ALGUNOS PROBLEMAS DE ÁLGEBRA PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE SELECTIVIDAD DE 2014

1. Castilla y León, junio 14

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{pmatrix}$.

a) Discutir su rango en función de los valores de a. **(1,5 puntos)**

b) Para $a = 1$, resolver la ecuación matricial $A^t X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, siendo A^t la matriz traspuesta de A. **(1 punto)**

Solución:

a) El rango de la matriz dada no varía si se hacen las transformaciones de Gauss que se indican:

$$A=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{pmatrix} \to A = \begin{array}{r} \\ F2-F1 \\ F3-F1 \end{array}\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Como la fila 3ª es doble que la 2ª, $F3 = 2F2$, el rango es siempre menor que 3.

Como el menor $\begin{vmatrix} a+1 & a+2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2a+2-(2a+4) = -2 \neq 0$, el rango siempre será 2.

b) Para $a = 1$, resolver la ecuación matricial $A^t X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \\ 3x+5y+7z=0 \end{cases} \to \text{se trata de un sistema homogéneo}$$

compatible indeterminado, pues, como se ha visto, el rango de la matriz de coeficientes es 2. (Puede observarse que la tercera ecuación es la suma de las otras dos).

Será equivalente a $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-z \\ x+2y=-3z \end{cases}$ →restando, E2 – E1, se obtiene:

$y=-2z$; $x = z$.

La solución puede escribirse como: $\begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$.

2. Castilla La Mancha, junio 14

a) Sabiendo que A es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|A|=5$, calcula razonadamente el valor de los determinantes:

$|-A|$, $|A^{-1}|$, $|A^T|$, $|A^3|$ (1 punto)

b) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$ calcula, usando las propiedades de los determinantes,

$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ (1,5 puntos)

Solución:

a) De $|k\cdot A| = k^n|A|$, siendo A de orden $n \Rightarrow |-A| = |(-1)\cdot A| = (-1)^2\cdot|A| = 5$.

Como $|A\cdot A^{-1}| = |I| = 1$ y $|A\cdot A^{-1}| = |A|\cdot|A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{5}$.

Como $|A^T| = |A| \Rightarrow |A^T| = 5$.

De $|A^n| = |A|^n \Rightarrow |A^3| = 5^3 = 125$.

b) $\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix}$ = (se extrae 3 de $F3$) = $3\cdot\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ a & b & c \end{vmatrix}$ = (se suman filas)

$= \begin{matrix} F1+F3 \\ F2-F3 \end{matrix} \rightarrow 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$ = (cambiando la $F1$ por la $F3$) = $-3\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\cdot 2 = -6$.

Si se desarrolla por la primera fila:

$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 30 & 0 & 10 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ = (se extrae 2 de $F1$, 10 de $F2$ y 4 de $F3$) =

$= 5\cdot 2\cdot 10\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ = (se intercambian $F2$ y F3) =

$= 400\cdot(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -400\cdot 2 = -800$

<u>3. Cataluña, junio 2014</u>

6. Responeu a les qüestions següents:

a) Demostreu que si $\boldsymbol{A}$ és una matriu quadrada que satisfà la igualtat $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$, on $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat, aleshores $\boldsymbol{A}$ és invertible i $\boldsymbol{A}^{-1}$ satisfà $(\boldsymbol{A}^{-1})^2 = \boldsymbol{I}$.

[1 punt]

b) Calculeu l'expressió general de les matrius de la forma $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ amb $b \neq 0$ que satisfan la igualtat $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$.

[1 punt]

<u>Solución</u>:

a) Como $\left|A^2\right| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = |I| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$. Por tanto, A es invertible.

Además, $|A| = \sqrt{1} = \pm 1$.

$\rightarrow$ Si $A^2 = I \Rightarrow A \cdot A = A \cdot A^{-1}$.

Multiplicando por A^{-1}, por la izquierda y derecha, la igualdad anterior se tiene:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot A) \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot \left(A \cdot A^{-1}\right) \cdot A^{-1} \Rightarrow \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot \left(A \cdot A^{-1}\right) = \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot \left(A^{-1} \cdot A^{-1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I \cdot I = I \cdot \left(A^{-1}\right)^2 \Rightarrow I = \left(A^{-1}\right)^2$$

b) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$ y $A^2 = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a+2)b \\ (a+2)c & cb+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ (a+2)b = 0 \rightarrow (b \neq 0) \Rightarrow a = -2 \\ (a+2)c = 0 \\ bc + 4 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

De la 4ª igualdad $\Rightarrow c = -\dfrac{3}{b}$.

Por tanto, la expresión general de la matriz A será: $A = \begin{pmatrix} -2 & b \\ -3/b & 2 \end{pmatrix}$.

4. Comunidad Valenciana, julio 2014

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El valor del determinante de la matriz $S = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, (2 *puntos*) y la matriz S^{-1}, que es la matriz inversa de la matriz *S*. (2 *puntos*). Indicar la relación entre que el valor del determinante de una matriz *S* sea o no nulo y la propiedad de que esta matriz admita matriz inversa S^{-1}. (1 *punto*).

b) El determinante de la matriz $\left(4\left(T^2\right)\right)^{-1}$, sabiendo que *T* es una matriz cuadrada de 3 filas y que 20 es el valor del determinante de dicha matriz *T*. (3 *puntos*).

c) La solución *a* de la ecuación $\begin{pmatrix} a & a^2-1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+1 & -3 \\ a^2-1 & 2 & 4a \\ -3 & a^2+4 & 1 \end{pmatrix}$ (2 *puntos*)

Solución:

a) $|S| = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot(5-3) + 2\cdot(5+1) + 1\cdot(3+1) = 20$.

Para que exista la inversa de una matriz *A* es necesario que $|A| \neq 0$. En caso contrario la matriz no tiene inversa, pues su inversa viene dada por $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\left(A_{ij}\right)^t$, siendo $\left(A_{ij}\right)$ la matriz de los adjuntos de *A*. Es obvio que si $|A| = 0$ la expresión anterior no tiene sentido.

En este caso: $S^{-1} = \frac{1}{|S|}\cdot\left(S_{ij}\right)^t$

Los adjuntos son:

$S_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2$; $S_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -6$; $S_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4$

$S_{21} = 13$; $S_{22} = 11$; $S_{23} = -4$

$S_{31} = -3$; $S_{32} = -1$; $S_{33} = 4$

La matriz de los adjuntos es: $\left(S_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 13 & 11 & -4 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Luego, $S^{-1} = \frac{1}{20}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 13 & -3 \\ -6 & 11 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Se aplican las siguientes propiedades:

1) $|k\cdot A| = k^n\,|A|$ 2) $|A^n| = |A|^n$ 3) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

Con esto, si $|T| = 20 \Rightarrow |T^2| = 20^2 = 400 \Rightarrow |4T^2| = 4^3\cdot 400 = 25600 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|\left(4\left(T^2\right)\right)^{-1}\right| = \frac{1}{25600}.$$

c) Dos matrices son iguales cuando sus elementos correspondientes son iguales.

$$\begin{pmatrix} a & a^2-1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+1 & -3 \\ a^2-1 & 2 & 4a \\ -3 & a^2+4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2-1 = a+1 \\ 4a = a^2+4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-a-2=0 \\ a^2-4a+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1;\ a=2 \\ a=2 \end{cases}$$ $\to$ La única solución posible es a = 2.

5. Canarias, julio 2014

Determinar los valores de los parámetros a y b para los que tiene inversa la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 4b \\ a & a+b \end{pmatrix}$$ (1,5 puntos)

Calcular la matriz A^{-1} cuando a = 3 y b = 1. (1 punto)

Solución:

Para que exista la inversa de la matriz A es necesario que $|A| \neq 0$.

Como $|A| = \begin{vmatrix} a+b & 4b \\ a & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - 4b = (a-b)^2 \Rightarrow$ La matriz dada tendrá inversa siempre que $a \neq b$.

Cuando a = 3 y b = 1, la matriz es $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, siendo $|A| = 4$.

Si inversa viene dada por $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot\left(A_{ij}\right)^t$, siendo $\left(A_{ij}\right)$la matriz de los adjuntos de A.

En este caso, $\left(A_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3/4 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Madrid, junio 2014

Dada las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & 0 & \alpha\\ 1 & \beta & \gamma\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\quad O=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Calcula α, β, γ para que $\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$ sea solución del sistema $AX=B$.

b) (1 punto) Si β = γ = 1, ¿qué condición o condiciones debe cumplir α para que el sistema lineal homogéneo $AX=O$ sea compatible determinado?

c) (0,5 puntos) Si α = −1, β = 1 y γ = 0, resuelve el sistema $AX=B$.

Solución:

a) Si $\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$ es solución de $AX=B \Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \gamma & 0 & \alpha\\ 1 & \beta & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=1\\ 3\alpha+\gamma=0\\ 1+2\beta+3\gamma=1\end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=1\\ 3\alpha \quad +\gamma=0\\ \quad 2\beta+3\gamma=0\end{cases} \to \text{(Por Gauss)} \to \begin{matrix}E1-E3\\ \\ \\ \end{matrix}\begin{cases}\alpha=1\\ 3\alpha \quad +\gamma=0\\ \quad 2\beta+3\gamma=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=1\\ \gamma=-3\\ \beta=9/2\end{cases}$$

b) Si β = γ = 1, el sistema $AX=O$ queda: $\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 1\\ 1 & 0 & \alpha\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \to$ Sistema homogéneo.

Será compatible determinado cuando $|A|\neq 0$.

Como $|A|=-\alpha^2-1+\alpha+1=0 \Rightarrow$ α = 0 o α = 1, el sistema será compatible determinado para cualquier valor de α ≠ 0 y 1.

c) Si α = −1, β = 1 y γ = 0, el sistema $AX=B$ es $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{cases}-x+y=1\\ -z=0\\ x+y=1\end{cases}.$$

Su solución es $\begin{cases}x=0\\ y=1\\ z=0\end{cases}$.

<u>**7**. Madrid, junio 2014</u>

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & a\\ -3 & 2 & a\\ 0 & a & -1\end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Hallar el valor o valores de a para que la matriz A tenga inversa.

b) (1 punto) Calcular la matriz inversa A^{-1} de A, en el caso $a = 2$.

<u>Solución</u>:

a) Para que la matriz A tenga inversa es necesario que $|A|\neq 0$.

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & -1 & a\\ -3 & 2 & a\\ 0 & a & -1\end{vmatrix}=-2a^2+5 \to -2a^2+5\neq 0 \Rightarrow a\neq \pm\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

b) Si $a = 2$, $A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ -3 & 2 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$, con $|A|=-3$.

La matriz inversa es $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot\left(A_{ij}\right)^t$, siendo $\left(A_{ij}\right)$ la matriz de los adjuntos de A.

En este caso: $\left(A_{ij}\right)=\begin{pmatrix}-6 & -3 & -6\\ 3 & 1 & 2\\ -6 & -4 & -5\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=-\dfrac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-6 & 3 & -6\\ -3 & 1 & -4\\ -6 & 2 & -5\end{pmatrix}$

<u>**8**. Madrid, junio 2014</u>

Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado veintidós euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de catorce euros. Se pide:

a) (1 punto) Expresar, en función del precio de un bolígrafo, lo que costará un cuaderno y lo que costará un rotulador.

b) (1 punto) Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.

<u>Solución</u>:

a) Si C, R y B son los precios de un cuaderno, un rotulador y un bolígrafo, respectivamente, se tiene las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases}5C+2R+3B=22\\ 2C+1R+6B=14\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5C+2R=22-3B\\ 2C+R=14-6B\end{cases}.$$

Luego:

$$C=\frac{\begin{vmatrix}22-3B & 2\\ 14-6B & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{22-3B-28+12B}{1}=-6+9B;$$

$$R=\frac{\begin{vmatrix}5 & 22-3B\\ 2 & 14-6B\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{70-30B-44+6B}{1}=26-24B$$

b) Si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores habrá que pagar:

$8C+3R=8(-6+9B)+3(26-24B)=-48+72B+78-72B=30$ euros.

<u>**9**. Madrid, septiembre 14</u>

Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & a\\ 1 & a & 1\\ a-1 & a & 2\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},\qquad O=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto) Determinar el valor o valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1}.

b) (1 punto) Para $a = -2$, hallar la matriz inversa A^{-1}.

c) (1 punto) Para $a = 1$; calcular todas las soluciones del sistema lineal $AX=O$.

<u>Solución</u>:

a) La matriz inversa no existe cuando su determinante vale 0.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & a & a\\ 1 & a & 1\\ a-1 & a & 2\end{vmatrix}=F2-F1\to\begin{vmatrix}1 & a & a\\ 0 & 0 & 1-a\\ a-1 & a & 2\end{vmatrix}=-(1-a)\cdot\left(a-a^2+a\right)=-a(1-a)\cdot(2-a)$$

Como $-a(1-a)\cdot(2-a)=0$ si $a = 0$, $a = 1$ o $a = 2$ $\Rightarrow$ la matriz A no tendrá inversa cuando el valor de a sea 0, 1 o 2.

b) Para $a = -2$, la matriz es $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -3 & -2 & 2\end{pmatrix}$; que tiene inversa, pues $|A|=24$.

La matriz inversa viene dada por $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left(A_{ij}\right)^t$, siendo $\left(A_{ij}\right)$ la matriz de los adjuntos de A.

Los adjuntos son:

La matriz de los adjuntos es: $\left(A_{ij}\right)=\begin{pmatrix}-2 & -5 & -8\\ 8 & -4 & 8\\ -6 & -3 & 0\end{pmatrix}$. Luego, $A^{-1}=\frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 8 & -6\\ -5 & -4 & -3\\ -8 & 8 & 0\end{pmatrix}$.

c) Para $a = 1$, el sistema $AX=O$ queda: $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ $\to$ Sistema homogéneo, con infinitas soluciones, pues el rango de la matriz de coeficientes es 2.

El sistema se puede escribir como $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-z \\ y=-2z \end{cases}$.

Su solución es $\begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$.

<u>**10**. Madrid, septiembre 14</u>

Dada la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde *B* es una matriz cuadrada de tamaño 2 × 2, se pide:

a) (1 punto) Calcular el valor o valores de *a* para los que esta ecuación tiene solución.

b) (1 punto) Calcular *B* en el caso *a* = 1.

<u>Solución</u>:

a) La ecuación dada tendrá solución cuando pueda despejarse *B*. Para ello debe existir la inversa de la matriz inicial, $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, pues $B = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esa inversa existe cuando su determinante sea distinto de 0.

Por tanto, $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7a - 6 \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{6}{7}$.

b) Para *a* = 1, se tiene $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La inversa de *A* es $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{ij})^t$ = $A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Por tanto:

$$B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

<u>**11**. Madrid, septiembre 14</u>

Estudiar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{pmatrix}$, según los valores del parámetro *a*.

<u>Solución</u>:

El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo. En este caso, el rango puede llegar a valer 4; para ello el determinante de *A* debe ser distinto de 0.

Voy a calcular el determinante haciendo transformaciones de Gauss que indico:

→ A la segunda y tercera columna se le resta la primera; a la4ª, seis veces la primera:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 & -7 \\ 2 & 0 & -3 & a-12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -7 & a-1 \end{vmatrix} = \text{(se desarrolla por la tercera fila)} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -3 & -5 & -7 \\ 0 & -3 & a-12 \\ -2 & -7 & a-18 \end{vmatrix} = -\left(-3\left(-3a+54+7a-84\right)-2\left(-5a+60-21\right)\right) = -2a+12$$

Por tanto:

- Si $-2a+12 \neq 0 \Rightarrow a \neq 6$, el rango de la matriz A vale 4.
- Cuando a = 6, la matriz inicial es $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$, que tiene el mismo rango

que $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 & -7 \\ 2 & 0 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ (se han hecho las transformaciones anteriores).

Como el menor $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \Rightarrow$ el rango es 3.

12. Murcia, junio 2014

Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$, calcula, sin desarrollar ni utilizar la regla de Sarrus, los siguientes determinantes, indicando en cada caso qué propiedad de los determinantes se está utilizando.

a) (1 punto) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) (1,5 puntos) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+2 & 3z+4 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix}$

Solución:

Se aplicarán las transformaciones de Gauss, que se indican en cada caso:

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ = (se extrae 3 de la primera fila) = $3\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ = (se intercambian la fila 1ª y 2ª) = $-3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ = (se multiplica por 2 la fila 3ª; debe dividirse por 2 fuera del determinante) = $-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -3\cdot\frac{1}{2}\cdot 4 = -6$.

b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+2 & 3z+4 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix}$ = (se restan las filas como se indica) $\begin{array}{r} \\ F2-3F1 \\ F3-F1 \end{array}\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ =

= (se intercambian las filas 1ª y 2ª) = $-\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ x & y & z \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ = (se intercambian las filas 1ª y 3ª) =

= $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ = (se extrae 2 de la primera fila) = $2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 = 8$.

13. País Vasco, junio 2014

Un comercio ha adquirido una partida de armarios y mesas. Los armarios han costado 649 € cada uno de ellos y las mesas 132 € cada una. El responsable del comercio no recuerda si el precio total ha sido 2716 o 2761 €.

a) ¿Cuánto ha pagado exactamente? Razona la respuesta.

b) ¿Cuántos armarios y mesas ha comprado exactamente?

Solución:

Si el comerciante adquiere x armarios e y mesas, debe cumplirse alguna de las dos ecuaciones siguientes:

$$649x + 132y = 2716;$$

o bien,

$$649x + 132y = 2761$$

Es evidente que falta una ecuación, pero se pueden conocer dos cosas:

1) Los valores de x e y deben ser enteros;

2) Además $x \leq 4$, pues con $x = 5$ se supera el precio total.

La solución puede obtenerse probando si para $x = 0, 1, 2, 3$ o 4, existe un valor coherente para el número de mesas y.

Con la primera ecuación $649x + 132y = 2716$, si se adquieren x armarios:

Armarios, x	Coste de x armarios	Cantidad sobrante	Número posible de mesas compradas	¿Es posible?
0	0	2716	20,57…	No
1	649	2067	15,65…	No
2	1298	1418	10,74…	No
3	1947	769	5,82…	No
4	2596	120	0,90…	No

Por tanto, la cantidad de 2716 € no ha podido ser el precio total.

Con la segunda ecuación $649x + 132y = 2761$, si se adquieren x armarios:

Armarios, x	Coste de x armarios	Cantidad sobrante	Número posible de mesas compradas	¿Es posible?
0	0	2761	20,91…	No
1	649	2112	16	SÍ
2	1298	1463	9,83…	No
3	1947	814	6,16…	No
4	2596	165	1,25	No

La única solución posible es: "Se ha comprado 1 armario y 16 sillas".

El precio total ha sido de 2761 euros.

14. Castilla y León, junio 14

Discutir, y resolver cuando sea posible, el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro *m*: $\begin{cases} mx+y=1 \\ x+my=m \\ 2mx+2y=m+1 \end{cases}$ **(2,5 puntos)**

Solución:
Se trata de un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas. Tendrá solución cuando el rango de la matriz de coeficientes sea igual al de la matriz ampliada. En consecuencia, el rango de la matriz ampliada debe ser menor que 3.
Por tanto,

$$|M|=\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 2m & 2 & m+1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow m^3-m^2-m+1=0 \Rightarrow (m-1)^2(m+1)=0$$

El sistema puede ser compatible cuando $m = -1$ o $m = 1$.
Si $m \neq \pm 1$, el sistema será incompatible, pues el rango de M es 3.

- Si $m = -1$ el sistema queda: $\begin{cases} -x+y=1 \\ x-y=-1 \\ -2x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} E1 \\ E3/2 \end{matrix}\begin{cases} -x+y=1 \\ -x+y=0 \end{cases}$, que es

incompatible, pues restando ambas ecuaciones $\Rightarrow 0 = 1$, que es absurdo.

- Si $m = 1$ el sistema queda: $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \{x+y=1$, cuya solución es $\begin{cases} x=t \\ y=1-t \end{cases}$.

15. Extremadura, junio 2014
Considérese el sistema compatible determinado de dos ecuaciones con dos incógnitas $\left.\begin{matrix} x+y=1 \\ x-y=3 \end{matrix}\right\} \equiv S$, cuya solución es el punto $P_0 = (2, -1)$ de $\mathbf{R}^2$.
Sea S' el sistema que se obtiene al añadir a S una tercera ecuación $ax+by=c$.
Contesta razonadamente las siguientes preguntas:
a) (0,75 puntos) ¿Puede ser S' compatible determinado?
b) (0,75 puntos) ¿Puede ser S' incompatible?
c) (1 punto) ¿Puede ser S' compatible indeterminado?
Solución:
a) El sistema S' será compatible determinado siempre que la ecuación añadida sea una combinación lineal de las dos dadas; esto es: $(ax+by=c) \equiv p(x+y=1)+q(x-y=3)$.

Por ejemplo, si $p = q = 1$, el sistema $\left.\begin{matrix} x+y=1 \\ x-y=3 \\ 2x=4 \end{matrix}\right\} \equiv S'$ sigue teniendo la misma solución, el punto $P_0 = (2, -1)$.

b) Será incompatible siempre que la tercera ecuación no sea combinación lineal de las otras dos. Por ejemplo, si se añade la ecuación $x+y=0$, el sistema $\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=3 \\ x+y=0 \end{array}\right\} \equiv S'$ es claramente incompatible.

c) Para que el sistema resultante sea compatible indeterminado es necesario que el rango de la matriz de coeficientes sea 1, pero eso es imposible, pues el rango inicial ya vale 2.

Observación:
Me parece innecesario hacer más problemas de sistemas de ecuaciones lineales, que se repiten con frecuencia en los exámenes de Selectividad; pueden encontrarse en muchos sitios. Por ejemplo en los problemas del Tema 3 de esta página:
http://www.matematicasjmmm.com/matemticas-ii-tecnolgico/
.