ALGUNOS PROBLEMAS DE GEOMETRÍA PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE SELECTIVIDAD DE 2014

1. Aragón, junio 2014.

Dados el punto $P \equiv (1, -1, 0)$, y la recta: $s:\begin{cases}-2x+z-1=0\\3x-y-3=0\end{cases}$.

a) *(1,5 puntos)* Determine la ecuación general del plano $\left(Ax+By+Cz+D=0\right)$ que contiene al punto P y a la recta s.
b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman el plano $\pi: 2x+y-z+1=0$ y la recta s.

Solución:
a) El plano pedido será uno de los del haz de planos determinado por la recta s. Precisamente el plano que contenga al punto P.
La ecuación de ese haz es:

$$-2x+z-1+k\left(3x-y-3\right)=0$$

De ellos, el que contiene a $P \equiv (1, -1, 0)$ debe cumplir:

$$-2+0-1+k\left(3-(-1)-3\right)=0 \Rightarrow k=3.$$

Luego, el plano pedido es:

$$-2x+z-1+3\left(3x-y-3\right)=0 \Rightarrow 7x-3y+z-1=0$$

b) El ángulo que determinan un plano y una recta es el suplementario del que forman el vector de dirección de la recta con el normal del plano.

Las ecuaciones paramétricas de s son: $s:\begin{cases}x=t\\y=-3+3t\\z=1+2t\end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s=(1, 3, 2);$

Para $\pi: 2x+y-z+1=0 \rightarrow \vec{v}_\pi=(2, 1, -1)$.
Luego, el seno del ángulo (s, π),

$$\text{sen }(s, \pi) = \cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_s) = \frac{\vec{v}_\pi\cdot\vec{v}_s}{|\vec{v}_\pi|\cdot|\vec{v}_s|} = \frac{(2, 1, -1)\cdot(1, 3, 2)}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2+2^2}} =$$

$$= \frac{2+3-2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{84}} = 0,3273... \Rightarrow \text{ángulo } (s, \pi) = \text{arcsen } 0,3273\ldots = 19,11^{\circ}$$

2. Castilla-León, junio 2014.

Sea π el plano que pasa por los puntos $A(1, -1, 1)$, $B(2, 3, 2)$, $C(3, 1, 0)$ y r la recta dada por $r: \frac{x-7}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+3}{2}$

a) Calcular el ángulo que forman la recta r y el plano π. (1 punto)

b) Calcular los puntos de r que distan 6 unidades del plano π. (1,5 puntos)

Solución:

La ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, -1, 1)$, $B(2, 3, 2)$, $C(3, 1, 0)$ es:

$$\begin{cases} x = 1 + t + 2h \\ y = -1 + 4t + 2h \\ z = 1 + t - h \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y+1 & 4 & 2 \\ z-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y + 2z - 5 = 0$$

a) El ángulo que forma la recta con el plano es el complementario del formado por los vectores $\vec{v}_r = (2, -1, 2)$ y $\vec{v}_\pi = (2, -1, 2) \to$ (Puede observarse que son el mismo vector, luego la recta y el plano son perpendiculares)..

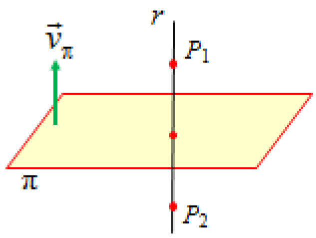
También puede verse que: sen (r, π) = $\cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|} \Rightarrow$ sen (r, π) = $\frac{4+1+4}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{9}} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ángulo $(\vec{v}_r, \vec{v}_\pi)$ = arcsen 1 = 90º $\Rightarrow$ la recta es perpendicular al plano

b) Un punto genérico de la recta es $P(7+2p, \ -6-p, \ -3+2p)$. Como se desea que

$$d(P, \pi) = 6 \Rightarrow \frac{2(7+2p) - (-6-p) + 2(-3+2p) - 5}{\sqrt{9}} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9p+9}{\pm 3} = 6 \Rightarrow \begin{cases} p = -3 \\ p = 1 \end{cases}.$$



Para $p = -3$, $P_1(1, -3, -9)$.

Para $p = 1$, $P_2(9, -7, -1)$.

3. Castilla-León, junio 2014.

Calcular la recta contenida en el plano $\pi_1 \equiv x + y + z = 3$, paralela al plano $\pi_2 \equiv x = 0$, y que pasa por el punto simétrico de $B(-1, 1, 1)$ respecto de π_2. (2,5 puntos)

Solución:
Para hallar el punto simétrico de $B(-1, 1, 1)$ respecto de $\pi_2 \equiv x = 0$, se puede hacer lo siguiente:
1) Se calcula el punto M de corte de la recta p, perpendicular a π_2 por B, con dicho plano.

Como $\vec{v}_{\pi 2}$ = (1, 0, 0), se deduce que $p: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

Corte de la recta p con plano π_2:
$-1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow M = (0, 1, 1)$.

2) Suponiendo que el simétrico es $B' = (x_0, y_0, z_0)$, el punto medio de B y B' será:
$$M = \left(\frac{-1 + x_0}{2}, \ \frac{1 + y_0}{2}, \ \frac{1 + z_0}{2} \right)$$
Luego: $(0, 1, 1) = \left(\frac{-1 + x_0}{2}, \ \frac{1 + y_0}{2}, \ \frac{1 + z_0}{2} \right) \Rightarrow x_0 = 1; \ y_0 = 1; \ z_0 = 1$
Por tanto, el punto simétrico de B respecto de π_2 es $B' = (1, 1, 1)$.

El vector director de la recta pedida es $\vec{v}_r = \vec{v}_{\pi 1} \times \vec{v}_{\pi 2} \to$ (Si la recta está en un plano y es paralela a otro, su vector director debe ser perpendicular a los vectores característicos de ambos planos).

Luego $\vec{v}_r = \vec{v}_{\pi 1} \times \vec{v}_{\pi 2} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, \ 1, \ -1)$.

Por tanto: $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

4. <u>Castilla La Mancha, junio 2014.</u>

a) Halla a $\in$ **R** para que las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ 3x+2y+z=a \end{cases}$$

se corten en un punto. (1,25 puntos)

b) Para dicho valor de *a*, da la ecuación implícita de un plano π que contenga a *r* y *s*. (1,25 puntos)

<u>Solución</u>:

Las rectas se cortarán cuando el sistema asociado a las cuatro ecuaciones sea compatible determinado. Este sistema es $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \\ x+y \qquad =0 \\ 3x+2y+z=a \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{array}\right) = M \ \to \text{(Gauss)} \to \ A = \begin{array}{r} \\ F2+F1 \\ F3-F1 \\ F4-3F1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & a-3 \end{array}\right) = M \ .$$

El rango de A es 3, pues el menor $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

El determinante de la matriz ampliada, desarrollado por la primera columna, vale:

$$|M| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & a-3 \end{vmatrix} = 3\cdot(a-3+4)+4\cdot(-a+3-4) = -a-1 \Rightarrow \text{El rango de } M \text{ es 3}$$

cuando $a = -1$.

b) Si a = –1, las rectas son: $r \equiv \begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ 3x+2y+z=-1 \end{cases}$

El plano pedido será uno del haz determinado por la recta r, que es:

$$x+2y-z-1+k\left(-x+y-3z-2\right)=0$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta s son: $s \equiv \begin{cases} x=-t \\ y=t \\ z=-1+t \end{cases}$. Un punto de s es P = (0, 0, –1)

El plano que contiene a ambas rectas debe ser uno de los del haz que, además, contenga al punto P; por tanto, sustituyendo:

$$0+0+1-1+k\left(0+0+3-2\right)=0 \Rightarrow k=0$$

En consecuencia, el plano buscado es $\pi \equiv x+2y-z-1=0$.

5. Cataluña, junio 14

Siguin r i s les rectes de $\mathbb{R}^3$ d'equacions $r: \dfrac{x-2}{3} = y = \dfrac{z+1}{4}$ i $s: (x, y, z) = (1+2\alpha, 3-\alpha, 4+3\alpha)$, amb $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Comproveu que els punts mitjans dels segments que tenen un extrem situat sobre la recta r i l'altre extrem situat sobre la recta s formen un pla.
[1 punt]

b) Trobeu l'equació general (és a dir, que té la forma $Ax + By + Cz = D$) del pla de l'apartat anterior.
[1 punt]

Solución:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r son: $r \equiv \begin{cases} x = 2+3t \\ y = t \\ z = -1+4t \end{cases}$.

Puntos genéricos de r y s son, respectivamente:

$R = (2+3t,\ t,\ -1+4t)$; $S = (1+2\alpha,\ 3-\alpha,\ 4+3\alpha)$

El punto medio de R y S es: $M = \left(\dfrac{3+3t+2\alpha}{2},\ \dfrac{3+t-\alpha}{2},\ \dfrac{3+4t+3\alpha}{2}\right)$.

Por tanto, las coordenadas de M son: $M = \begin{cases} x = \dfrac{3+3t+2\alpha}{2} \\ y = \dfrac{3+t-\alpha}{2} \\ z = \dfrac{3+4t+3\alpha}{2} \end{cases} \Rightarrow M = \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}t + \alpha \\ y = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{2}\alpha \\ z = \dfrac{3}{2} + 2t + \dfrac{3}{2}\alpha \end{cases}$.

Que son las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por el punto $P = \left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$ y sigue las direcciones del los vectores $\vec{u} = \left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 2\right)$ $\vec{v} = \left(1,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$.

b) La ecuación general del plano anterior es:

$$\begin{vmatrix} x-\dfrac{3}{2} & \dfrac{3}{2} & 1 \\ y-\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ z-\dfrac{3}{2} & 2 & \dfrac{3}{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{4}+1\right) - \left(y-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{9}{4}-2\right) + \left(z-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x - y - 5z - \frac{3}{2} = 0.$$

6. Comunidad Valenciana, julio 2014

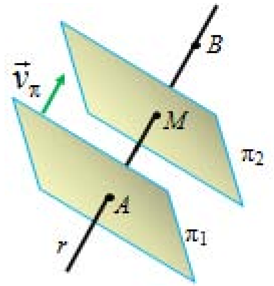
Se dan los puntos $A = (1, 5, 7)$ y $B = (3, -1, -1)$.
Se pide obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) Las ecuaciones de los planos π_1 y π_2 que son perpendiculares a la recta r que pasa por los puntos A y B, sabiendo que el plano π_1 pasa por el punto A y el plano π_2 pasa por el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos A y B. (4 puntos distribuidos en 2 puntos por cada plano).
b) La distancia entre los planos π_1 y π_2.
c) Las ecuaciones de la recta r que pasa por los puntos A y B, (2 puntos), y los puntos de la recta r que están a distancia 3 del punto $C = (1, 1, 0)$. (2 puntos).

Solución:
a) Los planos pedidos deben ser perpendiculares al vector $\boldsymbol{AB}$, que será su vector característico.

$\boldsymbol{AB} = (3, -1, -1) - (1, 5, 7) = (2, -6, -8) \equiv (1, -3, -4)$.

El punto medio del segmento de extremos A y B es:

$$M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{5-1}{2}, \frac{7-1}{2}\right) = (2, 2, 3).$$



Por tanto:

$$\pi_1 \equiv 1\cdot(x-1) - 3\cdot(y-5) - 4(z-7) = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x - 3y - 4z + 42 = 0$$

$$\pi_2 \equiv 1\cdot(x-2) - 3\cdot(y-2) - 4(z-3) = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x - 3y - 4z + 16 = 0$$

b) La distancia entre los planos es la misma que la hay entre los puntos A y M:

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(A, M) = \sqrt{(2-1)^2 + (2-5)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{26}.$$

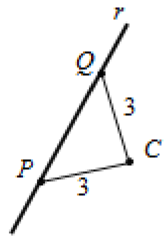
c) La recta viene determinada por el punto A y por el vector $\boldsymbol{AB}$. Sus ecuaciones paramétricas son: $r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 5-3t \\ z = 7-4t \end{cases} \to$ Un punto genérico de r es $X = (1+t, 5-3t, 7-4t)$.

Se buscan los puntos X tales que $d(X, C) = 3$, luego:

$$d(X, C) = \sqrt{t^2 + (5-3t)^2 + (6-4t)^2} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{t^2 + 25 + 9t^2 - 30t + 36 + 16t^2 - 48t} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 26t^2 - 78t + 61 = 9 \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$



Si $t = 1$, $P = (2, 2, 3)$.
Si $t = 2$, $Q = (3, -1, -1)$.

7. Comunidad Valenciana, junio 2014

Se da el triángulo T, cuyos vértices son A = (1, 2, –2), B = (0, –3, 1) y C = (–1, 0, 0), y los planos $\pi_1 \equiv x+y+z+1=0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x=-\alpha+\beta+1 \\ y=\alpha-2\beta \\ z=\alpha+\beta \end{cases}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La posición relativa del plano π_1 y del plano que contiene al triángulo T. (4 puntos)

b) Un vector $\vec{n}_1$ perpendicular al plano π_1 y un vector $\vec{n}_2$ perpendicular al plano π_2 (1,5 puntos) y el coseno del ángulo formado por los vectores $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ (1,5 puntos).

c) Las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π_1 y π_2. (3 puntos).

Solución:

a) El plano que contiene al triángulo T viene determinado por los tres puntos dados. Su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x+1 & -2 & -1 \\ y & -2 & 3 \\ z & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_T \equiv x+y+2z+1=0.$$

Es obvio que los planos π_1 y π_T se cortan, pues sus vectores característicos son distintos:

$\vec{v}_{\pi 1} = (1,1,1)$ y $\vec{v}_T = (1,1,2)$

Determinan la recta de ecuación: $r \equiv \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x+y+2z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x=1-t \\ y=y \\ z=0 \end{cases}$.

b) El plano $\pi_2 \equiv \begin{cases} x=-\alpha+\beta+1 \\ y=\alpha-2\beta \\ z=\alpha+\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y & 1 & -2 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv 3x+2y+z-3=0$.

Por tanto, los vectores pedidos son:

$\vec{n}_1$ = (1, 1, 1) y $\vec{n}_2$ = (3, 2, 1)

El ángulo que determinan viene dado por:

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{(1,\ 1,\ 1)\cdot(3,\ 2,\ 1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{42}} \Rightarrow \text{ángulo } (\vec{n}_1,\ \vec{n}_2) = 20{,}56º$$

c) Como ya se ha indicado, $\pi_2 \equiv 3x+2y+z-3=0$.

La recta determinada por los planos π_1 y π_2 es:

$$s \equiv \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 3x+2y+z-3=0 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} y+z=-1-x \\ 2y+z=3-3x \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=t \\ y=4-2t \\ z=-5+t \end{cases}.$$

8. Extremadura, julio 14

En $\mathbf{R}^3$, considere los cuatro puntos $A = (0, 1, 1)$, $B = (–2, 0, –1)$, $C = (–1, 1, 0)$ y $D = (–2, 2, 1)$, y sea r la recta que pasa por C y por D.
a) (1 punto) Obtenga ecuaciones paramétricas de r.
b) (1,5 puntos) Halle los puntos P de la recta r para los que el triángulo APB sea rectángulo en su vértice P.

Solución:
a) La recta que pasa por C y D viene determinada por el vector $\boldsymbol{DC}$ y por el punto C.
$\boldsymbol{DC} = (–1, 1, 0) – (–2, 2, 1) = (1, –1, –1)$.

Luego $r \equiv \begin{cases} x = -1+t \\ y = 1-t \\ z = -t \end{cases}$.

b) Sea $P = (-1+t,\ 1-t,\ -t)$ un punto genérico de r.
El triángulo APB será rectángulo cuando los vectores $\boldsymbol{AP}$ y $\boldsymbol{BP}$ sean perpendiculares; lo que significa que su producto escalar vale 0.

$$\overrightarrow{AP} = (-1+t,\ 1-t,\ -t) - (0,\ 1,\ 1) = (-1+t,\ -t,\ -t-1)$$

$$\overrightarrow{BP} = (-1+t,\ 1-t,\ -t) - (-2,\ 0,\ -1) = (1+t,\ 1-t,\ 1-t)$$

Producto escalar:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = (-1+t,\ -t,\ -t-1) \cdot (1+t,\ 1-t,\ 1-t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1;\ t = -\frac{2}{3}.$$

Para $t = 1$ se obtiene $P = (0, 0, –1)$.
Para $t = -\frac{2}{3}$, $P = \left(-\frac{5}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{2}{3}\right)$.

9. Islas Baleares, junio 14

Determina el (los) punto(s) de la recta $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{2}$ que equidistan de los planos

$\pi_1 \equiv x+y+z+3=0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=-\lambda+\mu \\ z=-6+\mu \end{cases}$. (10 puntos)

Solución:

Ecuaciones paramétricas de la recta: $r \equiv \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=2t \end{cases}$.

Un punto genérico de la recta es: $X=(1+2t,-1+t,2t)$.

Se desea encontrar los puntos X tales que $d(X,\pi_1)=d(X,\pi_2) \Rightarrow$

$$d(X,\pi_1)=\frac{1+2t-1+t+2t+3}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{1+2t-1+t-2t-3}{\pm\sqrt{1+1+1}}=d(X,\pi_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5t+3}{\sqrt{3}}=\frac{t-3}{\pm\sqrt{3}} \Rightarrow 5t+3=\pm(t-3)$$

Para el signo +: $5t+3=t-3 \Rightarrow t=-\dfrac{3}{2}$. Se obtiene el punto $X_1=\left(-2,-\dfrac{5}{2},-3\right)$.

Para el signo –: $5t+3=-t+3 \Rightarrow t=0$. Se obtiene el punto $X_2=(1,-1,0)$.

10. Islas Baleares, junio 14

Calcula la ecuación continua de la recta *r* paralela al plano $\pi_1 \equiv 2x-2y+5z=3$ y perpendicular a la recta $s:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{3}$ en el punto P(–1, 2, 0) (10 puntos)

Solución:

La recta *r* pedida cumple:

– Por ser paralela a p $\Rightarrow$ su vector de dirección, $\vec{v}_r$, debe ser perpendicular al vector normal del plano p, $\vec{v}_\pi$.

– Por ser perpendicular a *s* $\Rightarrow$ sus respectivos vectores de dirección, $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$, deben ser perpendiculares.

– Por tanto, $\vec{v}_r = \vec{v}_\pi \times \vec{v}_s$.

Como $\vec{v}_\pi$ = (2, –2, 5) y $\vec{v}_s$ = (2, –1, 3) $\Rightarrow$ $\vec{v}_\pi \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1,\ 4,\ 2)$.

La recta pedida es: $r \equiv \begin{cases} x=-1-t \\ y=2+4t \\ z=2t \end{cases}$. Y en su forma continua: $s:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{3}$

11. Canarias, junio 2014

Determinar el valor de a para que la recta r de ecuación $r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$ sea paralela al plano $\beta \equiv x - ay + 10z = -3$.

Solución:
La recta será paralela al plano cuando el sistema determinado por los tres planos sea incompatible. Para ello, el rango de la matriz de los coeficientes debe ser 2, mientras que el de la matriz ampliada será 3.
El sistema que se forma es:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \\ x - ay + 10z = -3 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -a & 10 & -3 \end{array}\right) = M$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 10 \end{vmatrix} = 10 + a + 19 - 4a - 2 = 0 \Rightarrow -3a + 27 = 0 \Rightarrow a = 9$$

Para a = 9, las matrices quedan así: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 9 & 10 & -3 \end{array}\right) = M$

Como el menor $|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 9 & -3 \end{vmatrix} = -30 - 9 + 34 \neq 0 \Rightarrow$ El rango de M es 3.

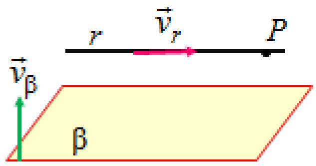
Por tanto, para a = 9, el rango de A < rango de $M \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

De otra forma:
Para que una recta sea paralela a un plano es necesario que el vector de dirección de la recta, $\vec{v}_r$, sea perpendicular al característico del plano, $\vec{v}_\beta$. Por tanto, su producto escalar debe valer 0. Además, ningún punto de la recta puede pertenecer al plano.
Para determinar el vector directo y un punto de la recta la escribimos en su forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x - y = 2 - 2z \\ 2x + y = 3 - z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 5/3 - t \\ y = -1/3 + t \\ z = t \end{cases}$$

Por tanto, $\vec{v}_r$ = (–1, 1, 1). Un punto de r será: P(5/3, –1/3, 0).
El vector característico del plano $\vec{v}_\beta$ = (1, –a, 10).
Debe cumplirse que $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\beta = 0 \Rightarrow$ (–1, 1, 1) · (1, –a, 10) = 0 ⇒ $-1 - a + 10 = 0 \Rightarrow a = 9$.
El plano β será: $\beta \equiv x - 9y + 10z = -3$.

Como el punto P(5/3, –1/3, 0) no es del plano, pues $\frac{5}{3} - 9\left(-\frac{1}{3}\right) + 0 = \frac{14}{3} \neq -3$, se deduce que el valor de a es el encontrado: a = 9.



12. La Rioja, julio 2014

Sean $\vec{u}=(1,a,a)$, $\vec{v}=(0,0,1)$ y $\vec{w}=(1,\ 1,\ a)$.

i) Halla los valores de *a* para los cuales los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales.
ii) Determina los valores de *a* para los cuales el vector $\vec{w}$ está en el plano que contiene a O(0, 0, 0) y tiene por vectores directores s $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución:
i) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales cuando su producto escalar vale 0: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
Por tanto, debe cumplirse que:

$(1, a, a)\cdot(0, 0, 1) = 0 \Rightarrow a = 0$.

ii) El vector $\vec{w}$ estará en el plano determinado por vectores directores s $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cuando los tres vectores sean linealmente dependientes. Por tanto, el determinante formado por los tres vectores debe valer 0.

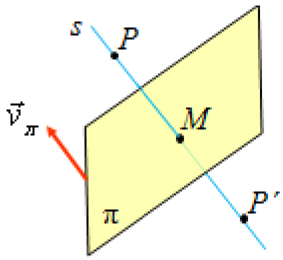
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1.$$

13. Madrid, junio 2014

Dados el punto *P*(1, 0, 1), el plano $\pi \equiv x+5y-6z=1$, y la recta $r\equiv\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto *P′* simétrico a *P* respecto de π.
b) (1 punto) Hallar la distancia de *P* a *r*.
c) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas *O*(0, 0, 0) y las intersecciones de π con los ejes coordenados *OX*, *OY* y *OZ*.

Solución:
a) La situación es la indicada en la figura adjunta.



Recta *s* perpendicular a π por *P*(1, 0, 1):

Como $\vec{v}_\pi$ = (1, 5, –6) $\Rightarrow s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=5\lambda \\ z=1-6\lambda \end{cases}$

Corte de la recta *s* con plano π (punto *M*):

$1 + \lambda + 5\cdot(5\lambda) - 6\cdot(1 - 6\lambda) = 1 \Rightarrow 62 - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 3/31 \Rightarrow$

$\Rightarrow M = \left(\dfrac{34}{31},\ \dfrac{15}{31},\ \dfrac{13}{31}\right)$.

Suponiendo que el simétrico es *P*’= (x_0, y_0, z_0), el punto medio de *P* y *P´* es:

$$M=\left(\frac{1+x_0}{2},\ \frac{y_0}{2},\ \frac{1+z_0}{2}\right)$$

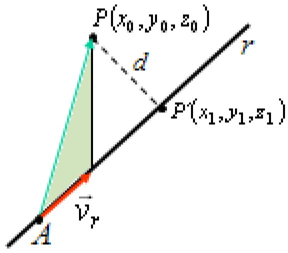
Por tanto: $\left(\dfrac{34}{31},\ \dfrac{15}{31},\ \dfrac{13}{31}\right)=\left(\dfrac{1+x_0}{2},\ \dfrac{y_0}{2},\ \dfrac{1+z_0}{2}\right)\Rightarrow$

$$\frac{34}{31}=\frac{1+x_0}{2}\Rightarrow x_0=\frac{37}{31};\ \frac{15}{31}=\frac{y_0}{2}\Rightarrow y_0=\frac{30}{31};\ \frac{13}{31}=\frac{1+z_0}{2}\Rightarrow z_0=-\frac{5}{31}$$

Por tanto, el punto simétrico de *P* respecto de π es $P´=\left(\dfrac{37}{31},\ \dfrac{30}{31},\ \dfrac{-5}{31}\right)$.

b) La ecuación de la distancia de un punto P a una recta r es:

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|},\ \text{siendo }\ A\in r.$$



En este caso:

$$r\equiv\begin{cases}x=0\\ z=0\end{cases}\Rightarrow\ r\equiv\begin{cases}x=0\\ y=t\\ z=0\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow A = (0, 0, 0)$, $P = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{AP} = (1, 0, 1)$, $\vec{v}_r = (0, 1, 0)$

El producto vectorial vale:

$$\overrightarrow{AP}\times\vec{v}_r\ =\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(-1,\ 0,\ 1)\ \Rightarrow\ \left|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}_r\right|=\sqrt{(-)^2+1^2}=\sqrt{2}$$

El módulo de $\vec{v}_r$: $\left|\vec{v}_r\right|=1$.

Luego $d(P,r)=\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$.

c) Corte del plano $\pi\equiv x+5y-6z=1$ con los ejes coordenados OX, OY y OZ.

Con OX: $A(1, 0, 0)$. Con OY: $B(0, 1/5, 0)$. Con OZ: $C(0, 0, -1/6)$.

El volumen del tetraedro viene dado por: $V_T\ =\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right|$

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/5 & 0\\ 0 & 0 & -1/6\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{-1}{6}\right)\right|=\frac{1}{180}\ \text{u}^3.$$

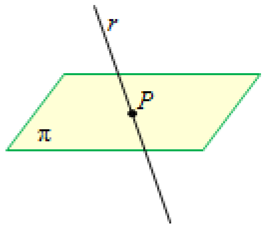
14. Madrid, junio 2014

Dados el plano $\pi \equiv 2x - y = 2$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de r y π.
b) (1 punto) Determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π.
c) (1 punto) Determinar la recta que pasa por $A(-2, 1, 0)$, corta a r, y es paralela a π.

Solución:

a) $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2t \\ z = t \end{cases}$.

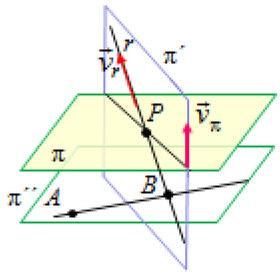


Sustituyendo las ecuaciones de r en π:

$$2 \cdot 1 - (2 + 2t) = 2 \Rightarrow -2t = 2 \Rightarrow t = -1.$$

La recta y el plano se cortan cuando t = –1: punto $P(1, 0, -1)$.

b) El plano π' queda determinado por r y $\vec{v}_r = (2, -1, 0)$.



Su ecuación será: $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 \quad + 2h \\ y = 2 + 2t - h \\ z = \quad t \end{cases}$.

En forma implícita:

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ y-2 & 2 & -1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x - 1 + y - 2 - 4z = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x + y - 4z - 3 = 0.$$

c) Si la recta es paralela a π estará en el plano π'' paralelo a π que pasa por A.

$\pi'' \equiv 2x - y + d = 0 \to$ Como contiene a $A \Rightarrow -4 - 1 + d = 0 \Rightarrow d = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi'' \equiv 2x - y + 5 = 0$

Si corta a $r \Rightarrow$ pasa por $B = r \cap \pi''$. Sustituyendo: $2 - 2 - 2t + 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{2}$.

El punto $B = (1, 7, 5/2)$.

La recta pedida (recta A–B: pasa por $A(-2, 1, 0)$, con **AB** = (3, 6, 5/2)) será: $\begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 1 + 6\lambda \\ z = \frac{5}{2}\lambda \end{cases}$

<u>**15**. Madrid, septiembre 2014</u>
Dados los puntos *A*(2, 0, –2), *B*(3, –4, –1), *C*(5, 4, –3) y *D*(0, 1, 44), se pide:
a) (1 punto) Calcular el área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C*.
b) (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro *ABCD*.

<u>Solución</u>:

a) El área del triángulo de vértices *A*, *B* y *C* viene dada por $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$

En este caso:
AB = (3, –4, –1) – (2, 0, –2) = (1, –4, 1); ***AC*** = (5, 4, –3) – (2, 0, –2) = (3, 4, –1)

Luego

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (0,\ 4,\ 16) \Rightarrow S = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 16^2} = 2\sqrt{17}\ \text{u}^2.$$

b) El volumen del tetraedro *ABCD* viene dado por $V_T = \frac{1}{6}\left|\ \left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}\right]\ \right|$

En este caso:
AB = (1, –4, 1); ***AC*** = (3, 4, –1); ***AD*** = (0, 1, 4) – (2, 0, –2) = (–2, 1, 6)

Luego

$$V = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\left|25 + 64 + 11\right| = \frac{50}{3}\ \text{u}^3.$$

16. Madrid, septiembre 2014

Dados los planos

$\pi_1 \equiv 2x + z - 1 = 0$, $\quad \pi_2 \equiv x + z + 2 = 0$, $\quad \pi_3 \equiv x + 3y + 2z - 3 = 0$

se pide:

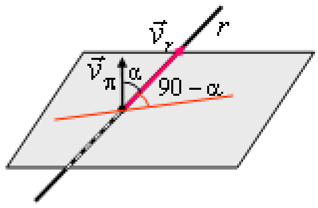
a) (1 punto) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π_1 y π_2.

b) (1 punto) Calcular el seno del ángulo que la recta del apartado anterior forma con el plano π_3.

Solución:

a) $r \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv 2x + z - 1 = 0 \\ \pi_2 \equiv x + z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ (restando ambas ecuaciones se obtiene) $r \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = t \\ z = -5 \end{cases}$.

b) El ángulo que forma una recta con un plano es el complementario del que determinan los vectores $\vec{v}_r$, de dirección de la recta, con $\vec{v}_\pi$, normal al plano.



Por tanto, el seno del ángulo (r, π),

$$\text{sen}\,(r,\ \pi) = \cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|}.$$

En este caso: $\vec{v}_r = (0, 1, 0)$ y $\vec{v}_{\pi 3} = (1, 3, 2)$

Luego: sen (r, π_3) $= \dfrac{(0,\ 1,\ 0)\cdot(1,\ 3,\ 2)}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{1+9+4}} = \dfrac{3}{\sqrt{14}} \Rightarrow$ ángulo(r, π_3) = 53,3º.

17. <u>Madrid, septiembre 2014</u>

Dados el plano π y la recta *r* siguientes:

$$\pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0, \qquad r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

se pide:
a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de *r* y π.
b) (1 punto) Calcular la distancia entre *r* y π.
c) (1 punto) Obtener el punto *P′* simétrico de *P*(3, 2, 1) respecto del plano π.

<u>Solución</u>:
a) Para determinar la posición de una recta y un plano basta con sustituir las ecuaciones de la recta en la del plano. En este caso:

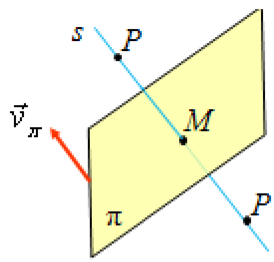
$\pi \equiv 2\cdot(1-2t)-(2-2t)+2\cdot(1+t)+3=0 \Rightarrow 5=0$, que naturalmente es absurdo.

Esto indica que la recta es paralela al plano.
(También podría verse que el vector director de la recta, $\vec{v}_r$ = (–2, –2, 1), y el normal al plano, $\vec{v}_\pi$ = (2, –1, 1), son perpendiculares; y que el punto (1, 2, 1) de la recta no pertenece al plano).

b) Como la recta es paralela al plano, la distancia entre ellos es igual a la distancia de cualquier punto de le recta al plano.

$$d(r,\pi) = d(P=(1,\ 2,\ 1),\pi) = \left|\frac{2\cdot 1 - 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}\right| = \frac{5}{3}.$$

c) El punto *P´*, es simétrico de *P* respecto del plano π, si el punto *M*, intersección del plano π con la recta que pasa por *P*, es el punto medio entre *P* y *P´*.



Se puede hacer lo siguiente:
1) Se calcula el punto *M*: → es el de corte de la recta *s*, perpendicular a π por *P*, con dicho plano.

Como $\vec{v}_\pi$ = (1, –2, 2), se deduce que $s: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$

Corte de la recta *s* con plano π:

$2\cdot(3+2\lambda)-(2-\lambda)+2\cdot(1+2\lambda)+3=0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow M = (1, 3, -1).$

2) Suponiendo que el simétrico es *P'*= (x_0, y_0, z_0), el punto medio de *P* y *P´* es:

$$M = \left(\frac{3+x_0}{2},\ \frac{2+y_0}{2},\ \frac{1+z_0}{2}\right) \Rightarrow (1, 3, -1) = \left(\frac{3+x_0}{2},\ \frac{2+y_0}{2},\ \frac{1+z_0}{2}\right) \Rightarrow$$

$$1=\frac{3+x_0}{2} \Rightarrow x_0=-1;\ 3=\frac{2+y_0}{2} \Rightarrow y_0=4;\ -1=\frac{1+z_0}{2} \Rightarrow z_0=-3$$

Por tanto, el punto simétrico de *P* respecto de π es *P´* = (–1, 4, –3).

18. Murcia, junio 2014

a) (1,25 puntos) Determine para qué valor del parámetro *a* la recta $r:\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x-2y+z=0 \end{cases}$ es perpendicular al plano $\pi: -6x+ay+2z=0$.

b) (1,25 puntos) Demuestre que si *a* = –8, la recta r corta al plano π en un punto y calcule dicho punto.

Solución:

a) La recta será perpendicular al plano cuando el vector de dirección de la recta, $\vec{v}_r$, sea paralelo al normal al plano, $\vec{v}_\pi$.

Expresando *r* en paramétricas se obtiene $\vec{v}_r$.

$$r:\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x-2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x+y=1-z \\ -x-2y=-z \end{cases} \to \text{(sumando)} -y=1-2z \Rightarrow r:\begin{cases} x=2-3t \\ t=-1+2t \\ z=t \end{cases}.$$

Por tanto, $\vec{v}_r$ = (–3, 2, 1); mientras que $\vec{v}_\pi$ = (–6, *a*, 2).

Serán paralelos cuando sus coordenadas sean proporcionales: $\frac{-3}{-6}=\frac{2}{a}=\frac{1}{2} \Rightarrow a=4$.

b) Si *a* = –8, $\pi: -6x-8y+2z=0$.

Sustituyendo las ecuaciones de *r* en la del plano se obtiene el punto de corte.

$$-6\cdot(2-3t)-8\cdot(-1+2t)+2t=0 \Rightarrow 4t-4=0 \Rightarrow t=1.$$

Para ese valor de *t*, sustituyendo en las ecuaciones de la recta, se obtiene el punto de corte, que es *P* = (–1, 1, 1).

19. Navarra, junio 14

Encuentra la ecuación continua de la recta *r* que pasa por el punto *P* ≡ (2, 3, –1) y es paralela a los planos $\pi_1 \equiv 2x-y+3z-1=0$ y $\pi_2 \equiv x+y-2z+3=0$.

Encuentra el punto $Q \in r$ que está en el plano *x* = 0.

Solución:

Si una recta es paralela a un plano su vector de dirección es perpendicular al normal del plano. En este caso, como la recta es paralela a los dos planos dados su vector de dirección vendrá dado por el producto vectorial de los vectores normales de ambos planos.

Por tanto:

$\vec{v}_r = \vec{v}_{\pi 1} \times \vec{v}_{\pi 2}$, siendo $\vec{v}_{\pi 1} = (2,\ -1,\ 3)$ y $\vec{v}_{\pi 2} = (1,\ 1,\ -2)$

El producto vectorial es:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_{\pi 1} \times \vec{v}_{\pi 2} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1,\ 7,\ 3)$$

La ecuación de la recta en forma continua será: $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{7} = \frac{z+1}{3}$

Y en forma paramétrica: $r \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 7t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$

Si corta al plano $x = 0 \Rightarrow 2 - t = 0 \Rightarrow t = 2$.
Para ese valor de $t = 2$ se obtiene el punto $Q = (0, 17, 5)$.

__**20**. País Vasco, junio 14__

Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = -1 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{cases}$ y el plano $2x - y + Az = 0$.
a) calcular el valor de A para que la recta y el plano sean paralelos.
b) Obtener un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

__Solución__:
La recta será paralela al plano cuando el sistema determinado por los tres planos sea incompatible. Para ello, el rango de la matriz de los coeficientes debe ser 2, mientras que el de la matriz ampliada será 3.
El sistema que se forma es:

$$\begin{cases} 4x - 3y + 4z = -1 \\ 3x - 2y + x = -3 \\ 2x - y + Az = 0 \end{cases} \Rightarrow M_C = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & A & 0 \end{array}\right) = M_A$$

$$|M_C| = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & A \end{vmatrix} = A + 2 = 0 \Rightarrow A = -2$$

Para $A = -2$, el rango de la matriz de coeficientes es 2; y las matrices quedan así:

$$M_C = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) = M_A$$

Como el menor $|M_1| = \begin{vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 18 + 12 - 5 \neq 0 \Rightarrow$ El rango de la matriz ampliada, M_A, es 3.
Por tanto, para $A = -2$, el sistema es incompatible y la recta paralela al plano.

b) El vector normal del plano debe ser el de dirección de la recta, que viene dado por el producto vectorial de los planos que la determinan. Esto es, $\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (5,\ 8,\ 1)$.

Por tanto, el plano pedido es: $\pi \equiv 5x + 8y + z = 0$, que evidentemente pasa por el origen.

21. <u>País Vasco, junio 14</u>

Calcular las coordenadas de un punto de la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{2}$ que equidiste de los planos $\pi_1 \equiv 3x+4y-1=0$ y $\pi_2 \equiv 4x-3y+9=0$. (10 puntos)

<u>Solución</u>:

Ecuaciones paramétricas de la recta: $r \equiv \begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1+3t \\ z = 2+2t \end{cases}$.

Un punto genérico de la recta es: $X = (2+2t, -1+3t, 2+2t)$.

Se desea encontrar los puntos X tales que $d(X, \pi_1) = d(X, \pi_2) \Rightarrow$

$$d(X, \pi_1) = \frac{3(2+2t)+4(-1+3t)-1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{4(2+2t)-3(-1+3t)+9}{\pm\sqrt{3^2+(-4)^2}} = d(X, \pi_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{18t+1}{5} = \frac{-t+20}{\pm 5} \Rightarrow 18t+1 = \pm(-t+20)$$

Para el signo +: $18t+1 = -t+20 \Rightarrow t = 1$. Se obtiene el punto

$$X_1 = (2+2, -1+3, 2+2) = (4, 2, 4).$$

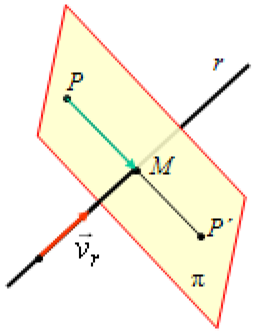
Para el signo –: $18t+1 = t-20 \Rightarrow t = -\dfrac{21}{17}$. Se obtiene el punto

$$X_2 = \left(2-\frac{42}{17}, -1-\frac{63}{17}, 2-\frac{42}{17}\right) = \left(-\frac{8}{17}, -\frac{80}{17}, -\frac{8}{17}\right).$$

22. País Vasco, junio 14

Dado el punto $P(2, -1, 3)$ y la recta $r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+7}{5} = \frac{z-2}{2}$

a) Calcular la proyección del punto P sobre la recta r.
b) Calcular la distancio de P a r.
c) Obtener el simétrico del punto P respecto de la recta r.



Solución:
a) El punto M, proyección de P sobre r es el corte de r con el plano π, que contiene a P y es perpendicular a r.
El plano π tiene como vector normal al de dirección de la recta r.

Como $r: \begin{cases} x = 3t \\ y = -7+5t \\ z = 2+2t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (3, 5, 2)$.

El plano π será: $\pi \equiv 3(x-2)+5(y+1)+2(z-3)=0 \Rightarrow$

Punto M, intersección de π con r:

$$3 \cdot 3t + 5 \cdot (-7+5t) + 2 \cdot (2+2t) - 7 = 0 \Rightarrow 38t - 38 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Luego, $M = (3, -2, 4)$.

b) La distancia de P a la recta es igual a la distancia entre P y M.

$$d(P,r) = d(P,M) = \sqrt{(3-2)^2 + (-2+1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{3}.$$

c) El punto M es el punto medio entre P y su simétrico $P´$.
Suponiendo que el simétrico es $P' = (x_0, y_0, z_0)$, el punto medio de P y $P´$ es:

$$M = \left(\frac{2+x_0}{2}, \frac{-1+y_0}{2}, \frac{3+z_0}{2} \right) = (3, -2, 4) \Rightarrow$$

$$\frac{2+x_0}{2} = 3 \Rightarrow x_0 = 4; \quad \frac{-1+y_0}{2} = -2 \Rightarrow y_0 = -3; \quad \frac{1+z_0}{2} = 4 \Rightarrow z_0 = 5$$

Por tanto, el punto simétrico de P respecto de r es $P´ = (4, -3, 5)$.