ALGUNOS PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD PROPUESTOS EN 2013

1. Aragón, junio 13

a) ¿Pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$? Justifica la respuesta.

b) Determina todos los posibles vectores $\vec{u} = (a, 0, b)$ que tengan módulo 8 y sean perpendiculares a la recta $r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$.

Solución:

a) El producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se define como: $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$.

Por tanto, no es posible que $8 = 2\cdot 3\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$; pues el coseno es siempre menor o igual que 1.

b) $r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r: \begin{cases} x + y = -z \\ x - y = 2 - z \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 \\ z = \quad t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (-1, 0, 1)$

Aplicando la definición canónica de producto escalar:

$\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2) \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$.

Si dos vectores son perpendiculares su producto escalar vale 0.

Se desea que $\vec{u}\cdot\vec{v}_r = 0$ y $|\vec{u}| = 8$

$(a, 0, b) \cdot (-1, 0, 1) = 0 \Rightarrow -a + b = 0 \Rightarrow b = a$.

Por tanto, los vectores pedidos son: $\vec{u} = (a, 0, a)$.

Si $|\vec{u}| = 8 \Rightarrow \sqrt{a^2 + a^2} = 8 \Rightarrow a = \pm\dfrac{8}{\sqrt{2}} = \pm 4\sqrt{2}$.

Luego: $\vec{u} = \left(4\sqrt{2}, 0, 4\sqrt{2}\right)$ o $\vec{u} = \left(-4\sqrt{2}, 0, -4\sqrt{2}\right)$.

2. Aragón, junio 13

Dadas las rectas: $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{1}$ y $s: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$.

a) Determina su posición relativa.

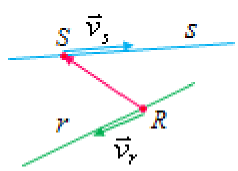
b) Calcula la distancia del punto $P = (2, 3, 1)$ a la recta s.

Solución:

a) Si R un punto de r y S un punto de s, la posición relativa de las rectas r y s se determina estudiando la dependencia lineal de los vectores:

$\vec{v}_r = (2, 3, 1)$, $\vec{v}_s = (-1, 2, 2)$ y $\mathbf{RS} = (0, 1, -2) - (0, 0, 0) = (0, 1, -2)$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12 + 7 = 5 \neq 0$, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas r y s se cruzan.



b) La ecuación de la distancia de un punto P a una recta s es:

$$d(P,s)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}_s\right|}{\left|\vec{v}_s\right|}, \text{ siendo } A\in s.$$

En este caso: $A = (0, 1, -2)$, $P = (2, 3, 1)$, $\overrightarrow{AP} = (2, 2, 3)$, $\vec{v}_s = (-1, 2, 2)$.

El producto vectorial vale:

$$\overrightarrow{AP}\times\vec{v}_s=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 2 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}=(-2,-7,6)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}_s\right|=\sqrt{(-2)^2+(-7)^2+6^2}=\sqrt{89}$$

El módulo de $\vec{v}_s$: $\left|\vec{v}_s\right|=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=3$

Luego $d(P,s)=\dfrac{\sqrt{89}}{3}$.

3. Castilla-León, junio 2013.

Sean los puntos $A(1, 2, -1)$, $P(0, 0, 5)$, $Q(1, 0, 4)$ y $R(0, 1, 6)$.

a) Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto *A*, es paralela al plano que pasa por los puntos *P*, *Q* y *R*, y tal que la primera componente de su vector director es doble que la segunda.

b) Halla la distancia del punto *A* al plano que pasa por *P*, *Q* y *R*.

Solución:

a) Ecuación el plano π que contiene a *P*, *Q* y *R*:

PQ = (1, 0, 4) – (0, 0, 5) = (1, 0, –1); **PR** = (0, 1, 6) – (0, 0, 5) = (0, 1, 1).

$$\pi\equiv\begin{cases}x= t\\ y= h\\ z=5-t+h\end{cases}\Rightarrow\pi\equiv\begin{vmatrix}x & 1 & 0\\ y & 0 & 1\\ z-5 & -1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow\pi\equiv x-y+z-5=0\to\vec{v}_\pi=(1,-1,1)$$

Recta *r*: $r:\begin{cases}x=1+at\\ y=2+bt\\ z=-1+ct\end{cases}\to\vec{v}_r=(a,b,c)$. Se desea que $\vec{v}_r=(2b,b,c)$.

Si la recta debe ser paralela al plano:

$\vec{v}_r\cdot\vec{v}_\pi=0\Rightarrow(2b,b,c)\cdot(1,-1,1)=0\Rightarrow b+c=0\Rightarrow c=-b$

Por tanto: $r:\begin{cases}x=1+2bt\\ y=2+bt\\ z=-1-bt\end{cases}\to$ Si $b = 1$, $r:\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+t\\ z=-1-t\end{cases}$

b) $d\left(P(x_0,y_0,z_0),\pi: ax+by+cz+d=0\right)=\left|\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$

Luego: $d\left(A(1,2,-1),\pi\equiv x-y+z-5=0\right)=\left|\dfrac{1-2-1-5}{\sqrt{1+1+1}}\right|=\dfrac{7}{\sqrt{3}}$.

4. Castilla-León, junio 2013.

Sean los puntos $P(1, 4, -1)$, $Q(0, 3, -2)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 4 \end{cases}$.

a) Halla la ecuación del plano que pasa por P, por un punto R de la recta r y es perpendicular a la recta que pasa por Q y por R.
b) Halla el ángulo que forman la recta r y el plano $\pi \equiv x - y - 3 = 0$.

Solución:

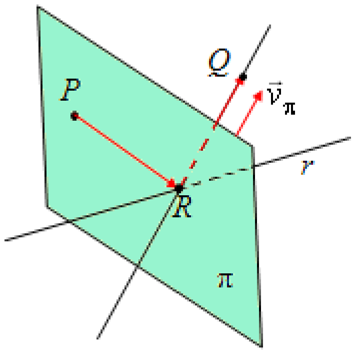
a) Las ecuaciones paramétricas de r son: $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + t \\ z = \quad t \end{cases}$.

Un punto genérico R de r es: $R(1, 4 + t, t)$.
El vector de dirección, genérico también, de la recta que pasa por Q y R es:

$$\overrightarrow{QR} = (1, 4 + t, t) - (0, 3, -2) = (1, 1 + t, 2 + t)$$

Si el plano pedido contiene a los puntos P y R, contiene al vector $\overrightarrow{PR}$:

$$\overrightarrow{PR} = (1, 4 + t, t) - (1, 4, -1) = (0, t, 1 + t)$$



Si un vector es perpendicular a un plano, significa que ese es el vector característico del plano; lo que implica que es perpendicular a todos los vectores contenidos en el plano. En particular, los vectores $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{PR}$ son perpendiculares. Luego, su producto escalar valdrá 0: $\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$.

$$(1, 1 + t, 2 + t) \cdot (0, t, 1 + t) = 0 \Rightarrow 2t^2 + 4t + 2 = 0 \Rightarrow t = -1$$

Por tanto: $\overrightarrow{QR} = (1, 0, 1) \Rightarrow \vec{v}_\pi = (1, 0, 1)$.
La ecuación del plano que contiene a $P(1, 4, -1)$ y tiene por vector normal a $\vec{v}_\pi = (1, 0, 1)$ es:

$$\pi \equiv 1 \cdot (x - 1) + 1(z + 1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + z = 0$$

b) El ángulo que forma una recta con un plano es el complementario del que determinan los vectores $\vec{v}_r$, de dirección de la recta, con $\vec{v}_\pi$, normal al plano.

Por tanto, el seno del ángulo (r, π), $\operatorname{sen}(r, \pi) = \cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \dfrac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|}$.

En este caso: $\pi \equiv x - y - 3 = 0 \rightarrow \vec{v}_\pi = (1, -1, 0)$; $\vec{v}_r = (0, 1, 1)$.
Luego,

$$\operatorname{sen}(r, \pi) = \frac{(1, -1, 0) \cdot (0, 1, 1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \text{ángulo}(r, \pi) = -30^\circ \rightarrow 30^\circ.$$

5. Cataluña, junio 2013

Dados los puntos $P = (1, 0, -1)$ y $Q = (-1, 2, 3)$, encuentre un punto R de la recta $r: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+4}{3} = \dfrac{z-3}{-1}$ que cumpla que el triángulo de vértices P, Q y R es isósceles, siendo $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{QR}$ los lados iguales del triangulo. [2 puntos]

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de r son: $r \equiv \begin{cases} x = -3+2t \\ y = -4+3t \\ z = 3-t \end{cases}$.

Un punto genérico R de r es: $R(-3+2t, -4+3t, 3+t)$.

Los lados vienen determinados por los vectores:

$$\overrightarrow{PR} = (-3+2t, -4+3t, 3-t) - (1, 0, -1) = (-4+2t, -4+3t, 4-t)$$

$$\overrightarrow{QR} = (-3+2t, -4+3t, 3-t) - (-1, 2, 3) = (-2+2t, -6+3t, -t)$$

Si el triángulo es isósceles, entonces: $\left|\overrightarrow{PR}\right| = \left|\overrightarrow{QR}\right|$

$$\sqrt{(-4+2t)^2 + (-4+3t)^2 + (4-t)^2} = \sqrt{(-2+2t)^2 + (-6+3t)^2 + (-t)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-4+2t)^2 + (-4+3t)^2 + (4-t)^2 = (-2+2t)^2 + (-6+3t)^2 + (-t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 - 16t + 4t^2 + 16 - 24t + 9t^2 + 16 - 8t + t^2 = 4 - 8t + 4t^2 + 36 - 36t + 9t^2 + t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4t - 8 = 0 \Rightarrow t = 2.$$

El punto buscado es: $R(1, 2, 1)$.

6. Cataluña, junio 2013

Un triángulo de área 3/2 tiene dos de sus vértices en los puntos $P = (0, 0, 0)$ y $Q = (2, 0, 1)$. El tercer vértice, R, es un punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ y=1 \end{cases}$, y tiene la primera coordenada no nula. Calcule las coordenadas del vértice R. [2 puntos]

Solución:

Ecuaciones paramétricas de r:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x = -y-z \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1-t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}.$$

Un punto genérico R de r es: $R(-1-t, 1, t)$.

El área del triángulo de vértices P, Q y R viene dada por: $S = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ}\right|$

En este caso:

$\overrightarrow{PR} = (-1-t, 1, t)$; $\overrightarrow{PQ} = (2, 0, 1)$.

Luego

$$\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -1-t & 1 & t \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,\ 1+3t,\ -2) \Rightarrow S = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + (1+3t)^2 + (-2)^2}$$

Como se desea que esta superficie valga 3/2 $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}\sqrt{1^2+(1+3t)^2+(-2)^2}=\frac{3}{2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow 1+1+6t+9t^2+4=9 \Rightarrow 9t^2+6t-3=0 \Rightarrow t=\frac{-6\pm\sqrt{36+108}}{18}=\frac{-6\pm 12}{18}=\begin{cases}-1\\ 1/3\end{cases}$$

Por tanto, el vértice puede ser: $R(0,1,-1)$ o $R'(-4/3,1,1/3)$.
Como se pide que la primera coordenada no sea nula, el punto buscado es $R'(-4/3,1,1/3)$.

7. Valencia, junio 2013.
Sean $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, 0)$ y $C = (0, 2, 3)$. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) El área del triángulo de vértices *O*, *A y B*, (3 *puntos*) y el volumen del tetraedro de vértices *O*, *A*, *B y C*. (2 *puntos*).
b) La distancia del vértice *C* al plano que contiene al triángulo *OAB*. (3 *puntos*).
c) La distancia del punto *C´* al plano que contiene al triángulo *OAB*, siendo *C'* el punto medio del segmento de extremos *O* y *C*. (2 *puntos*).
Solución:

a) El área del triángulo de vértices *O*, *A* y *B* viene dada por: $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|$

En este caso:

$$\overrightarrow{OA}=(1,\,0,\,1);\ \overrightarrow{OB}=(2,\,1,\,0)\Rightarrow \overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=(-1,\,2,\,1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\ \text{u}^2.$$

El volumen del tetraedro de vértices *O*, *A*, *B y C* viene dado por $V_T=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right|$.

Luego, $V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}|3+4|=\frac{7}{6}\ \text{u}^3.$

b) Plano que contiene a *OAB*: es el determinado por el punto *O* y los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

$$\pi\equiv\begin{cases}x=t+2h\\ y=\quad h\\ z=t\end{cases}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix}x & 1 & 2\\ y & 0 & 1\\ z & 1 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow \pi\equiv -x+2y+z=0.$$

La distancia pedida es:

$$d\left(C'(0,2,3),\pi\equiv -x+2y+z=0\right)=\left|\frac{0+4+3}{\sqrt{1+4+1}}\right|=\frac{7}{\sqrt{6}}.$$

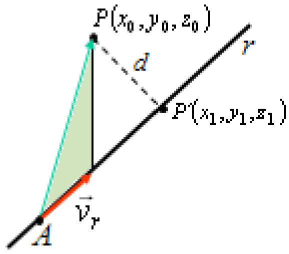
c) El punto medio de *O* y *C* es: $C'=\left(\frac{0}{2},\,\frac{2}{2},\,\frac{3}{2}\right)=\left(0,\,1,\,\frac{3}{2}\right)$.

Luego: $d\left(C'(0,1,3/2),\pi\equiv -x+2y+z=0\right)=\left|\frac{0+2+3/2}{\sqrt{6}}\right|=\frac{7/2}{\sqrt{6}}=\frac{7}{2\sqrt{6}}$.

8. Valencia, junio 2013.
Dados los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, -1, 0)$, $C = (0, 1, 1)$ y $P = (0, -3, 2)$, se pide calcular razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) La distancia del punto P al punto A. (2 *puntos*)
b) La distancia del punto P a la recta que pasa por los puntos A y B. (4 *puntos*)
c) La distancia del punto P al plano que pasa por los puntos A, B y C. (4 *puntos*)
Solución:
a) $d(P,A) = \sqrt{(0-1)^2 + (-3-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{11}$.

b) El vector de dirección es $\vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (2, -1, 0) - (1, 0, 1) = (1, -1, -1)$.

La ecuación de la recta A–B será: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = \ \ -t \\ z = 1 - t \end{cases}$.



La distancia del un punto P a la recta r es:

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}$$, siendo $A \in s$.

En este caso:
$A = (1, 0, 1)$, $P = (0, -3, 2)$, $\overrightarrow{AP} = (-1, -3, 1)$, $\vec{v}_r = (1, -1, -1)$.

El producto vectorial vale:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (4, 0, 4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_s\right| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}.$$

El módulo de $\vec{v}_r$: $\left|\vec{v}_r\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-)^2} = \sqrt{3}$.
Por tanto:

$$d(P,r) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

c) Plano que contiene los puntos A, B y C: es el determinado por el punto A y los vectores $\overrightarrow{AB} = (1, -1, -1)$ y $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1) - (1, 0, 1) = (-1, 1, 0)$.
Su ecuación es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + t - h \\ y = -t + h \\ z = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y & -1 & 1 \\ z-1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv (x-1) + y = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y - 1 = 0.$$

Luego:

$$d\left(P(0,-3,2), \pi \equiv x + y - 1 = 0\right) = \left|\frac{-3-1}{\sqrt{1+1}}\right| = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

<u>**9**. Extremadura, junio 2013.</u>
Sean en $\mathbf{R}^3$ los vectores $\vec{e}$ = (2, 0, 0), $\vec{u}$ = (1, 0, –1) y $\vec{v}$ = (–2, 3, –2).
a) Calcula el producto vectorial $\vec{e} \times \vec{u}$.
b) Calcula el seno del ángulo θ que forman $\vec{e}$ y $\vec{u}$.
b) Calcula el ángulo ϕ que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
<u>Solución</u>:

a) $\vec{e} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (0, 2, 0)$.

b) $\cos(\vec{e}, \vec{u}) = \cos\theta = \dfrac{\vec{e}\cdot\vec{u}}{|\vec{e}||\vec{u}|} = \dfrac{(2, 0, 0)\cdot(1, 0, -1)}{\sqrt{2^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^{\circ}$.

Por tanto, sen θ = $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{(1, 0, -1)\cdot(-2, 3, -2)}{\sqrt{1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+3^2+(-2)^2}} = \dfrac{0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}} = 0 \Rightarrow \phi = 90^{\circ}$

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares.

<u>**10**. Extremadura, junio 2013.</u>
a) Calcula las ecuaciones implícitas de la recta *r* que pasa por el punto *P* = (1, –1, 0) y es paralela a los planos $\pi_1 \equiv x + y = 2$ y $\pi_2 \equiv x - y + z = 1$.
b) Calcula también las ecuaciones paramétricas de *r* y un vector director de *r*.
<u>Solución</u>:
a) La recta pedida viene determinada por los planos paralelos a los dados y que pasan por *P*.
Las ecuaciones de esos planos son:
–Plano paralelo a $\pi_1 \equiv x + y = 2$ que pasa por *P* = (1, –1, 0): $\pi_1 \equiv (x-1) + (y+1) = 0$.
–Plano paralelo a $\pi_2 \equiv x - y + z = 1$ que pasa por *P* = (1, –1, 0): $\pi_2 \equiv (x-1) - (y+1) + z = 0$.

La recta pedida es:

$$r \equiv \begin{cases} (x-1)+(y+1)=0 \\ (x-1)-(y+1)+z=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}.$$

b) Las ecuaciones paramétricas de *r* se obtienen resolviendo el sistema anterior.

$$r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x=-y \\ z=2-x+y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-y \\ z=2+2y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-\lambda \\ y=\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases}.$$

Un vector director de *r* es: $\vec{v}_r$ = (–1, 1, 2).

<u>**11**. Canarias, junio 2013.</u>

Dada la recta: $r:\begin{cases} x-2y+z=0 \\ -x+2y+z=2 \end{cases}$ y el punto $P\,(1, 0, 1)$ exterior a r.

a) Halla la ecuación en forma general del plano π que contiene a r y P. (1,25 puntos)
b) Halla la ecuación (como intersección de dos planos) de la recta s que pasa por P y es paralela a la recta r. (1,25 puntos)

<u>Solución</u>:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r son: $r\equiv\begin{cases} x=-1+2t \\ y=\quad\ t \\ z=1 \end{cases}$; $A(-1, 0, 1)\in r$.

El vector ***AP*** está contenido en el plano: ***AP*** = (1, 0, 1) – (–1, 0, 1) = (2, 0, 0).

La ecuación del plano pedido es: $\pi\equiv\begin{cases} x=-1+2t+2h \\ y=\quad t \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x+1 & 2 & 2 \\ y & 1 & 0 \\ z-1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow z-1=0$.

<u>De otra forma</u>: El plano pedido pertenece al haz: $x-2y+z+k(-x+2y+z-2)=0$.

Por pasar por P: $2+k(-2)=0 \Rightarrow k=1$. Luego: $\pi\equiv z-1=0$.

b) La recta s vendrá determinada por los planos paralelos a los dados y que pasan por P.
Las ecuaciones de esos planos son:
–Plano paralelo a $\pi_1\equiv x-2y+z=0$ que pasa por $P=(1, 0, 1)$: $\pi_1\equiv(x-1)-2y+(z-1)=0$.
–Plano paralelo a $\pi_2\equiv -x+2y+z=2$ que pasa por P: $\pi_2\equiv-(x-1)+2y+(z-1)=0$.

La recta s es:

$$s\equiv\begin{cases} (x-1)-2y+(z-1)=0 \\ -(x-1)+2y+(z-1)=0 \end{cases} \Rightarrow s\equiv\begin{cases} x-2y+z=2 \\ -x+2y+z=0 \end{cases}.$$

<u>**12**. Canarias, junio 2013.</u>

Dada la recta: $r:\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$ y los puntos $P\,(1, -2, 0)$ y $Q(0, 1, 3)$.

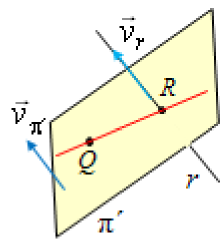
a) Halla la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a PQ. (1,25 puntos)
b) Halla la ecuación de la recta s perpendicular a r que pasa por Q e intersecta a r. (1,25 puntos)

<u>Solución</u>:

Ecuaciones paramétricas de r: $r:\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow r:\begin{cases} 2y=x+z \to 2y=2z \\ x=z \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$

a) El plano buscado viene determinado por la recta r y por el vector ***PQ***.
PQ = (0, 1, 3) – (1, –2, 0) = (–1, 3, 3).

Su ecuación es: $\pi\equiv\begin{cases} x=t-h \\ y=t+3h \\ z=t+3h \end{cases} \Leftrightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 1 & 3 \\ z & 1 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi\equiv-4y+4z=0 \Rightarrow \pi\equiv y-z=0$



b) La recta s está contenida en el plano π', perpendicular a r que pasa por Q. Además, debe pasar por el punto de corte de la recta y el plano.
El plano π' tiene por vector normal $\vec{v}_{\pi'} = \vec{v}_r = (1, 1, 1)$. Su ecuación es:

$$\pi' \equiv x + (y-1) + (z-3) = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x + y + z - 4 = 0$$

Punto de corte de r y π'.
Se sustituyen las ecuaciones de r en π':

$$t + t + t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{3} \Rightarrow R = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Por tanto, la recta s viene determinada por $\boldsymbol{RQ} = (0, 1, 3) - \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Su ecuación es: $s \equiv \begin{cases} x = -\frac{4}{3}t \\ y = 1 - \frac{1}{3}t \\ z = 3 + \frac{5}{3}t \end{cases} \Leftrightarrow s \equiv \begin{cases} x = -4\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 + 5\lambda \end{cases}$.

13. La Rioja, junio 2013.

Encuentra un valor de $0 \neq a$ para que las retas $\begin{cases} x + y - 5z = -3 \\ -2x + z = 1 \end{cases}$ y $x + 1 = \frac{y-3}{a} = \frac{z}{2}$ sean paralelas. Para el valor de a que has encontrado, calcula la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

Solución:
Dos rectas son paralelas cuando lo son sus vectores de dirección.
Expresadas en forma paramétricas esas ecuaciones son:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 5z = -3 \\ -2x + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} y = -3 - x + 5z \\ z = 1 + 2x \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} y = 2 + 9x \\ z = 1 + 2x \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2 + 9t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \rightarrow$$

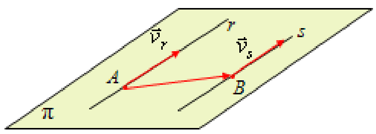
$$\rightarrow \vec{v}_r = (1, 9, 2).$$

$$s \equiv x + 1 = \frac{y-3}{a} = \frac{z}{2} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -1 + h \\ y = 3 + ah \\ z = 2h \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (1, a, 2).$$

Los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son paralelos cuando $a = 9$.

El plano que contiene a ambas rectas viene determinado por el punto $A \in r$ y los vectores $\vec{v}_r$ y $\boldsymbol{AB}$, siendo $B \in s$.

$A = (0, 2, 1)$; $B = (-1, 3, 0)$; $\vec{v}_r = (1, 9, 2)$; $\boldsymbol{AB} = (-1, 1, -1)$.



Por tanto:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = t - q \\ y = 2 + 9t + q \\ z = 1 + 2t - q \end{cases} \Leftrightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y-2 & 9 & 1 \\ z-1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -11x - (y-2) + 10(z-1) = 0 \Rightarrow$$

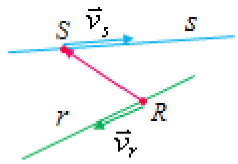
$$\Rightarrow \pi \equiv -11x - y + 10z - 8 = 0$$

Observación: Como el vector $\boldsymbol{AB} = (-1, 1, -1)$ es independiente de $\vec{v}_r$ se confirma que las retas son paralelas: que no son coincidentes.

14. Madrid, junio 2013.

Dados el punto $P(-1, 0, 2)$ y las rectas: $r \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{cases}$, se pide:

a) (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s.
b) (1 punto) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y corta a r y s.
c) (1 punto) Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s.
Solución:



a) Si R un punto de r y S un punto de s, la posición relativa de las rectas r y s se determina estudiando la dependencia lineal de los vectores: $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\mathbf{RS}$.

Ecuaciones paramétricas de r:

$$r \equiv \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + z \\ y = -1 + z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, 1);\ R = (1, -1, 0)$$

De $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s = (1, 1, 0);\ S = (1, 0, 3).$

Por tanto: $\mathbf{RS} = (1, 0, 3) - (1, -1, 0) = (0, 1, 3)$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 \neq 0$, los vectores son linealmente independientes. Luego, las rectas r y s se cruzan.

b) La recta pedida será la intersección de dos planos: π_1, que pasa por P y contiene a r, y π_2, que pasa por P y contiene a s.
El plano π_1 viene dado por P, $\vec{v}_r = (1, 1, 1)$ y $\mathbf{RP} = (-1, 0, 2) - (1, -1, 0) = (-2, 1, 2)$.
Su ecuación es:

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 1 & -2 \\ y & 1 & 1 \\ z-2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x + 1 - 4y + 3(z - 2) = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x - 4y + 3z - 5 = 0.$$

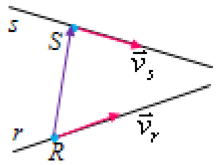
El plano π_2 viene dado por P, $\vec{v}_s = (1, 1, 0)$ y $\mathbf{SP} = (-1, 0, 2) - (1, 0, 3) = (-2, 0, -1)$.
Su ecuación es:

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 1 & -2 \\ y & 1 & 0 \\ z-2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv -x - 1 + y + 2(z - 2) = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv -x + y + 2z - 5 = 0.$$

Por tanto, la recta pedida es:

$$m \equiv \begin{cases} x - 4y + 3z - 5 = 0 \\ -x + y + 2z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow m \equiv \begin{matrix} \\ E2 + E1 \end{matrix} \begin{cases} x - 4y + 3z - 5 = 0 \\ -3y + 5z - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow m \equiv \begin{cases} x = -1 + 11t \\ y = 5t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

c) Se toman dos puntos genéricos, uno de cada una de las rectas dadas, $R \in r$ y $S \in s$, y se impone la condición de que el vector ***RS*** (o ***SR***) sea perpendicular a los de dirección de las rectas, $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$.



Se obtiene así el sistema: $\begin{cases} \overrightarrow{RS}\cdot\vec{v}_r = 0 \\ \overrightarrow{RS}\cdot\vec{v}_s = 0 \end{cases}$.

Se resuelve el sistema para obtener los puntos R y S concretos.
La recta p queda definida por el punto R (o S) y el vector ***RS***.

$R = (1 + t, -1 + t, t)$, $S = (1 + \lambda, \lambda, 3) \Rightarrow \boldsymbol{RS} = (\lambda - t, \lambda - t + 1, 3 - t)$

$\boldsymbol{RS} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow 2\lambda - 3t + 4 = 0$

$\boldsymbol{RS} \cdot \vec{v}_s = 0 \Rightarrow 2\lambda - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 3;\ \lambda = \dfrac{5}{2}$

Con esto:

$$R = (4, 2, 3);\ S = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 3\right) \Rightarrow \boldsymbol{RS} = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \equiv (-1, 1, 0).$$

La recta perpendicular común, que pasa por R y lleva la dirección de ***RS*** es:

$$p: \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases}$$

<u>**15**. Madrid, junio 2013.</u>

a) (1 punto) Hallar los puntos de corte de la recta de dirección (2, 1, 1) y que pasa por el punto $P(4, 6, 2)$, con la superficie esférica de centro $C(1, 2, -1)$ y radio $\sqrt{26}$.

b) (1 punto) Hallar la distancia del punto $Q(-2, 1, 0)$ a la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = y + 2 = \dfrac{z-3}{2}$.

<u>Solución</u>:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta son: $r \equiv \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 6 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

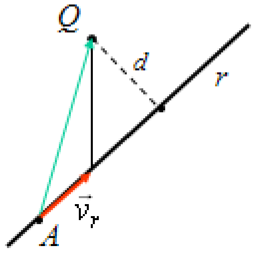
La ecuación de la esfera: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 26$.

Los puntos de corte se obtienen sustituyendo las ecuaciones de la recta en la de la esfera.

$(4 + 2t - 1)^2 + (6 + t - 2)^2 + (2 + t + 1)^2 = 26 \Rightarrow 6t^2 + 26t + 8 = 0 \Rightarrow t = -4;\ t = -1/3$

Sustituyendo en r se obtienen los puntos: $P_1(-4, 2, -2)$ y $P_2(10/3, 17/3, 5/3)$.

b) La ecuación de la distancia de un punto Q a una recta r es:



$$d(Q, r) = \frac{\left|\overrightarrow{AQ} \times \vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|},\ \text{siendo } A \in r.$$

En este caso:

$A = (1, -2, 3)$, $Q = (-2, 1, 0)$,

$\overrightarrow{AQ} = (-2, 1, 0) - (1, -2, 3) = (-3, 3, -3)$;

$\vec{v}_r = (2, 1, 2)$

El producto vectorial vale:

$$\overrightarrow{AQ}\times\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (9,\ 0, -9) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AQ}\times\vec{v}_r\right| = \sqrt{9^2+(-9)^2} = 9\sqrt{2}$$

El módulo de $\vec{v}_r$: $|\vec{v}_r| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = 3$.

Luego $d(Q,r) = \dfrac{9\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{2}$.

<u>**16**. Madrid, junio 2013.</u>

Dados el punto $P(1, 0, -1)$, el plano $\pi \equiv 2x - y + z + 1 = 0$, y la recta $r \equiv \begin{cases} -2x + y - 1 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0 \end{cases}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar la ecuación del plano que pasa por P, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π.

b) (0,5 puntos) Hallar el ángulo entre r y π.

<u>Solución</u>:

a) El plano pedido viene determinado por el punto P y los vectores $\vec{v}_\pi$, normal al plano π, y $\vec{v}_r$, de dirección de la recta r.

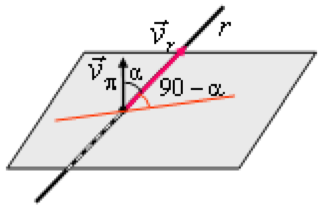
Se expresa r en sus ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} -2x + y - 1 = 0 \\ 3x - z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} y = 1 + 2x \\ z = -3 + 3z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3 + 3t \end{cases}.$$

Como $P(1, 0, -1)$, $\vec{v}_\pi = (2, -1, 1)$ y $\vec{v}_r = (1, 2, 3)$, el plano pedido es:

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y & -1 & 2 \\ z+1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi' \equiv -5(x-1) - 5y + 5(z+1) = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x + y - z - 2 = 0.$$

b) El ángulo que forma una recta con un plano es el complementario del que determinan los vectores $\vec{v}_r$, de dirección de la recta, con $\vec{v}_\pi$, normal al plano.



Por tanto, el seno del ángulo (r, π),

$$\text{sen}\ (r, \pi) = \cos(\vec{v}_\pi,\ \vec{v}_r) = \frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|}.$$

Como: $\vec{v}_r = (1, 2, 3)$ y $\vec{v}_\pi = (2, -1, 1) \Rightarrow \cos(\vec{v}_\pi,\ \vec{v}_r) = \dfrac{2-2+3}{\sqrt{1+4+9}\cdot\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{3}{2\sqrt{21}}$.

Como $\arccos\dfrac{3}{2\sqrt{21}} = 70{,}89^\circ \Rightarrow$ El ángulo pedido vale $90^\circ - 70{,}89^\circ = 19{,}11^\circ$.

<u>17. Madrid, septiembre 2013.</u>

Dados los puntos $A(2, -2, 1)$, $B(0, 1, -2)$, $C(-2, 0, -4)$, $D(2, -6, 2)$, se pide:

a) (1 punto) Probar que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y hallar la distancia entre los dos lados paralelos.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo ABC.

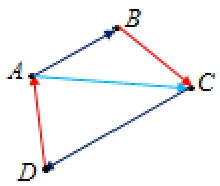
<u>Solución</u>:

a) Los vectores que determinan los lados son:

$\mathbf{AB} = (0, 1, -2) - (2, -2, 1) = (-2, 3, -3)$; $\mathbf{BC} = (-2, 0, -4) - (0, 1, -2) = ((-2, -1, -2)$;

$\mathbf{CD} = (2, -6, 2) - (-2, 0, -4) = (4, -6, 6)$; $\mathbf{DA} = (2, -2, 1) - (2, -6, 2) = (0, 4, -1)$.

Como $\mathbf{CD} = -2\mathbf{AB}$ se deduce que los lados AB y CD son paralelos; y el cuadrilátero es, efectivamente, un trapecio.



La distancia entre los lados paralelos es igual a la distancia desde el punto A a la recta que pasa por los puntos C y D.

Ecuación de la recta CD:

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = -4 + 6t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (4, -6, 6);\ |\vec{v}_r| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 6^2} = \sqrt{88}$$

$$\overrightarrow{AD} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 4 & -6 & 6 \end{vmatrix} = (-18, 4, 16) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AD} \times \vec{v}_r\right| = \sqrt{(-18)^2 + 4^2 + 16^2} = \sqrt{596}$$

$$d(A, r) = \frac{\left|\overrightarrow{AD} \times \vec{v}_r\right|}{|\vec{v}_r|} \Rightarrow d(A, r) = \frac{\sqrt{596}}{\sqrt{88}} = \sqrt{\frac{149}{22}}.$$

b) El área del triángulo ABC es $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| \Rightarrow$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -2 & 3 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left|(-9, 2, 8)\right| \Rightarrow S = \frac{1}{2}\sqrt{(-9)^2 + 2^2 + 8^2} = \frac{1}{2}\sqrt{149}.$$

<u>18. Madrid, septiembre 2013.</u>

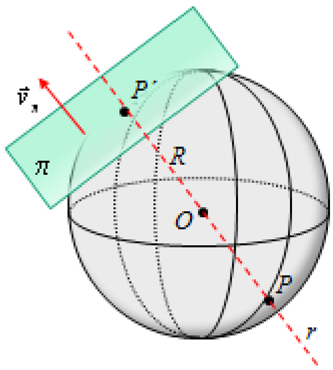
Dados el punto $P(1, 2, -1)$ y el plano $\pi \equiv x + 2y - 2z + 2 = 0$, sea S la esfera que es tangente al plano π en el punto P' de modo que el segmento PP' es uno de sus diámetros. Se pide:

a) (1 punto) Hallar el punto de tangencia P'.

b) (1 punto) Hallar la ecuación de S.

<u>Solución</u>:

La situación es la que se muestra en la figura adjunta.



El diámetro de la esfera es igual a la distancia entre los puntos P y P', que es igual a la distancia de P al plano. (Recuérdese que el plano tangente es perpendicular al radio correspondiente en el punto de tangencia y, por ende, al diámetro que contiene a dicho radio).

$$d(P,\ \pi) = \frac{1 + 4 + 2 + 2}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3 \Rightarrow R = 3/2.$$

El punto P′ es el de corte de la recta, r, que contiene al diámetro, con el plano π.
La recta r queda definida por el punto P y por el vector $\vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (1, 2, -2)$.

Sus ecuaciones son: $r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+3t \\ z = -1-2t \end{cases}$.

Sustituyendo esas ecuaciones en la del plano se obtiene P'.

$1+t+2(2+2t)-2(-1-2t)+2=0 \Rightarrow 9t+9=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow P' = (0, 0, 1)$.

El centro de la esfera es el punto medio entre P y P': $O = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$.

Por tanto, la ecuación de la esfera es: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$.

<u>**19**. Madrid, junio 2013.</u>

Sean r_A la recta con vector dirección $(1, \lambda, 2)$ que pasa por el punto $A(1, 2, 1)$, r_B la recta con vector dirección $(1, 1, 1)$ que pasa por $B(1, -2, 3)$, y r_C la recta con vector dirección $(1, 1, -2)$ que pasa por $C(4, 1, -3)$,

a) (1 punto) Hallar λ para que las rectas r_A y r_B se corten.

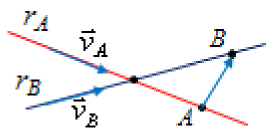
b) (1,5 punto) Hallar λ para que la recta r_A sea paralela al plano definido por r_B y r_C.

c) (0,5 puntos) Hallar el ángulo que forman r_B y r_C.

<u>Solución</u>:

Ecuaciones de las rectas:

$$r_A \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+\lambda t \\ z = 1+2t \end{cases}; \quad r_B \equiv \begin{cases} x = 1+h \\ y = -2+h \\ z = 3+h \end{cases}; \quad r_C \equiv \begin{cases} x = 4+p \\ y = 1+p \\ z = -3-2p \end{cases}$$



a) Las rectas r_A y r_B se cortan si los vectores ***AB***, $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$ son linealmente dependientes.

$AB = (1, -2, 3) - (1, 2, 1) = (0, -4, 2)$; $\vec{v}_A = (1, \lambda, 2)$; $\vec{v}_B = (1, 1, 1)$.

Son linealmente dependientes si $\begin{vmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2-2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$.

b) El plano definido por las rectas r_B y r_C viene determinado por el punto B y por los vectores $\vec{v}_B$ y $\vec{v}_C$. Su ecuación es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1+h+p \\ y = -2+h+p \\ z = 3+h-2p \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y+2 & 1 & 1 \\ z-3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -3(x-1)+3(y+2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv x-y-3=0.$$

c) $\cos\theta = \cos(\vec{v}_B, \vec{v}_C) = \frac{\vec{v}_B \cdot \vec{v}_C}{|\vec{v}_B||\vec{v}_C|} = \frac{(1, 1, 1)\cdot(1, 1, -2)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{0}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow \theta = 0º$.

20. Asturias, junio 13.
Halle los planos que pasando por $A(0, 2, 0)$ y $B(0, 0, 2)$, corten al eje OX en un punto C tal que el área del triángulo de vértices A, B y C sea 6. (2,5 puntos)
Solución:
Los planos deben ser del haz determinado por la recta AB. Esta recta queda definida por el punto A y por el vector $\boldsymbol{AB} = (0, 0, 2) - (0, 2, 0) = (0, -2, 2)$.

Su ecuación es: $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = -2t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$ → Para la obtención de la segunda ecuación se ha sustituido $2t = -y$ en $z = 2 + 2t$.

La ecuación del haz de planos es: $x + k(y + z - 2) = 0$.
Estos planos cortan al eje OX cuando $y = 0$ y $z = 0 \Rightarrow x - 2k = 0 \Rightarrow x = 2k$.
Por tanto, el punto de corte es $C(2k, 0, 0)$.

El área del triángulo de vértices A, B y C viene dada por: $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$

En este caso:
$\boldsymbol{AB} = (0, -2, 2)$ y $\boldsymbol{AC} = (2k, 0, 0) - (0, 2, 0) = (2k, -2, 0)$

Luego
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2k & -2 & 0 \end{vmatrix} = (4,\ 4k,\ 4k) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{16 + 16k^2 + 16k^2} = 4\sqrt{1 + 2k^2}$$

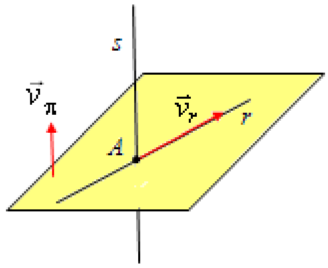
Como se desea que $S = 6$, se tendrá: $\frac{4\sqrt{1+2k^2}}{2} = 6 \Rightarrow \sqrt{1 + 2k^2} = 3 \Rightarrow k = \pm 2$.
En consecuencia, los puntos son: $C_1(4, 0, 0)$ y $C_2(-4, 0, 0)$.

Las ecuaciones de los planos pedidos se obtienen sustituyendo los valores de k hallados en la ecuación del haz de planos.
Para $k = 2$: $x + k(y + z - 2) = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x + 2(y + z - 2) = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x + 2y + 2z - 4 = 0$
Para $k = -2$: $x + k(y + z - 2) = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x - 2(y + z - 2) = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x - 2y - 2z + 4 = 0$

21. Asturias, junio 13.

Considere el plano $\pi : x + y - z = 0$ y la recta $r : \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y - z = 0 \end{matrix}\right\}$.
a) Halle la posición relativa de la recta y el plano. (1 punto)
b) Encuentre una recta perpendicular a ambos. (1 punto)
c) Busque la mínima distancia entre la recta y el plano dados. (0,5 puntos)
Solución:
a) Sustituyendo las ecuaciones de la recta en la del plano se obtiene:
$0 + 0 = 0$ → La ecuación del plano se cumple para todos los punto de la recta, luego la recta está contenida en el plano.

b) En este caso, una recta perpendicular al plano y a la recta dados es cualquier recta perpendicular al plano y que pase por un punto de r.
Si se toma $A(0, 0, 0) \in r$, como $\vec{v}_\pi = (1, 1, -1)$, la ecuación de dicha perpendicular es $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$.



c) Como r está contenida en π, la distancia mínima entre ambos es 0.

22. Asturias, junio 13.
Sean el punto $P(-1, 2, 0)$ y el plano $\pi: 2x - 3y + z = 8$.
Calcule:
a) Las ecuaciones de una recta que pase por el punto P y sea perpendicular al plano π. (0,5 puntos)
b) La distancia d del punto P al plano π. (0,5 puntos)
c) La ecuación de otro plano, paralelo a π y distinto de él, que diste de P la misma distancia d. (1,5 puntos)

Solución:
a) El vector de dirección de la recta perpendicular a un plano es $\vec{v}_\pi = (2, -3, 1)$, el vector normal al plano. Como debe pasar por $P(-1, 2, 0)$, las ecuaciones de la recta pedida son:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

b) $d\left(P(-1,2,0), \pi: 2x - 3y + z - 8 = 0\right) = \left|\dfrac{2\cdot(-1) - 3\cdot 2 + 0 - 8}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}}\right| = \dfrac{16}{\sqrt{14}}$.

c) Los planos paralelos a π tienen el mismo vector normal, $\vec{v}_\pi = (2, -3, 1)$. Su ecuación general será $\pi': 2x - 3y + z + k = 0$.

Como de desea que $d\left(P(-1,2,0), \pi': 2x - 3y + z + k = 0\right) = \left|\dfrac{2\cdot(-1) - 3\cdot 2 + k}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}}\right| = \dfrac{16}{\sqrt{14}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|\frac{8 + k}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}}\right| = \frac{16}{\sqrt{14}} \Rightarrow |8 + k| = 16 \Rightarrow k = 8;\ k = -24.$$

Por tanto, el plano pedido es: $\pi': 2x - 3y + z - 24 = 0$

<u>**23**. Asturias, junio 13.</u>
Se consideran los puntos en el espacio $A(1, -1, 1)$ y $B(2, 2,2)$.
a) Halle el punto medio de A y B. (0,5 puntos)
b) Dé la ecuación del plano respecto al cual A y B son puntos simétricos. (2 puntos)
<u>Solución</u>:
a) El punto medio es: $M\left(\frac{1+2}{2}, \frac{-1+2}{2}, \frac{1+2}{2}\right) \to M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

b) El plano pedido es el mediador de A y B. Es el que pasa por M y tiene por vector característico a $\boldsymbol{AB}$.
$\boldsymbol{AB} = (2, 2, 2) - (1, -1, 1) = (1, 3, 1)$
Su ecuación es: $\pi \equiv 1\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)+3\left(y-\frac{1}{2}\right)+1\cdot\left(z-\frac{3}{2}\right)=0 \Rightarrow \pi \equiv 2x+6y+2z-9=0$

<u>**24**. País Vasco, junio 13.</u>
Considera la recta definida por $\frac{x-2}{a}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{2}$ y el plano $2x-y+bz=0$.
Determina los valores de a y b en los siguientes casos:
a) La recta r es perpendicular al plano.
b) La recta r está contenida en el plano.
<u>Solución</u>:
a) La recta y el plano son perpendiculares cuando el vector de dirección de la recta, $\vec{v}_r$, y el normal del plano, $\vec{v}_\pi$, son paralelos. Esto es: $\vec{v}_r = k \cdot \vec{v}_\pi$.
En este caso:
$\vec{v}_r = (a, 4, 2)$ y $\vec{v}_\pi = (2, -1, b)$.

$$\vec{v}_r = k \cdot \vec{v}_\pi \Rightarrow (a, 4, 2) = k \cdot (2, -1, b) = (2k, -k, kb) \Rightarrow \begin{cases} a = 2k \\ 4 = -k \\ 2 = kb \end{cases} \Rightarrow k = -4.$$

Por tanto: $a = -8$; $b = -\frac{1}{2}$.

b) Las recta está contenida en el plano cuando el sistema que determinan es compatible indeterminado. Por tanto, las ecuaciones (paramétricas) de la recta deben satisfacer la del plano: en particular, dos puntos cualesquiera de la recta deben pertenecer al plano.

$$\frac{x-2}{a}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{2} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2+a\lambda \\ y = 1+4\lambda \\ z = -1+2\lambda \end{cases}.$$

Dos puntos de la recta son: $A(2, 1, -1)$, para $\lambda = 0$; $B(2 + a, 5, 1)$, para $\lambda = 1$.
Sustituyendo en $2x-y+bz=0$ se tiene:

$$\begin{cases} 2\cdot 2-1+b\cdot(-1)=0 \\ 2\cdot(2+a)-5+b=0 \end{cases} \Rightarrow b = 3;\ a = -1.$$

<u>**25**. País Vasco, junio 13.</u>

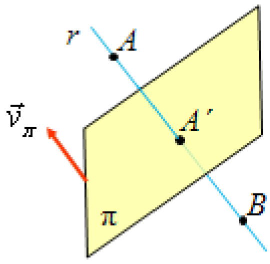
Sean A = (2, 1, 0) y π el plano de ecuación $2x+3y+4z=0$.

a) Halla el punto de π de mínima distancia al punto A y halla dicha distancia.

b) Encuentra el punto B simétrico de A respecto al plano π.

<u>Solución</u>:

a) El punto de π de mínima distancia al punto A es la proyección de A sobre π.
Ese punto, A', es el corte del plano con la recta perpendicular a π que pasa por A.
La dirección de la recta viene dada por el vector normal del plano, $\vec{v}_\pi$ = (2, 3, 4).



Por tanto: $r \equiv \begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = 1+3\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$.

Corte de r con π → $\pi: 2(2+2\lambda)+3(1+3\lambda)+4(4\lambda)=0 \Rightarrow 7+29\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-7/29$.

Luego, el punto A'= (44/29, 8/29, –28/29).

La distancia entre los puntos A y A'es:

$$d(A,A')=\sqrt{\left(2-\frac{44}{29}\right)^2+\left(1-\frac{8}{29}\right)^2+\left(0+\frac{28}{29}\right)^2}=\sqrt{\frac{1421}{841}}=\frac{7}{\sqrt{29}}$$

<u>Observación</u>: Más rápido es considerar que $d(A,A')=d(A,\pi)=\left|\frac{2\cdot 2+3\cdot 1+4\cdot 0}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}\right|=\frac{7}{\sqrt{29}}$.

b) Si el punto B es el simétrico de A respecto al plano π, entonces A' es el punto medio entre A y B.

Sea $B(x_0, y_0, z_0)$ ⇒ el punto medio de A y B será: $\left(\frac{2+x_0}{2}, \frac{1+y_0}{2}, \frac{z_0}{2}\right)$.

Como $A'=\left(\frac{44}{29}, \frac{8}{29}, -\frac{28}{29}\right)=\left(\frac{2+x_0}{2}, \frac{1+y_0}{2}, \frac{z_0}{2}\right)$, se tendrá:

$$\frac{44}{29}=\frac{2+x_0}{2} \Rightarrow x_0=\frac{30}{29};\ \frac{8}{29}=\frac{1+y_0}{2} \Rightarrow y_0=-\frac{13}{29};\ -\frac{28}{29}=\frac{z_0}{2} \Rightarrow z_0=\frac{-56}{29}.$$

Por tanto, $B=\left(\frac{30}{29}, \frac{-13}{29}, \frac{-56}{29}\right)$.

26. País Vasco, julio 13.

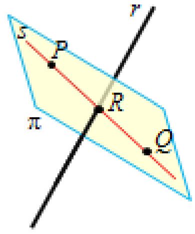
Dados el punto $P(1, 0, –2)$ y la recta r definida por $\begin{cases} 2x+y-4z=7 \\ 2x-y=5 \end{cases}$.

a) Determina la recta que corta a r, es perpendicular a r y pasa por el punto P.
b) Halla la distancia entre el punto P y su simétrico Q respecto de la recta r.

Solución:

a) La recta pedida, s, viene determinada por los puntos P y R, siendo P el dado, y R el de corte de r con el plano π, perpendicular a r que pasa por P.

Las ecuaciones paramétricas de r son:



$$r \equiv \begin{cases} 2x+y-4z=7 \\ 2x-y=5 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=-5+2t \\ z=-3+t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (1, 2, 1).$$

Plano π: (su vector normal es $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (1, 2, 1)$).

$$\pi \equiv 1\cdot(x-1)+2\cdot(y-0)+1\cdot(z+2)=0 \Rightarrow \pi \equiv x+2y+z+1=0.$$

Punto R, intersección de r y π. Se sustituyen las ecuaciones de la recta en la del plano:

$$t+2(-5+2t)+(-3+t)+1=0 \Rightarrow t=2 \Rightarrow R=(2, -1, -1).$$

La perpendicular pedida es la que pasa por los puntos P y R, viene determinada por P y el vector $\boldsymbol{PR}$ = (2, –1, –1) – (1, 0, –2) = (1, –1, 1).

Su ecuación es: $s \equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=-2+t \end{cases}$.

b) La distancia entre P y Q es el doble que la distancia entre P y R. (Por tanto, no es preciso calcular Q).

$$d(P,Q)=2d(P,R)=2\sqrt{(2-1)^2+(-1)^2+(-1+2)^2}=2\sqrt{3}.$$

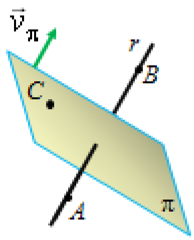
27. País Vasco, julio 13.

Se consideran los puntos A = (1, –1, 0) y B = (2, 0, 3).

a) ¿Es posible encontrar un plano que sea perpendicular a la recta que une A y B y que además pase por el punto C = (2, 2, 3)? En caso afirmativo halla la ecuación de dicho plano; en caso negativo, razonar la respuesta.

b) ¿Es posible encontrar una recta que pase por A, B y C? En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta; en caso negativo, razonar la respuesta.

Solución:



a) Sí. Es el plano que pasa por C y cuyo vector normal es $\boldsymbol{AB}$, el dirección de la recta.

$\boldsymbol{AB}$ = (2, 0, 3) – (1, –1, 0) = (1, 1, 3)

Por tanto, la ecuación del plano π es:

$$\pi \equiv 1\cdot(x-2)+1\cdot(y-2)+3\cdot(z-3)=0 \Rightarrow \pi \equiv x+y+3z-13=0.$$

b) Para que sea posible es necesario que los vectores $\boldsymbol{AB}$ y $\boldsymbol{AC}$ sean dependientes.

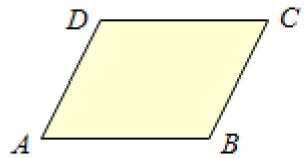
Como $\boldsymbol{AC}$ = (2, 2, 3) – (1, –1, 0) = (1, 3, 3) y $\boldsymbol{AB}$ = (1, 1, 3), resulta obvio que los vectores no son dependientes. En consecuencia, no hay una recta que pasa por los tres puntos.

28. Murcia, junio 2013.

Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son:
$A = (1, 3, -4)$, $B = (2, 6, 7)$ y $C = (5, -1, 2)$.

a) Calcula el área del paralelogramo.

b) Determina el cuarto vértice, D.



Solución:

a) El área del paralelogramo viene dada por $S = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$.

Como:

$\boldsymbol{AB} = (2, 6, 7) - (1, 3, -4) = (1, 3, 11)$ y $\boldsymbol{AC} = (5, -1, 2) - (1, 3, -4) = (4, -4, 6)$

se tiene:

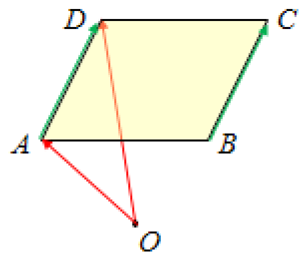
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 3 & 11 \\ 4 & -4 & 6 \end{vmatrix} = (62,\ 38,\ -16) \Rightarrow S = \sqrt{62^2 + 38^2 + (-16)^2} = \sqrt{5544}\ \text{u}^2.$$

b) Se cumple que $\boldsymbol{OD} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{AD} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{BC}$.

Como $\boldsymbol{BC} = (5, -1, 2) - (2, 6, 7) = (3, -7, -5) \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \boldsymbol{OD} = (1, 3, -4) + (3, -7, -5) = (4, -4, -9)$.

El vértices $D = (4, -4, -9)$.



29. Baleares, junio 2013.

Dado el punto $P(1, 1, 1)$ y el plano $\pi : x - y + z = 5$.

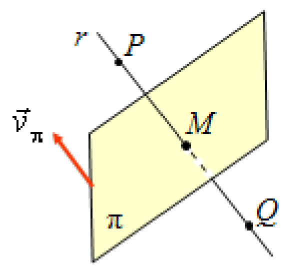
a) Calcula las ecuaciones continuas de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P.

b) Calcula el simétrico del punto P respecto del plano π.

Solución:

a) La recta pedida, r, viene determinada por los puntos P y por el vector, $\vec{v}_\pi = (1, -1, 1)$, normal al plano dado.

Sus ecuaciones continuas son: $r : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$.



b) Si el punto Q es el simétrico de P respecto al plano π, cumple dos cosas:

1) Está en la recta r, perpendicular a π por P.

2) El punto M, corte de r con π, es el punto medio entre P y Q.

La recta r, en paramétricas, es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Sustituyendo en la ecuación del plano:

$$\pi \equiv 1\cdot(1+t) - 1\cdot(1-t) + 1\cdot(1+t) = 5 \Rightarrow 3t = 4 \Rightarrow t = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{El punto } M = \left(\frac{7}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{7}{3}\right).$$

Si se supone que $Q = (x_0, y_0, z_0) \Rightarrow$ el punto medio de P y Q será: $\left(\dfrac{1+x_0}{2}, \dfrac{1+y_0}{2}, \dfrac{1+z_0}{2}\right)$.

Como $M=\left(\frac{7}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{7}{3}\right)=\left(\frac{1+x_0}{2}, \frac{1+y_0}{2}, \frac{1+z_0}{2}\right)$, se tendrá:

$$\frac{7}{3}=\frac{1+x_0}{2} \Rightarrow x_0=\frac{11}{3};\ \frac{-1}{3}=\frac{1+y_0}{2} \Rightarrow y_0=-\frac{5}{3};\ \frac{7}{3}=\frac{1+z_0}{2} \Rightarrow z_0=\frac{11}{3}.$$

Por tanto, $Q=\left(\frac{11}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{11}{3}\right)$.

<u>**30**. UNED, junio 2013.</u>

Determine el punto Q que es simétrico del punto $P = (–3, –2, 0)$ respecto al plano que determinan los puntos $A = (1, –2, –2)$, $B = (–1, –1, –1)$ y $C = (2, 0, 2)$.
Observación: El puno Q es la imagen especular del punto P supuesto que el plano fuera un espejo.

<u>Solución</u>:

El plano que contiene a los puntos A, B y C está determinado por el punto A, por ejemplo, y por los vectores $\boldsymbol{AB}$ y $\boldsymbol{AC}$.

$\boldsymbol{AB} = (–1, –1, –1) – (1, –2, –2) = (–2, 1, 1)$; $\boldsymbol{AC} = (2, 0, 2) – (1, –2, –2) = (1, 2, 4)$

Su ecuación es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ y+2 & 1 & 2 \\ z+2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi \equiv 2(x-1)+9(y+2)-5(z+2)=0 \Rightarrow \pi \equiv 2x+9y-5z+6=0.$$

Sea $Q = (x_0, y_0, z_0)$ el simétrico de $P = (–3, –2, 0)$ respecto de π.
Ambos puntos, P y Q estarán en la recta r, perpendicular a π por P. Además, si M es el punto de corte de la recta y el plano, M debe ser el punto medio entre P y Q.

Como $v_\pi = (2, 9, –5)$, se deduce que $r \equiv \begin{cases} x=-3+2\lambda \\ y=-2+9\lambda \\ z=-5\lambda \end{cases}$

Corte de la recta r con el plano:

$\pi \equiv 2(–3 + 2\lambda) + 9(–2 + 9\lambda) – 5(–5\lambda) + 6 = 0 \Rightarrow 110\lambda – 10 = 0 \Rightarrow \lambda = 1/11$.

Por tanto, $M = (–31/11, –13/11, –5/11)$.

Punto medio de P y Q: $\left(\frac{-3+x_0}{2}, \frac{-2+y_0}{2}, \frac{z_0}{2}\right)$

Como $M=\left(\frac{-31}{11}, \frac{-13}{11}, \frac{-5}{11}\right)=\left(\frac{-3+x_0}{2}, \frac{-2+y_0}{2}, \frac{z_0}{2}\right) \Rightarrow$

$$\frac{-31}{11}=\frac{-3+x_0}{2} \Rightarrow x_0=-\frac{29}{11};\ \frac{-13}{11}=\frac{-2+y_0}{2} \Rightarrow y_0=-\frac{4}{11};\ \frac{-5}{11}=\frac{z_0}{2} \Rightarrow z_0=-\frac{10}{11}$$

Por tanto, $Q=\left(\frac{-29}{11}, \frac{-4}{11}, \frac{-10}{11}\right)$.

31. UNED, junio 2013.

Determine la ecuación general de tres planos, que son perpendiculares entre sí y tal que la intersección de dos de ellos es la recta $r \equiv \begin{cases} 3z - 3y - x + 5 = 0 \\ 3y - x - 3z - 4 = 0 \end{cases}$.

Solución:

Dos de los planos deben pertenecer al haz de planos determinado por la recta *r*.

$$r \equiv \begin{cases} 3z - 3y - x + 5 = 0 \\ 3y - x - 3z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x + 3y - 3z - 5 = 0 \\ x - 3y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

La ecuación de ese haz es:

$$x + 3y - 3z - 5 + k(x - 3y + 3z + 4) = 0 \Leftrightarrow (1+k)x + (3-3k)y + (-3+3k)z - 5 + 4k = 0 .$$

De esos infinitos planos, elegido uno, siempre hay otro plano, y solamente otro, que sea perpendicular al primero. Ese segundo plano se determinará imponiendo que su vector normal sea perpendicular al primero.

El vector normal, genérico, de esos planos es $\vec{v}_\pi = (1+k,\ 3-3k,\ -3+3k)$.

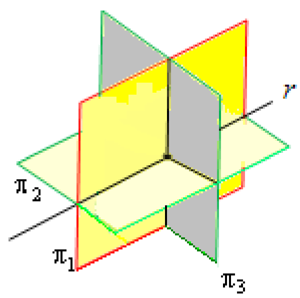
Si se da a k el valor 1, $k = 1$, se tiene el plano $\pi_1 \equiv 2x - 1 = 0$; con $\vec{v}_{\pi 1} = (2, 0, 0)$.

Si el vector normal del plano perpendicular buscado es $\vec{v}_\pi = (1+k,\ 3-3k,\ -3+3k) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (2, 0, 0)\cdot(1+k,\ 3-3k,\ -3+3k) = 0 \Rightarrow 2 + 2k = 0 \Rightarrow k = -1.$$

Para $k = -1$ se obtiene el segundo plano: $\pi_2 \equiv 6y - 6z - 9 = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv 2y - 2z - 3 = 0$.

El tercer plano buscado debe venir determinado por un vector normal, $\vec{v}_{\pi 3}$, que sea perpendicular común a $\vec{v}_{\pi 1} = (2, 0, 0)$ y $\vec{v}_{\pi 2} = (0, 2, -2)$. Por tanto, $\vec{v}_{\pi 3} = \vec{v}_{\pi 1} \times \vec{v}_{\pi 2}$.



$$\vec{v}_{\pi 1} \times \vec{v}_{\pi 2} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (0,\ 4,\ 4) \equiv (0, 1, 1).$$

En consecuencia, π_3 puede ser $\pi_3 \equiv y + z = 0$.