 - (4 - 6 - 4) = \frac{27}{4} \text{ u}^2.$$

<u>25. Cataluña, junio 15</u>

6. La portalada d'una catedral està formada, en la part superior, per un arc de mitja circumferència que recolza sobre dues columnes, com il·lustra la figura adjunta, en què *x* és el diàmetre de la circumferència, és a dir, la distància entre columnes, i *y* és l'alçària de cada columna.



a) Comproveu que la funció $f(x, y) = \dfrac{\pi x^2}{8} + xy$ determina l'àrea d'aquesta portalada.

[1 punt]

b) Si el perímetre de la portalada fa 20 m, determineu les mides *x* i *y* de la portalada que en maximitzen l'àrea.

[1 punt]

<u>Solución</u>:

a) El área de la puerta es la suma de las áreas del semicírculo y del rectángulo. Esto es:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + xy \Rightarrow f(x, y) = \frac{\pi x^2}{8} + xy$$

b) El perímetro es la suma: ancho de la puerta + altura de las dos columnas + longitud del arco. Si vale 20 m $\Rightarrow x + 2y + \pi\dfrac{x}{2} = 20$

Despejando la incógnita *y* y sustituyendo en la función de área se tiene:

$$x+2y+\pi\frac{x}{2}=20 \Rightarrow 2x+4y+\pi x=40 \Rightarrow y=\frac{40-2x-\pi x}{4}$$

$$f(x,y)=\frac{\pi x^2}{8}+xy \Rightarrow S(x)=\frac{\pi x^2}{8}+\frac{40x-2x^2-\pi x^2}{4} \Rightarrow S(x)=\frac{80x-4x^2-\pi x^2}{8}$$

El máximo de S se obtiene en la solución de $S´= 0$ que hace negativa a $S´´$.

$$S´(x)=\frac{80-8x-2\pi x}{8}=0 \Rightarrow x=\frac{80}{8+2\pi}\approx 5,6 \text{ m.}$$

Como $S´´(x)=-1-\frac{\pi}{4}<0$, para ese valor de x se tiene el máximo buscado.

La altura de la columna debe ser $y\approx\frac{40-2\cdot 5,6-\pi\cdot 5,6}{4}=2,8$ m

26. Comunidad Valenciana, junio 15

Un pueblo está situado en el punto $A(0, 4)$ de un sistema de referencia cartesiano. El tramo de un río situado en el término municipal del pueblo describe la curva $y=\frac{x^2}{4}$, siendo $-6 \le x \le 6$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

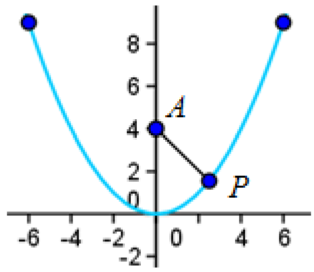
a) La distancia entre un punto $P(x, y)$ del río y el pueblo en función de la abscisa x de P. (2 puntos)

b) El punto o puntos del tramo del río situados a distancia mínima del pueblo. (4 puntos)

c) El punto o puntos del tramo del río situados a distancia máxima del pueblo. (4 puntos)

Solución:

a) La situación es como la representada en la figura adjunta.



El punto P tiene coordenadas $P\left(x,\frac{x^2}{4}\right)$.

La distancia de A a P es

$$d(A,P)=\sqrt{x^2+\left(\frac{x^2}{4}-4\right)^2}=\sqrt{\frac{x^4}{16}-x^2+16}$$

b) Los valores máximos y mínimos se obtiene en las soluciones de $d´= 0$ que hacen, respectivamente, negativa o positiva a $d´´$. (Como en este caso la derivada segunda resultará engorrosa, una alternativa al estudio de la distancia d es el estudio de $D=d^2=\frac{x^4}{16}-x^2+16$, pues como $d > 0$ su valor será máximo, o mínimo, cuando lo sea D).

Derivando:

$$D=\frac{x^4}{16}-x^2+16 \Rightarrow D´=\frac{4x^3}{16}-2x \Rightarrow D´´=\frac{12x^2}{16}-2$$

$$\Rightarrow D´=\frac{4x^3}{16}-2x=0 \Rightarrow 4x^3-32x=0 \Rightarrow 4x\left(x^2-8\right)=0 \Rightarrow x=0; x=\pm\sqrt{8}.$$

Como $D´´(0)=-2<0$, en el caso de $x = 0$ se tiene un máximo relativo.

Como $D´´\left(\pm\sqrt{8}\right)=\frac{12\cdot 8}{16}-2=4>0$, para los valores de $x=\pm\sqrt{8}$ se obtiene sendos mínimos.

Esos puntos son $P_1\left(\sqrt{8},2\right)$ y $P_2\left(-\sqrt{8},2\right)$.

c) La solución asociada a $x = 0$, punto $O(0, 0)$, corresponde a un máximo relativo, pues las distancias de A a los puntos (6, 9) y (–6, 9) son las mayores.

$$d\left(A,O\right)=4\,;\ d\left(A,(6,9)\right)=d\left(A,(-6,9)\right)=\sqrt{6^2+5^2}=\sqrt{61}$$

27. Comunidad Valenciana, julio 15

Se va a construir un depósito de 1500 m^3 de capacidad, con forma de caja abierta por la parte superior. Su base es pues un cuadrado y las paredes laterales son cuatro rectángulos iguales perpendiculares a la base. El precio de cada m^2 de la base es de 15 € y el precio de cada m^2 de pared lateral es de 5 €.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

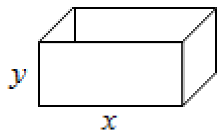
a) El coste total del depósito en función de la longitud x de un lado de su base. (3 *puntos*)

b) Las longitudes del lado de la base y de la altura del depósito para que dicho coste total sea mínimo. (5 *puntos*)

c) El valor del mínimo coste total del depósito. (2 *puntos*)

Solución:

a) Si el lado de la base es x y su altura y, se cumple:



$$V=x^2y=1500$$

El coste del depósito será:

base: $15x^2$; paredes laterales: $5\cdot 4xy$

Total: $C(x,y)=15x^2+20xy$.

Como de $V=x^2y=1500\ \Rightarrow\ y=\dfrac{1500}{x^2}$, sustituyendo en la función de coste se tiene:

$$C(x)=15x^2+20x\cdot\frac{1500}{x^2}\Rightarrow C(x)=15x^2+\frac{30000}{x}$$

b) Derivando:

$$C'(x)=30x-\frac{30000}{x^2}\ \to\ (\text{para mínimo, } C'(x)=0)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 30x-\frac{30000}{x^2}=0\Rightarrow 30x^3-30000=0\Rightarrow x^3=1000\Rightarrow x=10$$

Como $C''(x)=30+\dfrac{60000}{x^3}$ es positiva para $x = 10$ se confirma que la solución es buena.

Si $x = 10$ m $\Rightarrow y = 15$ m.

c) El coste mínimo será $C(10,10)=15\cdot 10^2+20\cdot 10\cdot 15=4500$ €.

28. Extremadura, junio 15

a) Enuncia el teorema de Bolzano.

b) Utilizando el teorema de Bolzano, encuentra un intervalo de la recta real en el que la función polinómica $p(x)=3x^3-x+1$ tenga alguna raíz.

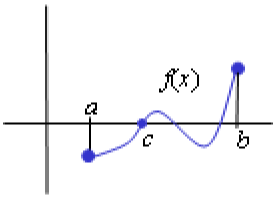
c) Utilizando el teorema de Bolzano, demuestra que las gráficas de las funciones $f(x)=e^x+\ln\left(1+x^2\right)$ y $g(x)=e^x+1$ se cortan en algún punto.

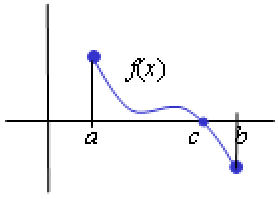
Solución:

a) El teorema de Bolzano asegura que si una función continua en un intervalo cerrado toma signos distintos en sus extremos, entonces corta al eje en algún punto de ese intervalo.
Dice lo siguiente:
Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Esto es, si la función es negativa en *a* ($f(a) < 0$) y positiva en *b* ($f(b) > 0$), entonces se anula en algún punto *c* entre *a* y *b* ($f(c) = 0$).

Geométricamente, esto significa que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ corta al eje *OX* en un punto, al menos. (Análogamente si $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$.)





Desde el punto de vista algebraico, este teorema asegura que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución entre *a* y *b*. Esa solución será el punto *c* cuya existencia afirma el teorema.

b) La función polinómica $p(x) = 3x^3 - x + 1$ es continua en toda la recta real; además, verifica que $p(-1) = -1$ y $p(0) = 1$. Por tanto tiene una raíz en el intervalo (–1, 0).

c) Las gráficas de las funciones $f(x) = e^x + \ln\left(1 + x^2\right)$ y $g(x) = e^x + 1$ se cortan en algún punto si se cumple que $f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = 0$.
Como $h(x) = f(x) - g(x) = e^x + \ln\left(1 + x^2\right) - \left(e^x - 1\right) = \ln\left(1 + x^2\right) - 1$ es una función continua en todo **R** y cumple que $h(0) = -1$ y $h(2) = \ln 5 - 1 > 0$, entonces existe algún punto $c \in (0, 2)$ tal que $h(c) = 0$.

<u>**29**. Galicia, junio 2015</u>
a) Definición e interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.
b) Calcula los valores de *b* y *c* para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(e + x^2\right) & \text{si } x < 0 \\ x^2 + bx + c & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

sea derivable en *x* = 0. (Nota: ln = logaritmo neperiano)
<u>Solución</u>:
a) Puede verse en cualquier libro. También en <u>Tema 8</u> de matematicasjmmm.com

b) Primero hay que ver la continuidad en *x* = 0:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \ln\left(e + x^2\right) = \ln e = 1; \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x^2 + bx + c\right) = c$$

Como los límites deben ser iguales *c* = 1.

Derivando:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{e+x^2} & \text{si } x<0\\ 2x+b & \text{si } x>0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2x}{e+x^2}=0\,; \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2x+b\right)=b \Rightarrow b=0.$$

30. Galicia, junio 2015

La gráfica de una función $f(x)$ pasa por el origen de coordenadas y su derivada es $f'(x)=\left(2-x\right)e^{3x}$. Determina la función $f(x)$ y calcula los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x)$.

Solución:

La función $f(x)=\int\left(2-x\right)e^{3x}dx$.

Puede hacerse por partes tomando:

$$u=2-x \text{ y } dv=e^{3x}dx \Rightarrow du=-dx \text{ y } v=\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}.$$

Por tanto:

$$f(x)=\int\left(2-x\right)e^{3x}dx=\left(2-x\right)\cdot\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{1}{3}\int e^{3x}dx=\frac{2-x}{3}e^{3x}+\frac{1}{9}e^{3x}+c.$$

Como pasa por el origen de coordenadas $\Rightarrow$ $f(0)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}e^0+\frac{1}{9}e^0+c=0 \Rightarrow \frac{7}{9}+c=0 \Rightarrow c=-\frac{7}{9}.$$

Luego, $f(x)=\dfrac{2-x}{3}e^{3x}+\dfrac{1}{9}e^{3x}-\dfrac{7}{9}$

Concavidad y convexidad:

$$f'(x)=\left(2-x\right)e^{3x} \Rightarrow f''(x)=-e^{3x}+3\left(2-x\right)e^{3x}=\left(5-3x\right)e^{3x}$$

La derivada segunda se anula en x = 5/3.

Con esto:

- Si $x<5/3$, $f''(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es convexa ($\cup$).
- Si $x>5/3$, $f''(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava ($\cap$).
- Por tanto, en $x = 5/3$ se tiene un punto de inflexión.

31. La Rioja, junio 15

Sea $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$.

i) Determina el dominio de *f*.
ii) Halla sus asíntotas.
iii) Determina los extremos relativos y estudia la monotonía de *f*.
iv) Dibuja la gráfica de *f* destacando los elementos hallados anteriormente.

Solución:

i) Dom(*f*) = **R**, pues el radicando nunca es negativo. $\to$ la ecuación $x^2-x+1=0$ no tiene raíces reales.

ii) Es evidente que la función no tiene asíntotas verticales ni horizontales.
Veamos si tiene oblicuas.

La recta $y = mx + n$ es asíntota oblicua de la curva $f(x)$ cuando se cumple que:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m,\ m \neq 0 \text{ y } \infty;\ n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - mx \right),\ n \neq \infty$$

En este caso:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2}} = \pm 1$$

Para $m = 1$,

$$n = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - x \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - x + 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x + 1}{\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x\right)} = -\frac{1}{2}$$ (obvio los detalles de cálculo: se “divide” por x)

Para $m = -1$,

$$n = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x\right)\left(\sqrt{x^2 - x + 1} - x\right)}{\left(\sqrt{x^2 - x + 1} - x\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x + 1}{\left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x\right)} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, la función tiene dos asíntotas oblicuas: $y = x - \frac{1}{2}$ hacia $+\infty$; $y = -x + \frac{1}{2}$ hacia $-\infty$

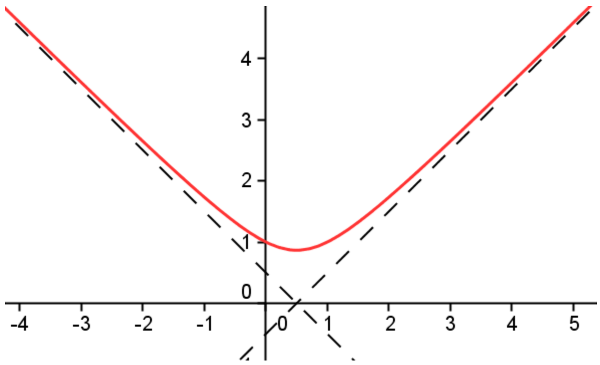
iii) Derivando: $f'(x) = \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Si $x < \frac{1}{2}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece.

Si $x > \frac{1}{2}$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función crece.

En $x = \frac{1}{2}$ se da un mínimo.



iv) La gráfica es la adjunta.

<u>**32**. Madrid, junio 15</u>

Dada la función: $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4} + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$, donde ln denota el logaritmo neperiano, se pide:

a) (1,5 puntos) Determina el dominio de f y sus asíntotas.
b) (0,75 puntos) Calcula la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.
c) (0,75 puntos) Calcula $\int f(x)dx$.

<u>Solución</u>:

a) Dominio:

→ hay que exigir que $x > -1$, para que exista $\ln(x+1)$; además los denominadores no pueden tomar el valor 0: $x^2 - 4 \neq 0; x+1 \neq 0 \Rightarrow x = \pm 2; x \neq -1$.

Por tanto: $Dom(f) = (-1, +\infty) - \{2\} = (-1, 2) \cup (2, +\infty)$.

La función puede tener asíntotas verticales en $x = -1$, por la derecha, y en $x = 2$. Veamos:

En $x = -1$: $\lim\limits_{x \to -1^+} \left(\dfrac{x}{x^2 - 4} + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = \left[\dfrac{1}{3} + \dfrac{-\infty}{0^+} \to -\infty \right] \Rightarrow x = -1$ es una AV por la derecha.

En $x = 2$: $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x}{x^2 - 4} + \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = \left[\dfrac{2}{0} + \dfrac{\ln 3}{3} \to \infty \right] \Rightarrow x = 2$ es otra AV.

También es posible que tenga una asíntota horizontal. Hay que calcular:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 - 4} + \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \left[0 + \frac{\infty}{\infty} \right]$$

El segundo límite puede hacerse por L´Hôpital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = (L´H) = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

Por tanto, la recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

b) Derivando:

$$f´(x) = \frac{x^2 - 4 - x \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} + \frac{\frac{1}{x+1} \cdot (x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2} + \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} \Rightarrow f´(0) = \frac{3}{4}$$

Como $f(0) = \dfrac{0}{-4} + \dfrac{\ln 1}{1} = 0$, la recta tangente en $x = 0$ es:

$$y - f(0) = f´(0) \cdot x \Rightarrow y = \frac{3}{4}x$$

c) $\displaystyle \int f(x)dx = \int \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) dx = \int \frac{x}{x^2 - 4} dx + \int \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx$

La primera integral es inmediata:

$$\int \frac{x}{x^2 - 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 - 4} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 4) + c_1$$

La segunda integral puede hacerse con ayuda del cambio $\ln(x+1) = t$, pues $\dfrac{1}{x+1} dx = dt$ y:

$$\int \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \int \ln(x+1) \cdot \frac{1}{x+1} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + c_2 = \frac{(\ln(x+1))^2}{2} + c_2$$

Por tanto:

$$\int \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 4) + \frac{(\ln(x+1))^2}{2} + c$$

33. Madrid, septiembre 2015

a) (0,5 puntos) Estudiar el crecimiento de la función $f(x)=1+2x+3x^2+4x^3$.

b) (1,5 puntos) Demostrar que la ecuación $1+2x+3x^2+4x^3=0$ tiene una única solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.

Solución:

a) Derivando e igualando a 0:

$$f´(x)=2+6x+12x^2 \to 2+6x+12x^2=0 \Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{36-96}}{4}$$: no tiene solución.

La función derivada siempre es positiva (como nunca toma el valor 0 y, por ejemplo, $f´(0)=2>0$, al ser una función continua, siempre será positiva). Por tanto, la función siempre es creciente.

b) Hay que aplicar Bolzano: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a)<0<f(b)$ o $f(a)>0>f(b)$), entonces existe algún punto $c\in(a, b)$ tal que $f(c)=0$.

Como:

$\to$ $f(0)=1>0$ y $f(-1)=1-2+3-4=-2<0$ $\Rightarrow$ la función corta en algún punto del intervalo (–1, 0).

$\to$ al ser siempre creciente $\Rightarrow$ no puede volver a cortar.

34. Madrid, septiembre 2015

a) (1 punto) Calcular la integral definida $\int_1^4 (1-x)e^{-x}dx$.

b) (1 punto) Calcular $\lim_{x\to+\infty}(1-x)e^{-x}$ y $\lim_{x\to-\infty}(1-x)e^{-x}$.

Solución:

a) Cálculo de una primitiva de $(1-x)e^{-x}$.

$$\int(1-x)e^{-x}dx=\int e^{-x}dx-\int xe^{-x}dx = -e^{-x}-\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)=xe^{-x}$$

La primera integral es inmediata; la segunda debe hacerse “por partes”.

$\to$ $\int xe^{-x}dx$:

Tomando: $u=x \Rightarrow du=dx$; $dv=e^{-x}dx \Rightarrow v=-e^{-x}$

Luego: $\int xe^{-x}dx = -xe^{-x}+\int e^{-x}dx = -xe^{-x}-e^{-x}$

Por tanto: $\int_1^4 (1-x)e^{-x}dx = \left[xe^{-x}\right]_1^4 = 4e^{-4}-e^{-1}$.

b) $$\lim_{x\to+\infty}(1-x)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{e^x}=\left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]=\left(L´H\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{e^x}=\left[\frac{1}{+\infty}\right]=0$$

$$\to \lim_{x\to-\infty}(1-x)e^{-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{e^x}=\left[\frac{+\infty}{0^+}\right]=+\infty$$

35. Murcia, junio 15

a) Calcula $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$.

b) Calcula $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$.

c) ¿Es continua la función $f(x)=\dfrac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$ en $x = 0$? Justifica la respuesta.

Solución:
En los dos casos debe tenerse en cuenta que:

$$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} \to e^{1/0^-} \equiv e^{-\infty} \equiv 0 \ ; \quad \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} \to e^{1/0^+} \equiv e^{+\infty} \equiv +\infty$$

a) Sustituyendo:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}} = \left[\frac{2+e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}} = \frac{2+0}{1+0}\right] = 2.$$

b) Sera necesario aplicar la regla de L´Hôpital y operar.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}} = \left[\frac{2+e^{+\infty}}{1+e^{+\infty}} = \frac{\infty}{\infty}\right] = (L´H) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}}{-\frac{2}{x^2}e^{2/x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{2e^{2/x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{2\left(e^{1/x}\right)^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2e^{1/x}} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0$$

c) La función $f(x)=\dfrac{2+e^{1/x}}{1+e^{2/x}}$ no es continua en $x = 0$, pues no tiene límite en ese punto: no coinciden los límites laterales, como se ha visto más arriba.

36. Murcia, junio 15

a) Calcula $\int 2x \arctan x dx$

b) De todas las primitivas de la función $f(x)=2x\arctan x$, encuentra la que pasa por el punto de coordenadas (0, –2).

Solución:
a) Esta integral debe hacerse por el método de partes.
Si se toma:

$$\begin{cases} u = \arctan x \\ dv = 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{1+x^2} dx \\ v = x^2 \end{cases} \Rightarrow \int 2x \arctan x dx = x^2 \arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

La segunda integral se hace como sigue:

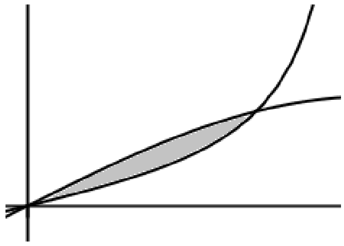
$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \arctan x$$

Por tanto:

$$\int 2x\arctan x dx = x^2\arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2}dx = x^2\arctan x - x + \arctan x + c$$

b) Las primitivas de $f(x)=2x\arctan x$ son $F(x)=x^2\arctan x - x+\arctan x+c$.
Si se desea que una primitiva pase por el punto (0, –2) $\Rightarrow$ $F(0)=-2$.
Como $F(0)=0\cdot\arctan 0-0+\arctan 0+c=-2 \Rightarrow c=-2$.
La primitiva buscada será $F(x)=x^2\arctan x-x+\arctan x-2$.

37. <u>Murcia, junio 15</u>
Considera el recinto limitado por la gráfica de las funciones $f(x)=2\sin x$ y $g(x)=\tan x$ en el primer cuadrante del plano *XY*, que está representado en la figura adjunta.



a) Determina los puntos de corte de dichas gráficas.
b) Calcula el área de dicho recinto.
<u>Solución</u>:
Puede observarse que las escalas de los ejes no son las mismas.

a) Los puntos de corte se obtienen resolviendo la ecuación $2\sin x=\tan x$:

$$2\sin x=\tan x \Rightarrow 2\sin x=\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow 2\sin x\cos x-\sin x=0 \Rightarrow \sin x(2\cos x-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x=0 \\ 2\cos x-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pi/3 \end{cases} \to \text{Los puntos de corte son } O(0,0) \text{ y } P\left(\pi/3,\sqrt{3}\right)$$

b) El área pedida viene dada por el valor de la integral $\int_0^{\pi/3}(2\sin x-\tan x)dx$.

Como $\int 2\sin x dx - \int \tan x dx = -2\cos x + \int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -2\cos x+\ln(\cos x)$, se tiene que:

$$\int_0^{\pi/3}(2\sin x-\tan x)dx = \left(-2\cos x+\ln(\cos x)\right)\Big|_0^{\pi/3} =$$

$$= -2\cos\frac{\pi}{3}+\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)-\left(-2\cos 0+\ln(\cos 0)\right) = -2\cdot\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\left(-2\cdot 1+\ln 1\right)=1-\ln 2 \text{ u}^2.$$

38. <u>Navarra, junio 2015</u>
Demuestra que existen α ∈ (–1, 1) y β ∈ (–1, 1), α ≠ β, tales que $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$, siendo

$$f(x)=\left(x^3+1\right)e^{\sqrt[3]{3x+2}}\sqrt[3]{(x-1)\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \qquad \text{(3 puntos)}$$

<u>Solución</u>:
La función dada es continua y derivable en el intervalo [–1, 1]. Además $f(-1)=f(1)=0$; y también $f(0)=0$.
Por tanto se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle en los intervalos (–1, 0) y (0, 1).
En consecuencia:
→ en el intervalo (–1, 0) existe un α ∈ (–1, 0) tal que $f'(\alpha)=0$
→ en el intervalo (0, 1) existe un β ∈ (0, 1) tal que $f'(\beta)=0$.
Naturalmente α ≠ β, pues pertenecen a distintos intervalos disjuntos.

39. <u>País Vasco, junio 2015</u>

Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

a) Determinar los coeficientes *a*, *b* y *c* sabiendo que tiene extremos relativos en $x = -1$ y en $x = 1$ y que además pasa por el origen de coordenadas.

b) Estudiar la naturaleza de ambos extremos relativos (si son máximos o mínimos) y realizar un dibujo aproximado del polinomio.

<u>Solución</u>:

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow P'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow P''(x) = 6x + 2a$$

Por tener extremos relativos en $x = -1$ y en $x = 1$: $P'(-1) = 0$ y $P'(1) = 0$.

$$\begin{cases} P'(-1) = 3 - 2a + b = 0 \\ P'(1) = 3 + 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = -3; a = 0$$

Por pasar por el origen de coordenadas: $P(0) = 0 \Rightarrow c = 0$.

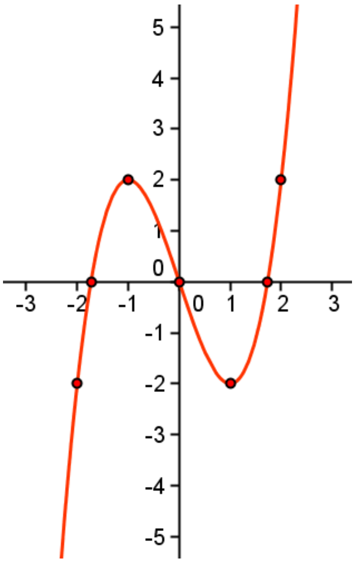
Por tanto, el polinomio es $P(x) = x^3 - 3x$.

b) Como $P''(x) = 6x$, se tiene que:

$P''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow$ en $x = -1$ hay un máximo.

$P''(1) = 6 > 0 \Rightarrow$ en $x = 1$ hay un mínimo.

En $x = 0$ hay una inflexión.



Estudio del crecimiento y decrecimiento.

Si $x < -1$, $P'(x) > 0 \Rightarrow$ la función crece.

Si $-1 < x < 1$, $P'(x) < 0 \Rightarrow$ la función decrece.

Si $x > 1$, $P'(x) > 0 \Rightarrow$ la función crece.

Algunos valores:

(–2, –2); (–1, 2); (0, 0); (1, –2); (2, 2)

Y corta al eje *OX* en los puntos: $x = -\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}$.

Con todos esos datos puede trazarse la gráfica adjunta.