ALGUNOS PROBLEMAS DE ANÁLISIS PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE SELECTIVIDAD EN 2014

(Observación: La selección se ha hecho dando prioridad a las cuestiones más teóricas)

1. Andalucía, junio 2014

Sean $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ y $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ las funciones definidas respectivamente por $f(x) = \dfrac{|x|}{2}$ y $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

a) [1 puntos] Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

a) [1,5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

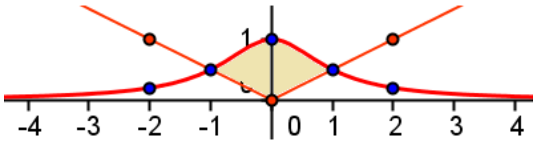
Solución:

a) Ambas funciones son positivas (no negativas) en todo su dominio. Dando algunos valores se pueden trazar fácilmente.

Para $f(x) = \dfrac{|x|}{2}$: (–2, 1); (0, 0); (2, 1).

Para $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$:

(–2, 1/5); (–1, 1/2); (–0,5, 0,8); (0, 1).



Además puede observarse que la recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Los puntos de corte de ambas gráficas son la solución de la ecuación $\dfrac{|x|}{2} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Como ambas son funciones pares basta con determinar la solución positiva:

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow x + x^3 = 2 \Rightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x-1)\left(x^2 + x + 2\right) = 0$$

Sólo existe la solución $x = 1$; y su opuesta, $x = -1$. Los puntos de corte de las gráficas son (–1, 1/2) y (1, 1/2).

b) Por la simetría del recinto, el área pedida es:

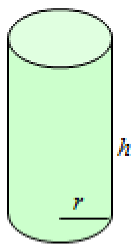
$$S = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{2}\right) dx = 2\left(\arctan x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi - 1}{2} \text{ u}^2.$$

2. Andalucía, junio 2014

Se desea construir un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de 125 m^3. Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima.

Solución:

Si el radio de la base del cilindro es r y su altura h, se debe cumplir que $V = \pi r^2 h = 125$ m^3, con la condición de que la suma de la superficie de la base más la lateral $S = \pi r^2 + 2\pi r h$ sea mínima.



Despejando en $V = \pi r^2 h = 125 \Rightarrow h = \dfrac{125}{\pi r^2}$ y sustituyendo en S, se tiene:

$$S = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{125}{\pi r^2} \Rightarrow S = \pi r^2 + \frac{250}{r}.$$

El mínimo de S se da en las soluciones de $S´ = 0$ que hacen positiva a $S´´$.

Derivando con respecto a r e igualando a 0:

$$S' = 2\pi r - \frac{250}{r^2} = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 - 250 = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{125}{\pi}} = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ m.}$$

Como $S'' = 2\pi + \dfrac{500}{r^3}$ es positiva para el valor de r hallado, se deduce que ese es el valor del radio del cilindro buscado.

En ese caso, $h = \dfrac{125}{\pi \cdot \dfrac{25}{\sqrt[3]{\pi^2}}} = \dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$ m.

<u>**3**. Aragón, junio 14</u>

a) Usando el cambio de variable $t = \ln(x)$, determine el valor de la integral:

$$\int \frac{1 + 3\ln(x) + (\ln(x))^3}{x\left(1 - (\ln(x))^2\right)} dx$$

b) Determine el límite: $\lim_{x\to 0} (\cos(x))^{\left(\frac{1}{\sin(x)}\right)^2}$.

<u>Solución</u>:

a) Si $t = \ln(x) \Rightarrow dt = \dfrac{1}{x} dx$; luego:

$$\int \frac{1 + 3\ln(x) + (\ln(x))^3}{x\left(1 - (\ln(x))^2\right)} dx = \int \frac{1 + 3\ln(x) + (\ln(x))^3}{\left(1 - (\ln(x))^2\right)} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \frac{1 + 3t + t^3}{1 - t^2} dt$$

La última integral se hace por descomposición en fracciones simples. Dividiendo:

$$\frac{1 + 3t + t^3}{1 - t^2} = -t + \frac{4t + 1}{1 - t^2} \to \frac{4t + 1}{1 - t^2} = \frac{A}{1 - t} + \frac{b}{1 + t} = \frac{A(1 + t) + B(1 - t)}{1 - t^2} \Rightarrow A = \frac{5}{2};\ B = -\frac{3}{2}.$$

Por tanto:

$$\int \frac{1 + 3t + t^3}{1 - t^2} dt = \int \left(-t + \frac{5/2}{1 - t} - \frac{3/2}{1 + t}\right) dt = -\frac{t^2}{2} - \frac{5}{2}\ln(1 - t) - \frac{3}{2}\ln(1 + t) + c$$

Deshaciendo el cambio:

$$\int \frac{1 + 3\ln(x) + (\ln(x))^3}{x\left(1 - (\ln(x))^2\right)} dx = -\frac{(\ln x)^2}{2} - \frac{5}{2}\ln(1 - \ln x) - \frac{3}{2}\ln(1 + \ln x) + c.$$

b) $\lim_{x\to 0} (\cos(x))^{\left(\frac{1}{\sin(x)}\right)^2}$ es una indeterminación del tipo 1^∞.

Aplicando logaritmos:

$$\ln\left(\lim_{x\to 0} (\cos(x))^{\left(\frac{1}{\sin(x)}\right)^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\ln\left((\cos(x))^{\left(\frac{1}{\sin(x)}\right)^2}\right)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}\right)^2 \cdot \ln(\cos(x)) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] \to \text{(Aplicando L´Hôpital)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2\sin x \cdot \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{2\cos^2 x} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto;

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos(x)\right)^{\left(\frac{1}{\sin(x)}\right)^2} = e^{-1/2}$$

4. <u>Aragón, septiembre 14</u>

Considere la función: $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-6}$

a) Determine el dominio y las asíntotas, si existen, de esa función.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen, de esa función.

<u>Solución</u>:

a) Dominio: Dom(*f*) = **R** – {3}.

En *x* = 3 la función tiene una asíntota vertical, pues $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2}{2x-6}=\left[\dfrac{9}{0}\right]=\infty$.

También tiene una asíntota oblicua, pues es una función racional que cumple que el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador.

La recta $y = mx + n$ es asíntota oblicua de la curva $f(x)$ cuando se cumple que:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(2x-6)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2-6x}=\frac{1}{2}.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-6}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x^2+3x}{2x-6}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{2x-6}\right)=\frac{3}{2}.$$

La asíntota oblicua es la recta $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$.

b) Derivando:

$$f'(x)=\frac{2x(2x-6)-x^2\cdot 2}{(2x-6)^2}=\frac{2x^2-12x}{(2x-6)^2}=\frac{2x(x-6)}{(2x-6)^2}$$

La derivada se anula en *x* = 0 y en *x* = 6. Con esto:

Si *x* < 0, como $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.

Si 0 < *x* < 3, como $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

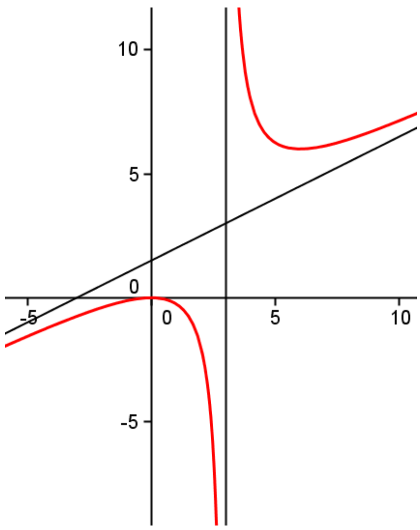
Si 3 < *x* < 6, como $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

Si *x* > 6, como $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.

Como la función crece a la izquierda del 0 y decrece a su derecha, en *x* = 0 se da un máximo.

De manera análoga se deduce que en *x* = 6 se da un mínimo.

La gráfica de la función es la representada a la derecha.



<u>5. Aragón, septiembre 14</u>

a) La derivada de una función $f(x)$ es: $(x-1)^3(x-3)$

Determine la función $f(x)$ sabiendo que $f(0)=1$.

b) Determine el límite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+2x+2}{x^3+1}\right)^{3x^2+x+1}$

<u>Solución</u>:

a) La función pedida debe ser una primitiva de $(x-1)^3(x-3)$; esto es:

$$f(x)=\int (x-1)^3(x-3)dx$$

Operando:

$$(x-1)^3(x-3) = (x^3-3x^2+3x-1)\cdot(x-3)=x^4-6x^3+12x^2-10x+3$$

Luego:

$$f(x)=\int\left(x^4-6x^3+12x^2-10x+3\right)dx=\frac{1}{5}x^5-\frac{6}{4}x^4+4x^3-5x^2+3x+c$$

Como $f(0)=1 \Rightarrow c=1$; y, por tanto: $f(x)=\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{3}{2}x^4+4x^3-5x^2+3x+1$.

b) Para calcular este límite puede aplicarse la regla:

$$\underset{x\to\infty}{lím}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\left[1^\infty\right]=e^{\left(\underset{x\to\infty}{lím}(f(x)-1)\cdot g(x)\right)}$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2x+2}{x^3+1}\right)^{3x^2+x+1}=\left[1^\infty\right]=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2x+2}{x^3+1}-1\right)\cdot\left(3x^2+x+1\right)}$$

El límite del exponente es:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2x+2}{x^3+1}-1\right)\cdot\left(3x^2+x+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x^3+1}\right)\cdot\left(3x^2+x+1\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6x^3+5x^2+3x+1}{x^3+1}\right)=6.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+2x+2}{x^3+1}\right)^{3x^2+x+1}=e^6$.

6. Baleares, junio 14

Calcula la siguiente integral indefinida: $\int \frac{x^3}{x^2+1}dx$.

Solución:

Descomponiendo el integrando (dividiendo):

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x^3+x-x}{x^2+1} = \frac{x\left(x^2+1\right)-x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}dx = \int\left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + c.$$

7. Baleares, junio 14

a) Calcula el valor de a para que la función $f(x) = \begin{cases} 1-\cos x & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + ax & \text{si } x > 0 \end{cases}$ verifique el teorema de Rolle en el intervalo [–π/2, 1].

b) Considerando el valor de a determinado en el apartado a), encuentra el valor $c \in \left(-\frac{\pi}{2},\ 1\right)$ tal que $f'(c) = 0$.

Solución:

a) El teorema de Rolle dice:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), y además $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Por tanto, la función dada debe ser continua en el intervalo [–π/2, 1], derivable en (–π/2, 1) y verificar que $f(-\pi/2) = f(1)$.

Empezando por lo último:

$$f(-\pi/2) = f(1) \Rightarrow 1 - \cos\frac{\pi}{2} = 1 + a \Rightarrow a = 0.$$

La función queda:

$$f(x) = \begin{cases} 1-\cos x & \text{si } x \le 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \le 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Es continua, pues:

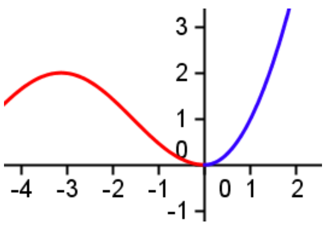
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(1-\cos x\right) = 1-1 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$$

Es derivable, pues:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \sin x = 0 \ \text{ y } \ \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0.$$

b) El valor de c buscado es $c = 0$, pues es el que cumple que $f'(c) = 0$.

→ Aunque no se pide, la situación gráfica es la que se indica en la figura adjunta.



8. Canarias, junio 2014

La fabricación de x tabletas gráficas supone un coste total dado por la función $C(x)=1500x+1000000$. Cada tableta se venderá a un precio unitario dado por la función $P(x)=4000-x$. Suponiendo que todas las tabletas fabricadas se venden, ¿cuál es el número que hay que producir para obtener el beneficio máximo?

Solución:

Costes: $C(x)=1500x+1000000$.

Precio por unidad: $P(x)=4000-x$.

Ingresos por la venta de x unidades: $I(x)=P(x)\cdot x=(4000-x)\cdot x=4000x-x^2$.

Beneficios: $B(x)=I(x)-C(x)=4000x-x^2-1500x-1000000 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(x)=-x^2+2500x-1000000$

El máximo de B se da en la solución de $B´=0$ que hace negativa a $B´´$.

$B´(x)=-2x+2500 \Rightarrow -2x+2500=0$ si $x=1250$.

Como $B´´(x)=-2$, para ese valor de $x = 1250$ se da el máximo buscado.

El beneficio máximo se obtiene cuando se producen y venden 1250 tabletas gráficas.

9. Canarias, junio 2014

a) Calcula: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$. b) Calcula: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$.

c) Calcula el valor de m de tal forma que: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-mx)(2x+3)}{x^2+4}=6$.

Solución:

a) Se aplica L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L´H)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{2}=\frac{1}{2}.$$

b) Se multiplica y divide por la expresión conjugada del numerador:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}{x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}=\left[\frac{0}{2}\right]=0$$

c) Se opera y se aplica L´Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1-mx)(2x+3)}{x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2mx^2+(2-3m)x+3}{x^2+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L´H)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4mx+2-3m}{2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-4m}{2}=-2m$$

Como se desea que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-mx)(2x+3)}{x^2+4}=6 \Rightarrow -2m=6 \Rightarrow m=-3$.

<u>**10**. Canarias, julio 2014</u>

Sea la función $f(x)=e^{x^2+ax+b}$.

a) Calcula a y b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo el punto (1, 1). (1,5 puntos)

b) Calcula los extremos de la función $f(x)$ cuando a = 0 y b = 0. (1 punto)

<u>Solución</u>:

a) El punto (1, 1) debe ser de la gráfica de la función ($f(1)=1$) y cumplir que $f´(1)=0$.

- $f(1)=1 \Rightarrow e^{1+a+b}=1 \Rightarrow 1+a+b=0 \Rightarrow a+b=-1$
- $f´(1)=0 \Rightarrow [\ f´(x)=(2x+a)e^{x^2+ax+b}\ ] \rightarrow (2+a)\cdot 1=0 \Rightarrow a=-2 \Rightarrow b=1$.

b) Para a = 0 y b = 0, la función queda: $f(x)=e^{x^2}$.

Sus dos primeras derivadas son:

$$f´(x)=2xe^{x^2} \Rightarrow f´´(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}=\left(2+4x^2\right)e^{x^2}$$

La derivada primera se anula en x = 0, que será punto máximo o mínimo.

Como $f´´(0)=2e^0=2>0$, en x = 0 se tiene un mínimo relativo: punto (0, 1).

<u>**11**. Cantabria, junio 14</u>

a) Halla tres números no negativos que sumen 14, tales que uno sea el doble de otro y que la suma de los cuadrados de los tres sea mínima.

b) Considera la función f: **R** $\rightarrow$ **R** definida por $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$. Justifica si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas.

b1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$.

b2) La función f tiene un máximo relativo en x = 1.

<u>Solución</u>:

a) Los números pueden ser x, y, z; cumpliendo: $x+y+z=14$ e $y=2x$.

En consecuencia: $x+2x+z=14 \Rightarrow z=14-3x$.

La suma de sus cuadrados $x^2+y^2+z^2=x^2+(2x)^2+(14-3x)^2=14x^2-84x+196$.

El mínimo de la función $f(x)=14x^2-84x+196$, que es una parábola, se da en la solución de $f´(x)=0$; esto es, $f´(x)=28x-84=0 \Rightarrow x=3$.

$\rightarrow$ Como $f´´(x)=28>0$, se confirma que en x = 3 se tiene el mínimo buscado.

Por tanto, los números son 3, 6 y 5.

b1) Si $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$, la afirmación $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ es falsa, pues:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L´H)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

b2) Derivando $f(x)=\dfrac{x}{e^x} \Rightarrow f´(x)=\dfrac{e^x-xe^x}{\left(e^x\right)^2}=\dfrac{e^x(1-x)}{e^{2x}}=\dfrac{1-x}{e^x}$.

La derivada se anula en x = 1.

Como $f''(x) = \frac{-e^x - (1-x)e^x}{\left(e^x\right)^2} = \frac{e^x\left(x-2\right)}{e^{2x}} = \frac{x-2}{e^x} \Rightarrow f''(1) < 0$; luego en $x = 1$ la función tiene un máximo relativo.

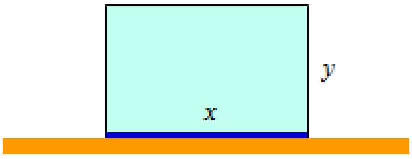
<u>**12**. Cantabria, septiembre 14</u>

a) Se quiere vallar una finca rectangular que está junto a un camino. La valla del lado del camino cuesta 125 euros el metro, y la de los otros tres lados cuesta 25 euros el metro. Hallar el área del terreno de mayor superficie que podemos vallar con 3000 euros.

b) Halla las tangentes a la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ que son paralelas a la recta $2x + y = 0$.

<u>Solución:</u>

La situación de la finca es como la que se muestra en la figura adjunta.



Si las medidas de los lados son x e y, se sabe que

$$125x + 2\cdot 25y + 25x = 3000 \Rightarrow 150x + 50y = 3000$$

O lo que es lo mismo:

$$3x + y = 60 \Rightarrow y = 60 - 3x$$

Se desea que la superficie, $S = xy$, del terreno sea máxima.

Sustituyendo:

$$S = x\cdot\left(60 - 3x\right) = 60x - 3x^2$$

Derivando: $S' = 60 - 6x$, que se anula cuando $x = 10$.

Como $S'' = -6 < 0$, se deduce que la solución hallada es máxima.

Por tanto, las dimensiones de la finca deben ser de 10 m por 30 m. El lado del camino debe ser el de 10 metros.

b) Como $2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x$, hay que buscar los puntos en los que la derivada valga –2.

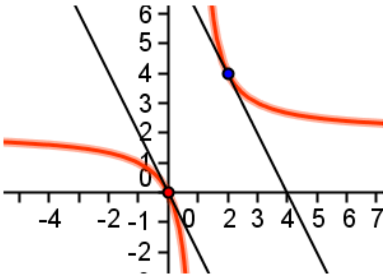
Por tanto, $f'(x) = \frac{2(x-1) - 2x}{\left(x-1\right)^2} = -2 \Rightarrow 1 = \left(x-1\right)^2 \Rightarrow x = 0; x = 2$.

Las tangentes $\left[y - f(a) = f'(a)\left(x-a\right)\right]$ serán:

$y = -2x$, que es la recta dada.

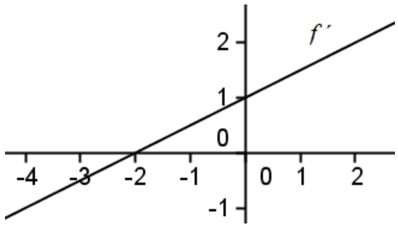
$y - 4 = -2\left(x-2\right) \Rightarrow y = -2x + 8$

La situación, aunque no se pide, es la que se indica en la figura adjunta.



13. Cantabria, septiembre 14

La gráfica adjunta corresponde a la función derivada $f\,'$ de una función f. Estudia el crecimiento y decrecimiento de f y di si tiene un máximo o un mínimo.



Solución:

El signo de la derivada indica si crece o decrece.

Como para $x < -2$, la derivada es negativa $\Rightarrow$ la función decrece.

Como para $x > -2$, da derivada es positiva $\Rightarrow$ la función crece.

En consecuencia, en $x = -2$ la función tiene un mínimo.

14. Castilla–León, junio 2014

Hallar la función polinómica de grado 3 sabiendo que su gráfica pasa por el punto $P(1, 0)$, que tiene por tangente en el punto de abscisa $x = 0$ la recta de ecuación $y = 2x + 1$, y que su integral entre 0 y 1 vale 3.

Solución:

Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f\,'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Por pasar por (1, 0), $f(1) = 0 \Rightarrow 0 = a + b + c + d$

También pasa por el punto (0, 1), que es el de tangencia $\Rightarrow$ $f(0) = 1 \to 1 = d$

La derivada en $x = 0$ vale 2, por ser la pendiente de la recta tangente: $f\,'(0) = 2 \Rightarrow 2 = c$.

Se obtiene que:

$c = 2$, $d = 1$ y $0 = a + b + 2 + 1 \Rightarrow b = -3 - a$

Por tanto, la función es $f(x) = ax^3 + (-3-a)x^2 + 2x + 1$

Como $\int_0^1 f(x)dx = 3 \Rightarrow \int_0^1 \left(ax^3 + (-3-a)x^2 + 2x + 1\right)dx = 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{4}x^4 + \frac{-3-a}{3}x^3 + x^2 + x\right)\Bigg|_0^1 = 3 \Rightarrow a = -24.$$

Luego, la función pedida es $f(x) = -24x^3 + 21x^2 + 2x + 1$.

15. Castilla–León, junio 2014

Sea la función $f(x) = e^{-x^2}$. Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas. Esbozar su gráfica.

Solución:

La función y sus dos primeras derivadas son:

$$f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow f\,'(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow f\,''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = \left(-2 + 4x^2\right)e^{-x^2}$$

La derivada primera se anula en $x = 0$, cumpliéndose que:

- Si $x < 0$, $f\,'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $x > 0$, $f\,'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente. En consecuencia, en $x = 0$ se da un máximo.

La derivada segunda se anula en $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, cumpliéndose que:

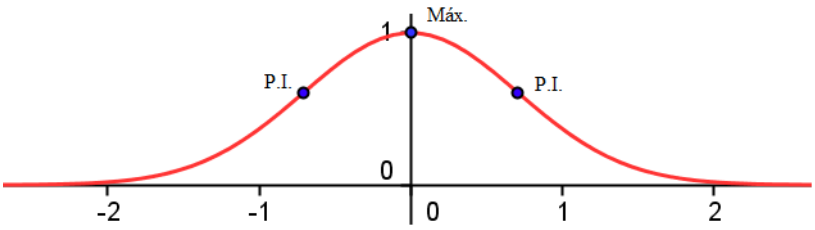
- Si $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa (∪).
- Si $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava (∩).
- Si $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa (∪).

Como consecuencia de lo anterior, en $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ hay puntos de inflexión.

La función tiene una asíntota horizontal, la recta $y = 0$, pues, $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$ (tanto hacia –∞ como hacia +∞).

Nota: Podría indicarse que la función es par y, por tanto, simétrica respecto del eje *OY*.

Para dibujar su gráfica pueden darse algunos valores:



16. Castilla León, junio 2014

Sea la función $f(x) = +2\sqrt{x}$.

a) Hallar su dominio y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(0,5 puntos)**

b) Calcular el punto de la gráfica de $f(x)$ más cercano al punto (4, 0). **(2 puntos)**

Solución:

a) Dominio: $\mathbf{R}^+$.

La función es siempre creciente, pues la raíz cuadrada es mayor cuando aumenta el número.

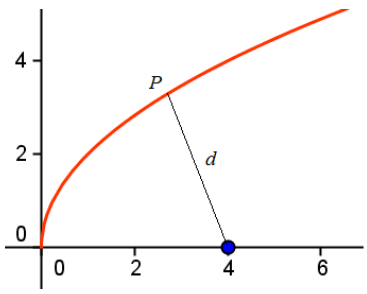
Esto puede comprobarse haciendo la derivada: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, que siempre es positiva.

b) Los puntos genéricos de la gráfica de la función son $P = \left(x,\ 2\sqrt{x}\right)$.

La expresión de la distancia entre *P* y (4, 0) es $d = \sqrt{(x-4)^2 + \left(2\sqrt{x}\right)^2}$.

La distancia será mínima cuando lo sea su cuadrado $D = (x-4)^2 + \left(2\sqrt{x}\right)^2 = x^2 - 4x + 16$, que, a su vez, será mínima en la solución de $D' = 0$ que hagan positiva a D''.

Como $D' = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $D'' = 2 > 0$, el mínimo buscado se da para ese valor de *x*; siendo el punto $P = \left(2,\ 2\sqrt{2}\right)$.



Observación: He preferido hacer el cuadrado de la distancia para evitar la derivada de la raíz, pues resulta más engorrosa.

17. Castilla León, junio 2014

Sea la función $f(x)=\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$.

a) Calcular un punto de su gráfica tal que la recta tangente en dicho punto sea paralela al eje *OX*. Escribe la ecuación de la recta tangente.
b) Calcular el área limitada por la gráfica de la función, el eje *OX* y las rectas $x=0$ y $x=\ln 5$.
Solución:
a) La recta tangente es paralela al eje *OX* cuando su pendiente valga 0. Por tanto, será el punto en el que $f'(x)=0$.

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot\left(1+e^x\right)^2-2e^x\cdot\left(1+e^x\right)\cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^4}=\frac{e^x\cdot\left(1-e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^3}\Rightarrow 1-e^x=0\Rightarrow x=0.$$

La ecuación de la tangente es $y-f(0)=f'(0)\cdot x\ \rightarrow\ f(0)=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}\ \Rightarrow\ y-\dfrac{1}{4}=0$.

b) Como la función siempre toma valores positivos, el área pedida viene dada por la integral definida,

$$\int_0^{\ln 5}\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx.$$

Una primitiva de esa función puede obtenerse haciendo el cambio $e^x=t\ \rightarrow\ e^x dx=dt$.
Por tanto:

$$\int\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx=\int\frac{1}{(1+t)^2}dt=\int(1+t)^{-2}dt=-(1+t)^{-1}=\frac{-1}{1+t}=\frac{-1}{1+e^x}.$$

Luego,

$$\int_0^{\ln 5}\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx=\left(-\frac{1}{1+e^x}\right)\Bigg|_0^{\ln 5}=\left(-\frac{1}{1+e^{\ln 5}}\right)-\left(-\frac{1}{1+e^0}\right)=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\ \text{u}^2.$$

18. Castilla León, septiembre 2014.

Sea la función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y asíntotas. Esbozar su gráfica.

Solución:

Derivando dos veces se tiene:

$$f(x) = x^2 e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = \left(2x - x^2\right)e^{-x}$$

$$f''(x) = (2 - 2x)e^{-x} - \left(2x - x^2\right)e^{-x} = \left(2 - 4x + x^2\right)e^{-x}$$

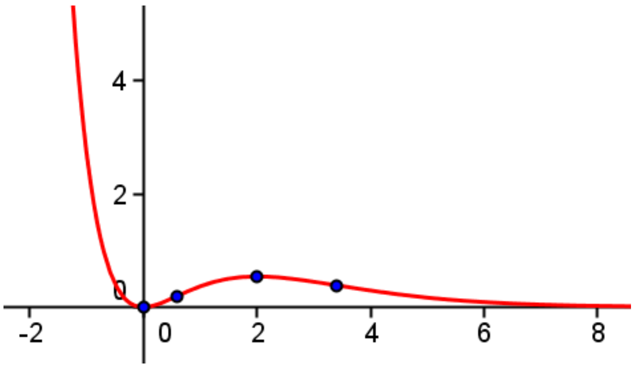
La derivada primera se anula en $x = 0$ y $x = 2$, además:

- Si $x < 0$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- Si $0 < x < 2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $x > 2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

La derivada segunda se anula cuando $\left(2 - 4x + x^2\right) = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$.

- Si $x < 2 - \sqrt{2}$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa (∪).
- Si $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava (∩).
- Si $x > 2 + \sqrt{2}$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa (∪).
- Para $x = 2 \pm \sqrt{2}$ se dan sendos puntos de inflexión.

Su gráfica es la siguiente.



19. Castilla León, septiembre 2014.

a) Hallar el punto en el que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^2-x+4$ es paralela a la recta de ecuación $y=5x-7$.

b) Calcular el área delimitada por la parábola de ecuación $y=2x^2$ y la recta $y=2x+4$.

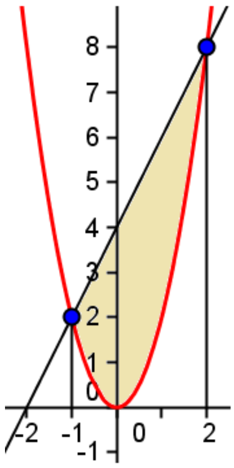
Solución:

a) La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada en el punto de tangencia.
Como se desea que la recta tangente sea paralela a la de ecuación $y=5x-7 \Rightarrow$ la pendiente debe valer 5.

Por tanto: $f'(x)=2x-1=5 \Rightarrow x=3$.

Para x = 3, $f(3)=9-3+4=10$. El punto de tangencia es (3, 10).

Luego, la ecuación de dicha recta tangente es $y=5x-5$



b) La recta corta a la parábola en las soluciones de $\begin{cases} y=2x^2 \\ y=2x+4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2=2x+4 \Rightarrow 2x^2-2x-4=0 \Rightarrow x=-1; x=2$.

El recinto limitado por ambas gráficas ees el coloreado en la figura adjunta.

Su área viene dada por la integral:

$$S=\int_{-1}^{2}\left(2x+4-2x^2\right)dx=\left(x^2+4x-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{2}=$$

$$=4+8-\frac{16}{3}-\left(1-4+\frac{2}{3}\right)=9 \text{ u}^2.$$

20. Castila la Mancha, junio 14

Para cada $c \geq 2$ definimos $A(c)$ como el área de la región encerrada entre la gráfica de $f(x)=\dfrac{1+x^2}{x^4}$ > 2, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=c$.

a) Calcula $A(c)$.

b) Calcula $\lim\limits_{c\to\infty} A(c)$.

Solución:

a) Como la función es positiva en todo **R**, el área $A(c)$ pedida viene dada por:

$$A(c)=\int_1^c \frac{1+x^2}{x^4}dx=\int_1^c\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(-\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^c=\frac{4}{3}-\frac{1+3c^2}{3c^3}$$

b) $\lim\limits_{c\to\infty} A(c)=\lim\limits_{c\to\infty}\left(\frac{4}{3}-\frac{1+3c^2}{3c^3}\right)=\frac{4}{3}$.

21. Comunidad Valenciana, junio 2014

Se tiene un cuadrado de mármol de lado 80 cm. Se produce la rotura de una esquina y queda un pentágono de vértices A = (0, 20), B = (20, 0), C = (80, 0), D = (80, 80) y E = (0, 80). Para obtener una pieza rectangular se elige un punto P □□ (x, y) del segmento AB y se hacen dos cortes paralelos a los ejes X e Y. Así se obtiene un rectángulo R cuyos vértices son los puntos P = (x, y), F = (80, y), D = (80, 80) y G = (x, 80) .

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

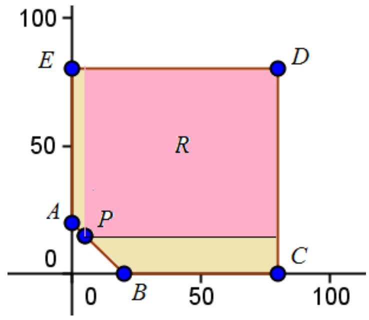
a) El área del rectángulo R en función de x, cuando $0 \le x \le 20$.

b) El valor de x para el que el área del rectángulo R es máxima.

c) El valor del área máxima del rectángulo R.

Solución:

La situación es la que se muestra en la figura adjunta.



a) Recta A–B: $y = 20 - x \Rightarrow P = (x, y) = (x, 20 - x)$.

Base del rectángulo: $80 - x$.

Altura del rectángulo: $80 - (20 - x) = 60 + x$.

Área: $S = (80 - x)\cdot(60 + x) = 4800 + 20x - x^2$.

b) Si S tiene máximo, se obtiene en la solución de $S' = 0$ que haga a $S'' < 0$.

$$S' = 20 - 2x \to 20 - 2x = 0 \Rightarrow x = 10$$

Como $S'' = -2 < 0$, el máximo de S se obtiene cuando $x = 10$.

c) Para ese valor, el área máxima del rectángulo es: $S = 70 \cdot 70 = 4900$ cm^2

22. Comunidad Valenciana, julio 2014

Un club deportivo alquila un avión de 80 plazas para realizar un viaje a la empresa VR. Hay 60 miembros del club que han reservado su billete. En el contrato de alquiler se indica que el precio de un billete será 800 euros si sólo viajan 60 personas, pero que el precio por billete disminuye en 10 euros por cada viajero adicional a partir de esos 60 viajeros que ya han reservado el billete.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El total que cobra la empresa VR si viajan 61, 70 y 80 pasajeros.

b) El total que cobra la empresa VR si viajan 60 + x pasajeros, siendo $0 \le x \le 20$.

c) El número de pasajeros entre 60 y 80 que maximiza lo que cobra en total la empresa VR.

Solución:

a) Si viajan 61 personas, cada una paga 790 € → Ingresos: 61 · 790 = 48190 €.

Si viajan 70 personas, cada una paga 700 € → Ingresos: 70 · 700 = 49000 €.

Si viajan 80 personas, cada una paga 600 € → Ingresos: 80 · 600 = 48000 €.

b) Si viajan 60 + x personas, cada una paga 800 – 10x € →

→ Ingresos: $I(x) = (60 + x)(800 - 10x) = 48000 + 200x - 10x^2$

c) El máximo de I se obtiene en la solución de $I' = 0$ que hace negativa a I''.

$$I'(x) = 200 - 20x \to 200 - 10x = 0 \Rightarrow x = 10$$

Como $I''(x) = -10 < 0$, el máximo se obtiene para el valor x = 10. Por tanto, cuando viajan 70 personas; en ese caso, sus ingresos son de 49000 €.

23. Extremadura, septiembre 14

a) Enuncie el teorema del valor medio de Lagrange.

b) Aplicando el anterior teorema a la función $f(x)=\sin x$, pruebe que cualesquiera que sean los números reales $a<b$ se cumple la desigualdad $\sin b-\sin a\leq b-a$.

Solución:

a) El teorema del valor medio de Lagrange dice:

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe algún punto $c\in(a, b)$ tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

b) Si $f(x)=\sin x$ y $a<b$, como $f'(x)=\cos x$, se tendrá $\dfrac{\sin b-\sin a}{b-a}=\cos(c)\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin b-\sin a=\cos c\cdot(b-a)$$

Como $\cos c\leq 1\Rightarrow \cos c\cdot(b-a)\leq 1\cdot(b-a)=b-a$.

Por tanto: $\sin b-\sin a=\cos c\cdot(b-a)\leq b-a$.

24. Galicia, junio 14

a) Calcula $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2x-1)}{x^2-\sqrt{x}}$ (Nota: ln = logaritmo neperiano)

b) Calcula $\displaystyle\int_0^1\frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx$

Solución:

a) $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2x-1)}{x^2-\sqrt{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{2}{2x-1}}{2x-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 1}\frac{4\sqrt{x}}{\left(4x\sqrt{x}-1\right)(2x-1)}=\frac{4}{3}.$$

b) Haciendo el cambio de variable $e^x=t$ se tiene: $\displaystyle\int\frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx=\int\frac{1}{t^2+3t+2}dt$

Por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2+3t+2}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}=\frac{A(t+2)+B(t+1)}{(t+1)(t+2)}\Rightarrow 1=A(t+2)+B(t+1)\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}$$

Por tanto,

$$\int\frac{1}{t^2+3t+2}dx=\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\ln(t+1)-\ln(t+2)=\ln\frac{t+1}{t+2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_0^1\frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx=\left[\ln\frac{e^x+1}{e^x+2}\right]_0^1=\ln\frac{e+1}{e+2}-\ln\frac{2}{3}.$$

<u>**25**. Galicia, junio 14</u>

a) Dada la función $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx-1}$ calcula los valores de *a*, *b*, *c* sabiendo que $x=\dfrac{1}{2}$ es una asíntota vertical y que $y=5x-6$ es la recta tangente a su gráfica en el punto correspondiente a *x* = 1. ¿Para los valores de *a*, *b*, *c* calculados, posee $f(x)$ más asíntotas?

b) Enuncia el teorema del valor medio del cálculo diferencial. ¿Puede aplicarse, en el intervalo [0, 1], este teorema a la función $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$? En caso afirmativo calcula el punto al que hace referencia el teorema.

<u>Solución</u>:

Si $x=\dfrac{1}{2}$ es una asíntota vertical $\Rightarrow c\cdot\dfrac{1}{2}-1=0 \Rightarrow c=2$.

La función queda: $f(x)=\dfrac{ax+b}{2x-1}$.

Si $y=5x-6$ es la recta tangente a su gráfica en el punto correspondiente a *x* = 1 $\Rightarrow$

$f'(1)=5$ y $f(1)=y(1)$; $y(1)=-1$

$\to f(1)=\dfrac{a\cdot 1+b}{2\cdot 1-1}=a+b$; $\to f'(x)=\dfrac{a\cdot(2x-1)-2\cdot(ax+b)}{(2x-1)^2} \Rightarrow f'(1)=a-2(a+b)$

Por tanto: $\begin{cases} a+b=-1 \\ a-2(a+b)=5 \end{cases} \Rightarrow a = 3;\ b = -4$

La función buscada es $f(x)=\dfrac{3x-4}{2x-1}$.

Es evidente que también tiene otra asíntota horizontal, la recta $y=\dfrac{3}{2}$, pues $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-4}{2x-1}=\dfrac{3}{2}$.

b) El teorema del valor medio dice: Si $f(x)$ es continua en [*a*, *b*] y derivable en (*a*, *b*), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

$\to$ En el intervalo [0, 1], la función $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$ es continua y derivable (sólo es discontinua en *x* = 2, que no pertenece a ese intervalo).

Como $f(1)=1$, $f(0)=\dfrac{1}{2}$ y $f'(x)=\dfrac{1}{(2-x)^2}$, hay que buscar el valor de *x* que cumple:

$$\frac{1-\frac{1}{2}}{1-0}=\frac{1}{(2-x)^2} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{(2-x)^2} \Rightarrow 2=(2-x)^2 \Rightarrow x^2-4x+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2-\sqrt{2} \\ x=2+\sqrt{2} \end{cases}.$$

La respuesta válida es $x=2-\sqrt{2}$, que es el punto que pertenece al intervalo (0, 1)

26. Galicia, septiembre 14

a) Calcula $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-2x} - 2x}{\sin^2 x}$

b) Queremos dividir un alambre de metal 70 metros de largo en tres partes de manera que una de ellas tenga doble longitud que otra, y que, además, al construir con cada parte un cuadrado, la suma de áreas de los tres cuadrados es mínima. Calcular la longitud de cada parte

Solución:

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-2x} - 2x}{\sin^2 x} = \left[\dfrac{1-1-0}{0} = \dfrac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x\to 0}\dfrac{-\sin x + 2e^{-2x} - 2}{2\sin x\cdot\cos x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$

$=$ (se aplica nuevamente L´Hôpital) $= \lim_{x\to 0}\dfrac{-\cos x - 4e^{-2x}}{2\cos^2 x - 2\sin^2 x} = \dfrac{-1-4}{2} = -\dfrac{5}{2}$.

b) Si la longitud de uno de los trozos es x, los otros dos medirán $2x$ y $70 - 3x$, respectivamente.

Con esas longitudes (perímetros) se construyen cuadrados de lado: $\dfrac{x}{4}$, $\dfrac{x}{2}$ y $\dfrac{70-3x}{4}$.

La suma de las áreas de esos cuadrados es:

$$S = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{70-x}{4}\right)^2 = \frac{14x^2 - 420x + 4900}{16} .$$

Su mínimo se da cuando $S'= 0$ y $S'' > 0$.

$$S' = \frac{28x^2 - 420}{16} = 0 \Rightarrow x = 15 \to \text{Se cumple que } S'' = \frac{28}{16} > 0 .$$

Por tanto, los trozos deben medir 15 cm, 30 cm y 25 cm.

27. Galicia, septiembre 14

a) La segunda derivada de una función $f(x)$ es $f''(x) = 4e^{2x} - 2x$. Además, la tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto (0, 1) es paralela a la recta $x - y + 3 = 0$. Calcula $f(x)$.

b) Calcula $\int_0^{\pi/2} x\sin(2x+\pi)dx$.

Solución:

Si $f''(x) = 4e^{2x} - 2x \Rightarrow f'(x) = \int\left(4e^{2x} - 2x\right)dx = 2e^{2x} - x^2 + c \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = \int\left(2e^{2x} - x^2 + c\right)dx = e^{2x} - \frac{x^3}{3} + cx + d$$

Como pasa por el punto (0, 1) $\Rightarrow f(0) = e^0 + d = 1 \Rightarrow d = 0$.

Como la tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto (0, 1) es paralela a la recta $x - y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = x + 3 \Rightarrow f'(0) = 1$ (la pendiente de la tangente es igual a la derivada en el punto).

Luego, $f'(x) = 2e^{2x} - x^2 + c$ cumple: $f'(0) = 2e^0 + c = 1 \Rightarrow c = -1$.

Por tanto, la función buscada es $f(x) = e^{2x} - \dfrac{x^3}{3} - x$.

b) $\int_0^{\pi/2} x\sin(2x+\pi)dx$.

Una primitiva de $\int x\sin(2x+\pi)dx$ se obtiene por "partes".

Haciendo:

$$x=u \text{ y } \sin(2x+\pi)dx=dv \Rightarrow dx=du \text{ y } v=\int \sin(2x+\pi)dx=-\frac{1}{2}\cos(2x+\pi)$$

Luego,

$$\int x\sin(2x+\pi)dx=-\frac{x\cos(2x+\pi)}{2}+\frac{1}{2}\int \cos(2x+\pi)dx=-\frac{x\cos(2x+\pi)}{2}+\frac{\sin(2x+\pi)}{4}$$

Por tanto:

$$\int_0^{\pi/2} x\sin(2x+\pi)dx=\left[-\frac{x\cos(2x+\pi)}{2}+\frac{\sin(2x+\pi)}{4}\right]_0^{\pi/2}=$$

$$=\left[-\frac{x\cos(2x+\pi)}{2}+\frac{\sin(2x+\pi)}{4}\right]_0^{\pi/2}=-\frac{\pi\cos(2\pi)}{4}+\frac{\sin(2\pi)}{4}-\frac{\sin(\pi)}{4}=-\frac{\pi}{4}$$

<u>**28**. Galicia, septiembre 14</u>

a) Calcula $\int_0^1 \frac{2}{3+3e^x}dx$.

b) Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral. Sea $\int_0^x \frac{2}{3+3e^t}dt$, calcula $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}$.

<u>Solución</u>:

a) Si se hace $e^x=t \Rightarrow e^x dx=dt \Rightarrow dx=\frac{1}{e^x}dt=\frac{1}{t}dt$.

Luego:

$$\int \frac{2}{3+3e^x}dx=\frac{2}{3}\int \frac{1}{t(1+t)}dt.$$

Por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{t(1+t)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1+t}=\frac{A(1+t)+Bt}{t(1+t)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow B=-1.$$

Por tanto:

$$\int \frac{2}{3+3e^x}dx=\frac{2}{3}\int \frac{1}{t(1+t)}dt=\frac{2}{3}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt=\frac{2}{3}(\ln t-\ln(1+t))=\frac{2}{3}\left(x-\ln\left(1+e^x\right)\right)$$

Luego:

$$\int_0^1 \frac{2}{3+3e^x}dx=\frac{2}{3}\left(x-\ln\left(1+e^x\right)\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}(1-\ln(1+e)+\ln 2)$$

b) El teorema fundamental del cálculo integral dice:

Si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces $F'(x) = f(x)$.

Con más precisión: Sea *f*(*x*) una función integrable en [*a*, *b*] y $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ su función integral, entonces, si *f* es continua en [*a*, *b*] se deduce que *F* es derivable en [*a*, *b*] y su derivada es $F'(x) = f(x)$.

En este caso, como $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$, aplicando L´Hôpital se tendrá:

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3+3e^x} = \frac{2}{3+3} = \frac{1}{3}$$

29. <u>La Rioja, junio 2014</u>

Sea $h(x) = x^4 - 2x^3 - 1$.

i) Enuncia el teorema de Bolzano.

ii) Determina los extremos relativos y estudia la monotonía de *h*.

iii) Utiliza el teorema de Bolzano para probar que la ecuación $h(x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones reales.

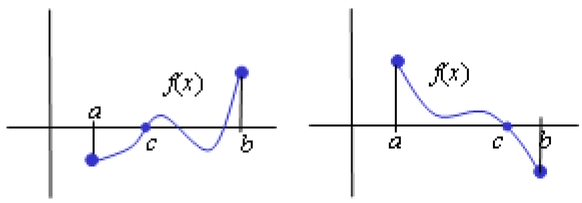
<u>Solución</u>:

i) El Teorema de Bolzano dice:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado [*a*, *b*] y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Esto es, si la función es negativa en *a* ($f(a) < 0$) y positiva en *b* ($f(b) > 0$), entonces se anula en algún punto *c* entre *a* y *b* ($f(c) = 0$).

Geométricamente, esto significa que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ corta al eje *OX* en un punto, al menos. (Análogamente si $f(a) > 0$ y *f*(*b*) <0).



Desde el punto de vista algebraico, este teorema asegura que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución entre *a* y *b*. Esa solución será el punto *c* cuya existencia afirma el teorema.

ii) $h(x) = x^4 - 2x^3 - 1 \Rightarrow h'(x) = 4x^3 - 6x^2 \Rightarrow h''(x) = 12x^2 - 12x$

La derivada primera se anula cuando: $4x^3 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2(2x-3) = 0 \Rightarrow x = 0$; $x = \frac{3}{2}$.

Como $h''(0) = 0$, en *x* = 0 no se concluye lo que hay; puede haber punto de inflexión. En efecto, al ser $h'''(x) = 24x - 12$ y $h'''(0) \neq 0$, en *x* = 0 se da una inflexión con tangente horizontal

En $x = \frac{3}{2}$ se da un mínimo, pues $h''\left(\frac{3}{2}\right) = 12\cdot\frac{9}{4} - 18 = 9 > 0$.

Eso mismo se podría haber concluido estudiando la monotonía, pues;

- Si $x < 0$, $h'(x) < 0 \Rightarrow h$ es decreciente.
- Si $0 < x < 3/2$, $h'(x) < 0 \Rightarrow h$ es decreciente. Se concluye que en $x = 0$ se da un P.I.
- Si $x > 3/2$, $h'(x) > 0 \Rightarrow h$ es creciente. En consecuencia, en $x = 3/2$ se da un mínimo.

iii) En $x = -1$, $h(-1) = (-1)^4 - 2\cdot(-1)^3 - 1 = 2 > 0$.

En $x = \frac{3}{2}$, $h(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 1 = -\frac{43}{16} < 0$.

Por tanto, la función corta exactamente una vez al eje OX en el intervalo $(-\infty, 3/2)$, pues siempre es decreciente.

Como $h(3) = 3^4 - 2\cdot 3^3 - 1 = 26 > 0$, la función vuelve a cortar exactamente una vez al eje OX en el intervalo $(3/2, +\infty)$, pues siempre es creciente en ese intervalo.

Por tanto, la función corta exactamente dos veces al eje $OX \Leftrightarrow$ la ecuación $h(x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones reales.

30. La Rioja, junio 2014

Sea $f(x) = \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$.

i) Calcula, si existe, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

ii) Halla $\int f(x)dx$.

Solución:

i) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{-1}{-\left(1/2\sqrt{x}\right)} = 2$.

ii) $\int f(x)dx = \int \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}dx = \int \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{1-\sqrt{x}}dx = \int \left(1+\sqrt{x}\right)dx =$

$= \int \left(1+x^{1/2}\right)dx = x + \frac{x^{3/2}}{3/2} + c = x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$.

Nota: Si el lector no advierte la "suma por diferencia" en el numerador del integrando puede hacer el cambio de variable $\sqrt{x} = t$, obteniéndose:

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \Rightarrow dx = 2tdt; 1-\sqrt{x} = 1-t; 1-x = 1-t^2.$$

Por tanto: $\int \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}dx = \int \frac{1-t^2}{1-t}\cdot 2tdt = \int (1+t)\cdot 2tdt = \int \left(2t+2t^2\right)dt = t^2 + \frac{2}{3}t^3 + c$.

Deshaciendo el cambio se obtiene el resultado de arriba.

31. La Rioja, julio 2014

Sean A una constante positiva y $p(x)$ un polinomio de tercer grado tal que su derivada es

$$p'(x) = Ax(x-1), \quad -\infty < x < \infty$$

i) Determina la abscisa de los extremos relativos y estudia la monotonía de p.
ii) Enuncia el teorema de Rolle.
iii) Justifica que existe $b > 1$ tal que $p(b) = p(0)$

Solución:

i) Condición necesaria de extremo relativos es que $p'(x) = 0$. Eso sucede cuando $x = 0$ o $x = 1$.

Haciendo la derivada segunda:

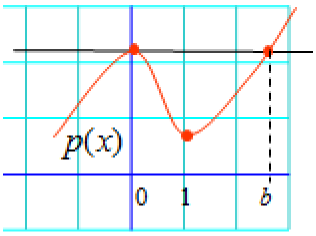
$$p'(x) = Ax(x-1) = A(x^2 - x) \Rightarrow p''(x) = A(2x-1)$$

Como $p''(0) = -A < 0$, en $x = 0$ se da un máximo relativo.
Como $p''(1) = A > 0$, en $x = 1$ se da un mínimo relativo.
Además:

- Si $x < 0$, $p'(x) > 0 \Rightarrow p(x)$ es creciente.
- Si $0 < x < 1$, $p'(x) < 0 \Rightarrow p(x)$ es decreciente.
- Si $x > 1$, $p'(x) > 0 \Rightarrow p(x)$ es creciente.

ii) El teorema de Rolle dice:
Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), y además $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

iii) Voy a dar dos soluciones:
1) De manera intuitiva.
Como la función decrece entre 0 y 1 $\Rightarrow p(0) > p(1)$
Como crece a partir de 1 $\Rightarrow$ volverá a alcanzar el valor $p(0)$.
(Obviamente, al ser un polinomio no tiene asíntotas y, por tanto, crece por encima de cualquier valor $p(0)$).



2) Aplicando el teorema de los valores intermedios.

Integrando $p'(x) = Ax(x-1) = A(x^2 - x) \Rightarrow p(x) = \int A(x^2 - x)dx = A\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) + c$

Sustituyendo se tiene que $p(0) = c \Rightarrow p(x) = A\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) + p(0)$.

En el intervalo [1, 2] se cumple: $p(1) = -\frac{1}{6}A + p(0) < p(0)$; $p(2) = \frac{2}{3}A + p(0) > p(0)$

En consecuencia (teorema de los valores intermedios) existe un valor $b \in (1, 2)$ tal que $p(b) = p(0)$.

32. Madrid, junio 2014

a) (1 punto) Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x = -2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta de ecuación $y = 16x+16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determinar: $f(-2)$, $f´(-2)$ y $f´´(-2)$.

b) (1 punto) Determinar el área de la región acotada limitada por la gráfica de la función $g(x) = x^4 + 4x^3$ y el eje OX.

Solución:

a) Como la recta tangente en $x = -2$ es $y = 16x+16 \Rightarrow f´(-2) = 16$.

Como en $x = -2$ se da una inflexión $\Rightarrow f´´(-2) = 0$.

En el punto de tangencia el valor de la función y el de la recta tangente coinciden $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(-2) = y(-2) \Rightarrow f(-2) = y(-2) = 16\cdot(-2)+16 = -16$.

Por tanto: $f(-2) = -16$; $f´(-2) = 16$; $f´´(-2) = 0$.

b) Puntos de corte de $g(x) = x^4 + 4x^3$ con el eje OX.

$x^4 + 4x^3 = 0 \Rightarrow x^3(x+4) = 0 \Rightarrow x = -4$; $x = 0$.

En el intervalo [–4, 0] la función g toma valores negativos: basta con ver que $g(-1) = -3$.

Por tanto, el área pedida viene dada por:

$$S = -\int_{-4}^{0} \left(x^4 + 4x^3\right)dx = -\left(\frac{x^5}{5} + x^4\right)\Bigg|_{-4}^{0} = \frac{(-4)^5}{5} + (-4)^4 = \frac{256}{5} \text{ u}^2.$$

33. Madrid, junio 2014

Calcular justificadamente:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-2x-e^x+\sin(3x)}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(5x^2+3\right)(x-6)}{\left(x^2-1\right)(2x-1)}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-2x-e^x+\sin(3x)}{x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \left(L´H\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2-e^x+3\cos(3x)}{2x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \to$ (Se aplica otra vez la regla de L´Hôpital) $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-e^x-9\sin(3x)}{2} = -\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\left(5x^2+3\right)(x-6)}{\left(x^2-1\right)(2x-1)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3-30x^2+2x-12}{2x^3-2x^2-2x+1} = \dfrac{5}{2}$.

$\to$ Puede aplicarse la regla de L´Hôpital o dividir ambos términos de la fracción por x^3.

34. Madrid, junio 2014

Dada la función $f(x)=\begin{cases} a+\ln(1-x), & \text{si } x<0 \\ x^2e^{-x}, & \text{si } x\geq 0\end{cases}$, (donde ln denota logaritmo neperiano) se pide:

a) (1 punto) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) (1 punto) Calcular el valor de *a*, para que $f(x)$ sea continua en todo **R**.

c) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de *f* y calcular *f ′*, donde sea posible.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=(\text{L´}H)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=$

$=(\text{L´}H)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=\left[\dfrac{2}{\infty}\right]=0$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(a+\ln(1-x)\right)=\left[a+\ln\infty\right]=\infty$.

b) Por separado, para cada intervalo de definición, las funciones dadas son continuas y derivables. El único punto conflictivo es $x = 0$, en donde las funciones difieren a izquierda y derecha. Será continua en ese punto cuando los límites laterales sean iguales.

Por la izquierda:

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(a+\ln(1-x)\right)=a+\ln1=a$$

Por la derecha:

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} x^2e^{-x}=0\cdot1=0$$

Luego, $a = 0$.

c) $f´(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{1-x}, & \text{si } x<0 \\ 2xe^{-x}-x^2e^{-x}, & \text{si } x>0\end{cases}$.

La única dificultad para la derivabilidad se da en $x = 0$. Será derivable en ese punto cuando coincidan las derivadas laterales.

Como sus valores son: $f´(0^-)=-1$ y $f´(0^+)=0$ la función no es derivable en $x = 0$.

<u>**35**. Murcia, junio 2014</u>

Dada la función $f(x) = x\ln x - x$, se pide:

a) [1,25 puntos] Determine el punto de la gráfica de *f* para el cual la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante. Calcule la ecuación de dicha recta.

b) [1,25 puntos] Determine el punto de la gráfica de *f* para el cual la recta tangente es paralela al eje *OX*. Calcule la ecuación de dicha recta.

<u>Solución</u>:

a) La bisectriz del primer cuadrante es la recta $y = x$, cuya pendiente es 1.

La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ vale $f´(a)$. En este caso, $f(a) = 1$.

Como $f(x) = x\ln x - x \Rightarrow f´(x) = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = \ln x$.

El valor buscado es $\ln x = 1 \Rightarrow x = e$.

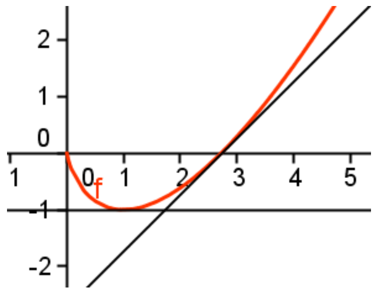
La recta tangente será:

$$y - f(e) = f´(e)\cdot(x - e) \Rightarrow y = x - e$$

b) En este caso la pendiente es $0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$.

Como $f(1) = -1$, la recta pedida es $y = -1$.

→ Aunque no se pide, se adjunta la gráfica.



36. Navarra, junio 14

Dada la función $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6x}\right) + \frac{2}{\sqrt{17 - 2x - 3x^2}}$, demuestra que existe un valor $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 1$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Ayuda: $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Solución:

La función dada cumple el teorema de Lagrange, que dice:

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe algún punto $\alpha \in (a, b)$ tal que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\alpha)$.

En este caso la función es continua en el intervalo [1, 2]. Basta con ver que la raíz cuadrada que aparece no se anula en ese intervalo →

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 17}}{2 \cdot (-3)} = \frac{2 \pm \sqrt{208}}{-6} \approx \begin{cases} -2,74 \\ 2,07 \end{cases}.$$

También es derivable (básicamente por lo mismo). Aunque no es necesario hacerla, su derivada es:

$$f'(x) = \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6x}\right)\right) \cdot \left(\frac{-\pi}{6x^2}\right) + \frac{2 + 6x}{\sqrt{\left(17 - 2x - 3x^2\right)^3}}$$

Por tanto, en el intervalo [1, 2], se cumple que $\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f'(\alpha)$, con $1 < \alpha < 2$.

Como:

$$f(1) = \tan\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{2}{\sqrt{12}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{2\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$f(2) = \tan\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{2}{\sqrt{1}} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2 = \frac{1}{\sqrt{3}} + 2$$

Entonces:

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 2 - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1} = 1 = f'(\alpha)$$

37. Navarra, junio 2014

Dada la función $f(x)=\dfrac{\cos\left(x^3+2x^2+3x\right)}{\sqrt{x^2+x+2}}$, demuestra que existe un valor α ∈ (–2, 1) tal que $f'(\alpha)=0$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Solución:

La función dada es continua y derivable en todo **R**, en particular en el intervalo [–2, 1]. (Basta con observar que el denominador, el radicando, nunca toma el valor 0).

Además, se cumple que:

$$f(-2)=\frac{\cos\left(-8+8-6\right)}{\sqrt{4-2+2}}=\frac{\cos(-6)}{2} \text{ y } f(1)=\frac{\cos\left(1+2+3\right)}{\sqrt{1+1+2}}=\frac{\cos 6}{2} \Rightarrow f(-2)=f(1)$$

Por tanto, esta función cumple el teorema de Rolle: "Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo [*a*, *b*] y derivable en el intervalo (*a*, *b*) y, además, $f(a)=f(b)$, entonces existe al menos, un punto α ∈ (*a*, *b*) tal que $f'(\alpha)=0$".

38. Navarra, junio 2014

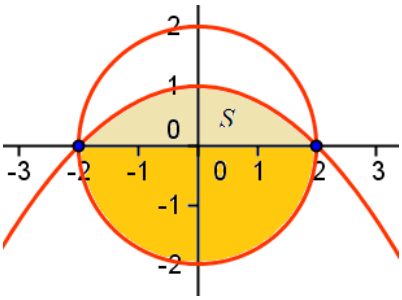
Dada la función $f(x)=1-\frac{1}{4}x^2$, encuentra los dos puntos en que corta al eje de abscisas. Calcula el área de cada una de las dos regiones en que divide esa curva al círculo de centro (0, 0) y radio 2.

Solución:

Corta al eje *OX* en las soluciones de $f(x)=1-\frac{1}{4}x^2=0 \Rightarrow x=-2; x=2$.

La circunferencia de radio 2 centrada en el origen tiene por ecuación $x^2+y^2=2^2$.

Ambas curvas se representan en la figura adjunta.



El área de la zona sombread en claro es:

$$S=\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)dx=2\int_{0}^{2}\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)dx=$$

$$=2\cdot\left(x-\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_0^2=2\left(2-\frac{8}{12}\right)=\frac{8}{3}.$$

El área del círculo vale $S_C=\pi r^2=4\pi \Rightarrow$ la del semicírculo será 2π.

En consecuencia el área de cada una de esas regiones será:

$\rightarrow$ Región superior (en color blanco) $\rightarrow 2\pi-\frac{8}{3}$.

$\rightarrow$ Región inferior (coloreada en dos tonos) $\rightarrow 2\pi+\frac{8}{3}$.

39. Navarra, julio 14

Dada la función $f(x)=e^{1+2x-x^2}$, demuestra que existe un valor α ∈ (1, 2) tal que $f'(\alpha)=-e$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Solución:

La función dada es continua en todo **R**, en particular en el intervalo [1, 2]. Basta con observar que el exponente siempre está definido.

Su derivada, $f'(x)=(2-2x)e^{1+2x-x^2}$ es también continua en todo **R**, y en particular en el intervalo [1, 2]. Por tanto se le puede aplicar el teorema de los valores intermedios, que dice:

"Si $h(x)$ es continua en [*a*, *b*], entonces la función toma todos los valores comprendidos (intermedios) entre $h(a)$ y $h(b)$. Esto es, para cualquier valor *c*, $h(a)\le c\le h(b)$, existe un punto α ∈ [*a*, *b*], tal que $h(\alpha)=c$".

Si se cambia la función $h(x)$ por $f'(x)$ y *c* por –*e*, y se observa que:

$$f'(1)=(2-2)e^{1+2x-x^2}=0;\ f'(1)=(2-2\cdot)e^{1+2\cdot2-2^2}=-2e$$

Como $-2e<-e<0$, (esto es: $f'(2)<-e<f'(1)$) ⇒ existe un punto α ∈ [1, 2], tal que $f'(\alpha)=-e$, como se quería demostrar.

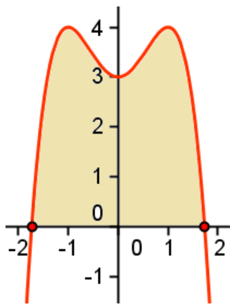
40. Navarra, julio 14

Dada la función $f(x)=3+2x^2-x^4$, halla los puntos de corte con el eje de abscisas y calcula el área de la región del plano encerrada entre esa curva y el eje de abscisas.

Solución:

Los puntos de corte con el eje *OX* en las soluciones de $f(x)=3+2x^2-x^4=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(-1)\cdot3}}{2(-1)}=\frac{-2\pm4}{-2}=\begin{cases}-1\\3\end{cases}\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$$



La curva corta en los puntos $(-\sqrt{3},0)$ y $(\sqrt{3},0)$.

Entre esos dos puntos la función está por encima del eje, pues $3+2x^2-x^4=(1+x^2)(3-x^2)$.

Su gráfica, aunque no es necesaria para determinar el área, es la adjunta.

El área pedida vale:

$$S=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(3+2x^2-x^4)dx=2\int_0^{\sqrt{3}}(3+2x^2-x^4)dx=$$

$$=2\cdot\left[3x+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_0^{\sqrt{3}}=2\cdot\left(3\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\frac{9}{5}\sqrt{3}\right)=\frac{32\sqrt{3}}{5}\ \text{u}^2.$$

:

41. Navarra, julio 14
Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones y simplifica la expresión resultante:

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad \text{(1 punto)} \qquad g(x)=\left(\frac{\cos x}{x}\right)^{2x} \quad \text{(1 punto)}$$

Solución:

$$\rightarrow\ f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{2}\left(\ln(1-x)-\ln(1+x)\right)$$

Derivando:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{-1}{1-x^2}$$

$$\rightarrow\ g(x)=\left(\frac{\cos x}{x}\right)^{2x} \Rightarrow \ln\left(g(x)\right)=2x\ln\left(\frac{\cos x}{x}\right)=2x\left(\ln\left(\cos x\right)-\ln x\right)$$

Derivando miembro a miembro:

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=2\ln\left(\frac{\cos x}{x}\right)+2x\left(\frac{-\sin x}{\cos x}-\frac{1}{x}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)=g(x)\left[2\ln\left(\frac{\cos x}{x}\right)+2x\left(\frac{-\sin x}{\cos x}-\frac{1}{x}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x)=\left(\frac{\cos x}{x}\right)^{2x}\left[2\ln\left(\frac{\cos x}{x}\right)-2x\tan x-2\right]$$

42. Navarra, julio 14
Dada la función

$$f(x)=(x-2)e^{\sqrt{x^2-4x+5}}\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}x\right),$$

demuestra que existe un valor $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f'(\alpha)=0$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Solución:

La función dada es continua y derivable en todo **R**, en particular en el intervalo [1, 3]. (Basta con observar que el radicando del exponente nunca toma valores negativos; las otras dos funciones, el binomio y el coseno no presentan ningún inconveniente).
Además, se cumple que:

$$f(1)=-e^{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) \text{ y } f(3)=e^{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{17\pi}{10}\right)=e^{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{7\pi}{10}+\pi\right)=-e^{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{7\pi}{10}\right)$$

$$\Rightarrow f(1)=f(3)$$

Por tanto, esta función cumple el teorema de Rolle, que dice: "Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) y, además, $f(a)=f(b)$, entonces existe al menos, un punto $\alpha \in (a, b)$ tal que $f'(\alpha)=0$", que es lo que se quería demostrar.

43. País Vasco, junio 2014

Sea f la función $f(x)=ax^3+bx+c$.

a) Obtener los valores de a, b y c para que pase por el origen de coordenadas y tenga un mínimo en el punto (1, –1).

b) ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos?

Solución:

a) $f(x)=ax^3+bx+c \Rightarrow f'(x)=3ax^2+b \Rightarrow f''(x)=6ax$

Por pasar por (0, 0), $f(0) = 0$ $\Rightarrow 0 = c$

Por pasar por (1, –1), $f(1) = -1$ $\Rightarrow -1 = a + b + c \to -1=a+b$

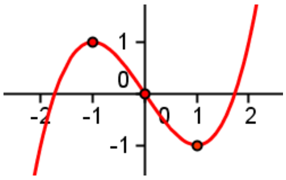
Por máximo en (1, –1), $f'(1) = 0$ $\Rightarrow 0=3a+b$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} -1=a+b \\ 0=3a+b \end{cases} \Rightarrow a=\dfrac{1}{2}; b=-\dfrac{3}{2}$.

Luego, la función es $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{3}{2}x$.

b) Como $f'(x)=\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}\left(x^2-1\right)$ se anula también en $x = -1$, la función tiene otro punto estacionario; y como $f''(-1)=-3<0$, en $x = -1$ se tiene un máximo relativo.

Observación: Aunque no se pide, la gráfica de la función, que es la adjunta, confirma el resultado obtenido.



44. País Vasco, julio 2014

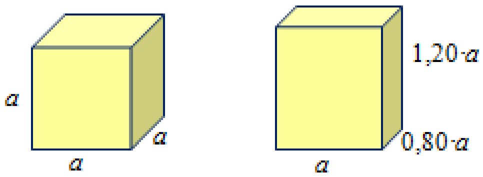
Se hacen variar las tres dimensiones de una caja cúbica (las tres dimensiones iguales) de la siguiente manera: se aumenta un 20% su altura, se disminuye un 20% su anchura y se mantiene la misma dimensión para su largura.

a) ¿Afecta esta variación a su volumen?, ¿cuánto?

b) ¿El área total de la nueva caja disminuye en más del veinte por ciento?

Solución:

El proceso es el que se ilustra en las figuras siguientes:



a) El volumen de la caja cúbica inicial es $V=a^3$.

El volumen de la nueva caja es $V_N=a·0,80a·1,20a=0,96a^3$.

Por tanto, el volumen ha disminuido en un 4%.

b) El área de la caja inicial era: $S=6a^2$.

El área de la nueva caja es:

$$S_N=2\left(a·1,20a+0,80a·1,20a+a·0,80a\right)=2·2,96a^2=5,92a^2.$$

Por tanto, el área de la nueva caja es un 8% menor.

45. País Vasco, julio 2014
Se sabe que la suma de los cuadrados de dos números positivos A y B vale 32.
Calcular dichos números para que su producto $A·B$ sea máximo.
Solución:
Se sabe que $A^2+B^2=32 \Rightarrow B=\sqrt{32-A^2}$.
Por tanto: $A·B=A·\sqrt{32-A^2}=\sqrt{32A^2-A^4}$.
La función $f(A)=\sqrt{32A^2-A^4}$ tiene un máximo en la solución de $f'(A)=0$ que haga negativa a $f''(A)$.
Derivando respecto a A:

$$f'(A)=\frac{64A-4A^3}{2\sqrt{32A^2-A^4}} \Rightarrow f'(A)=0 \text{ cuando } 64A-4A^3=0 \Rightarrow 4A\left(16-A^2\right)=0.$$

Se obtiene tres soluciones: $A = 0$; $A = –4$ y $A = 4$. (Las dos primeras carecen de sentido).

Para determinar si en $A = 4$ se da el máximo buscado, en vez de derivar de nuevo, puede estudiarse el crecimiento y decrecimiento en un entorno de ese valor.
$\to$ Si $A < 4$, $f'(A)>0$ $\to$ la función crece.
$\to$ Si $A > 4$, $f'(A)<0$ $\to$ la función decrece.
Esto confirma que el máximo buscado se da cuando $A = 4$; lo que implica que B también vale 4.

46. País Vasco, julio 2014
Hallar la integral $\int \frac{3x+7}{\left(x^2-3x+2\right)(x-3)}dx$, explicando el método utilizado para dicho cálculo.
Solución:
Esta integral debe hacerse por descomposición en fracciones simples. Se hace lo que sigue:
Las raíces de $x^2-3x+2=0$ son: $x = 1$ y $x = 2$. Por tanto:

$$\frac{3x+7}{\left(x^2-3x+2\right)(x-3)}=\frac{3x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}=$$

$$=\frac{A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

En consecuencia:

$$3x+7=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$$

Los valores de A, B y C pueden obtenerse dando valores a x:
$\to$ si $x = 1$ $\Rightarrow 10=2A \Rightarrow A=5$
$\to$ si $x = 2$ $\Rightarrow 13=-B \Rightarrow B=-13$
$\to$ si $x = 3$ $\Rightarrow 16=2C \Rightarrow C=8$

Luego:

$$\int \frac{3x+7}{\left(x^2-3x+2\right)(x-3)}dx = \int\left(\frac{5}{x-1}+\frac{-13}{x-2}+\frac{8}{x-3}\right)dx =$$

$$= 5\ln(x-1)-13\ln(x-2)+8\ln(x-3)+c$$

47. País Vasco, julio 2014

Al sumar 21 múltiplos seguidos de 3 obtenemos el valor 1260. En esa suma, ¿cuál es el primer múltiplo de 3? ¿Y el último?

Solución:

Si el primer múltiplo de 3 se designa por $3n$, entonces se tiene:

$$3n+3(n+1)+3(n+2)+...+3(n+20)=1260$$

El primer miembro de la igualdad se transforma como sigue:

$$3n+3n+3+3n+3\cdot2+...+3n+3\cdot20=3n\cdot21+3(1+2+...+20) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 63n+3\cdot\frac{(1+20)\cdot20}{2}=63n+630$$

Por tanto:

$$63n+630=1260 \Rightarrow n=10$$

El primer número es 30; el último, 90.