ALGUNOS PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD PROPUESTOS EN 2013

Matrices y determinantes

1. Aragón, junio 2013.
Determina el rango de la matriz *A*, que aparece a continuación, según los valores de *a*:

$$A=\begin{pmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

b) Determina, si existe, una matriz *A*, 2 × 2, que verifique la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el rango de la matriz *A*?
Solución:

a) $|A|=\begin{vmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{vmatrix}=40a+a(-20-4a-8)+6(-10+2a+4)=-4a^2+24a-36$

$\Rightarrow |A|=0$ si $-4a^2+24a-36=0 \Rightarrow a^2-6a+9=0 \Rightarrow a=3$.

Por tanto, $|A|\neq 0$ para cualquier valor de $a\neq 3$. En esos casos, el rango será 3.

Si $a=3$, $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix}$. Como el menor $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -5 & -10 \end{vmatrix}=20\neq 0$, su rango es 2.

b) Las matrices que multiplican a A, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son invertibles, pues sus determinante son distintos de 0: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$.

Sus inversas son: $B^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $C^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto:

$$B\cdot A\cdot C=\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A=B^{-1}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\cdot C^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -12 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}.$$

Como $|A|=\begin{vmatrix} -6 & -12 \\ 9 & 18 \end{vmatrix}=-108+108=0$, su rango es 1.

2. Castilla León, junio 2013.

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de *a* la matriz *A* es inversible?
b) Estudiar el rango según los valores de *a*.
c) Hallar *a* para que se cumpla $A^{-1}=\frac{1}{4}A$ que

Solución:

a) Para que sea inversible su determinante debe ser distinto de 0: $|A|\neq 0$.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=-2a^2 \to |A|\neq 0 \text{ para cualquier valor de } a\neq 0.$$

b) El rango es el orden del mayor menor no nulo.
Si $a \neq 0$, como $|A|\neq 0$ y *A* es de orden 3, su rango será también 3.

Si $a = 0$, la matriz es $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$ Su rango es 1: el determinante de *A* es 0, y todos los menores de orden 2 también son nulos.

c) $A^{-1}=\frac{1}{4}A \Rightarrow \frac{1}{4}A\cdot A=I \Rightarrow \frac{1}{4}\begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\begin{pmatrix} a^2 & -2a+4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2+a & a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & -2a+4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2+a & a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2=4 \\ -2a+4=0 \\ -2+a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\pm 2 \\ a=2 \\ a=2 \end{cases} \to \text{El valor de } a \text{ buscado es } a = 2.$$

3. Cataluña, junio 2013. (Serie 4)

Sea $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

a) ¿Qué significa que *B* sea la inversa de *A*?
b) Encuentre el valor del parámetro *p* para que la matriz inversa de *A* y la matriz traspuesta de *A* coincidan.

Nota: No aproxime las raíces mediante valores con decimales; trabaje con los radicales.
[0,5 puntos por el apartado a); 1,5 por el apartado b)]
Solución:
a) Dos matrices cuadradas A y B son inversas una de otra cuando su producto es igual a la identidad del mismo orden: $A\cdot B = B\cdot A = I$.
Para que una matriz cuadrada A tenga inversa es necesario que su determinante sea distinto de 0: $|A| \neq 0$.

b) Si coinciden la matriz inversa de A con su traspuesta, entonces se cumple que $A\cdot A^{-1} = A\cdot A^{t} = I$.
Por tanto, en este caso:

$$A\cdot A^{t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & p \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando:

$$A\cdot A^{t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}p - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}p - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} & 0 & p^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}p - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 0 \\ p^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1 \end{cases} \Rightarrow p = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Nota: Si el lector sabe que si $A^{-1} = A^{t}$, entonces, la matriz A es ortogonal; y que cuando una matriz es ortogonal, sus vectores fila (o columna) son ortonormales dos a dos, entonces basta con exigir que:
1) $\left\|\overrightarrow{F3}\right\| = 1$; y 2) $\overrightarrow{F1}\cdot\overrightarrow{F3} = 0$.

$$1)\ \left\|\overrightarrow{F3}\right\| = \left\|\left(p,\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\| = 1 \Rightarrow \sqrt{p^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = 1 \Rightarrow p^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2)\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\cdot\left(p,\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}p - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}p = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

4. Comunidad Valenciana, junio 2013.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\1&1&0\\4&2&-2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&-1&5\\0&0&2\end{pmatrix}$, obtener razonadamente el valor de los determinantes siguientes, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) $|A+B|$ y $\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|$. (4 puntos)

b) $\left|(A+B)^{-1}\cdot A\right|$ y $\left|A^{-1}\cdot(A+B)\right|$. (3 puntos)

c) $\left|2ABA^{-1}\right|$ y $\left|A^3\cdot B^{-1}\right|$. (3 puntos)

Solución:

a) $A+B=\begin{pmatrix}-2&0&0\\1&1&0\\4&2&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1&2\\0&-1&5\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&5\\4&2&0\end{pmatrix}\Rightarrow |A+B|=-1\cdot(-20)+2\cdot 2=24$.

Propiedades:

Para una matriz cuadrada, A, de orden n se cumple: $|kA|=k^n|A|$

Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden: $|A\cdot B|=|A|\cdot|B| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|A\cdot A^{-1}\right|=|A|\cdot\left|A^{-1}\right|=1 \Rightarrow \left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}=|A|^{-1}$$

Como $(A+B)^{-1}$ es una matriz de orden 3 $\Rightarrow \left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|=\frac{1}{2^3}\left|(A+B)^{-1}\right|$.

Por otra parte: $\left|(A+B)^{-1}\right|=\frac{1}{|A+B|}=\frac{1}{24}$.

Por tanto: $\left|\frac{1}{2}(A+B)^{-1}\right|=\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{24}=\frac{1}{192}$.

b) Como A es una matriz triangular, su determinante es el producto de los elementos de su diagonal principal: $|A|=(-2)\cdot 1\cdot(-2)=4$.

Por tanto:

$$\left|(A+B)^{-1}\cdot A\right| = \left|(A+B)^{-1}\right|\cdot|A| = \frac{1}{24}\cdot 4=\frac{1}{6}.$$

$$\left|A^{-1}\cdot(A+B)\right|=\left|A^{-1}\right|\cdot\left|(A+B)\right| = \frac{1}{4}\cdot 24=6$$

(Podría observarse que las matrices $(A+B)^{-1}\cdot A$ y $A^{-1}\cdot(A+B)$ son inversas).

c) La matriz B es triangular. Su determinante vale –4: $|B|=4$.

Con esto:

$$\left|2ABA^{-1}\right|=2^3\cdot|A|\cdot|B|\cdot\left|A^{-1}\right|=2^3\cdot 4\cdot(-4)\cdot\frac{1}{4}=-32.$$

$$\left|A^3\cdot B^{-1}\right| = |A|^3\cdot|B|^{-1} = 4^3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-16.$$

<u>5</u>. <u>La Rioja, junio 2013.</u>

(1 punto) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 y con determinante $|A| = 2$. Calcula los determinantes de la matriz $2A$, la inversa A^{-1} y la traspuesta A^t.

<u>Solución</u>:

$|2A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \cdot 2 = 16$. $\quad \left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{2}$. $\quad \left|A^t\right| = |A| = 2$.

(Véase el problema anterior).

6. <u>Extremadura, junio 2013.</u>

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pruebe que la matriz inversa de A es $A^{-1} = -A^2 + A + 2I$.

<u>Solución</u>:

El determinante de A vale, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1$. Por tanto la matriz A tiene inversa y es única.

Si esa inversa es $A^{-1} = -A^2 + A + 2I$, debe cumplirse que $A \cdot A^{-1} = I$.

Y como $A \cdot A^{-1} = A \cdot \left(-A^2 + A + 2I\right) = I \Rightarrow -A^3 + A^2 + 2A = I$.

Por tanto, hay que comprobar que $-A^3 + A^2 + 2A = I$.

Cálculos:

$$A^3 = A^2 \cdot A = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$-A^3 + A^2 + 2A = -\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2+1+2 & 1-1 & 4-2-2 \\ 2-2 & 1+2-2 & -3+1+2 \\ 1-1 & -2+2 & -3+2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

<u>Observación</u>: Podría comprobarse directamente. Calculando, por una parte la matriz inversa, A^{-1}; por otra, el valor de $-A^2 + A + 2I$. Y ver que son iguales.

7. Madrid, junio 2013.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar el valor de λ para el cual la ecuación matricial $XA=B$ tiene solución única.
b) Calcular la matriz X para λ = 4.
c) Calcular el determinante de la matriz A^2B en función de λ.

Solución:

a) Para que la ecuación $XA=B$ tenga solución única es necesario que exista la inversa de A. Si así fuese: $XA=B \Leftrightarrow XA\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1} \Rightarrow X=B\cdot A^{-1}$.
La inversa de A existe cuando $|A|\neq 0$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & \lambda & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}=1+\lambda \Rightarrow |A|\neq 0 \text{ si } \lambda\neq -1.$$

b) Para λ = 4, $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$, con $|A|=1+4=5$.

Su inversa es $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot(A_{ij})^t$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos de A.

$$(A_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 4 & -1 & 1\\ 8 & -2 & -3\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 4 & 8\\ 1 & -1 & -2\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix}.$$

Como $X=B\cdot A^{-1} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 4 & 8\\ 1 & -1 & -2\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0 & 0 & -5\\ 2 & 3 & 11\\ 3 & 7 & 14\end{pmatrix}$.

$$\text{c) } |A^2B|=|A|^2\cdot|B| = (1+\lambda)^2\cdot\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=(1+\lambda)^2\cdot(-2+1)=-(1+\lambda)^2.$$

8. UNED, junio 2013.

Dada la matriz A, estudiar la existencia de una matriz X tal que $A\times X=I$, y calcularla en el caso de que exista. Observación $A\times X$ representa el producto de matrices.

$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, se pide:

Solución:

Como el determinante de la matriz es distinto de cero, $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$, se puede despejar la matriz X de la igualdad $A \times X = I$, siendo $X = A^{-1}$.

La inversa de A es $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{ij})^t$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos de A.

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 9 & -6 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -3 & 9 & -2 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 3 & -9 & 2 \\ -2 & 6 & -1 \end{pmatrix} = X .$$

Observación: Puede verse que $A \times X = I$:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 3 & -9 & 2 \\ -2 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+6-2 & 12-18+6 & -3+4-1 \\ -1+3-2 & 4-9+6 & -1+2-1 \\ 0+6-6 & 0-18+18 & 0+4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Asturias, junio 2013.

Dado el número real a se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Halla el rango de la matriz $A^2 - A^t$, según los distintos valores de a.

Nota: A^t es la matriz traspuesta de A.

Solución:

$$A^2 - A^t = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+a & 2a & 1 \\ 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2 - A^t = \begin{pmatrix} 1+a & 2a-1 & 0 \\ 2-a & a & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de una matriz es el orden del mayor menor nulo.

Se hace $|A^2 - A^t| = \begin{vmatrix} 1+a & 2a-1 & 0 \\ 2-a & a & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -(2a-1)(2-a) \Rightarrow |A^2 - A^t| = 0$ si $a = 1/2$ o $a = 2$; y $|A^2 - A^t| \neq 0$ cuando $a \neq 1/2$ y $a \neq 2$.

Con esto:

- Si $a \neq 1/2$ y $a \neq 2$ el rango de la matriz $A^2 - A^t$ es 3.
- Si $a = 1/2$ la matriz $A^2 - A^t = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

Su rango es 2, pues el menor $\begin{vmatrix} 3/2 & 0 \\ 3/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \neq 0$.

- Si $a = 2$ la matriz $A^2 - A^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. También tiene rango 2, pues $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$.

<u>**10**. Asturias, junio 2013.</u>

Dado el número real a se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1-a & 1 & 2 \\ a & a^2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Obtenga los valores del número real a para los que la matriz A tiene inversa.
b) Busque, si es posible, la matriz inversa de A cuando $a = 0$.
<u>Solución</u>:
a) La inversa de A existe cuando $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1-a & 1 & 2 \\ a & a^2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2a^2 - a(a - 1 - 2a) + (1-a)a^2 - a = -a^3 - 1.$$

Una raíz de $-a^3 - 1$ es $a = -1 \Rightarrow$ descomponiendo en factores: $|A| = (a+1)(-a^2 + a - 1)$
$\Rightarrow$ $|A| \neq 0$ si $a \neq -1$. (La expresión $(-a^2 + a - 1)$ no tiene raíces reales).
En consecuencia, la matriz A es inversible siempre que $a \neq -1$.

b) Cuando $a = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $|A| = -1$.

Su inversa es $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{ij})^t$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos de A.

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{(-1)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

<u>**11**. País Vasco, junio 2013.</u>

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & a^2 - 1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Calcular razonadamente el rango de la matriz A en función del parámetro a.
b) Explicar si la matriz tiene inversa para el caso $a = 1$ y en caso de que exista calcularla.
<u>Solución</u>:
Es similar a los problemas anteriores.
$|A| = -a(a^2 + 1) \Rightarrow$ r(A) = 3 si $a \neq 0$; será 2, si $a = 0$.

Su inversa para $a = 1$ es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

12. Canarias, junio 2013.

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & m & 1\\ -1 & 3 & -m\end{pmatrix}$.

a) Determina los valores del parámetro *m* para los que la matriz *A* tiene inversa.
b) Calcula la inversa de la matriz *A* para *m* = 2.
Solución:
Es similar al problema anterior.

$|A|=-m^2+4m-3=-(m-1)(m-3) \Rightarrow$ Tiene inversa cuando $m\neq 1$ y $m\neq 3$.

Para $m=2 \rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 3 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-7 & 12 & -8\\ -1 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

13. Canarias, junio 2013.

Calcular las matrices *A* y *B* tales que: $\begin{cases}5A+3B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 15\end{pmatrix}\\ 3A+2B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}\end{cases}$.

Solución:
Utilizando el método de reducción (Gauss):

$$\begin{cases}5A+3B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 15\end{pmatrix}\\ 3A+2B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}2E1\\ 3E2\end{matrix}\begin{cases}10A+6B=2\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 15\end{pmatrix}\\ 9A+6B=3\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}\end{cases}.$$

Restando:

$$A=2\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 15\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la primera ecuación dada:

$$5A+3B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 15\end{pmatrix} \Rightarrow B=\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 15\end{pmatrix}-5A\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B=\frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 15\end{pmatrix}-5\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 3\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -15\\ 6 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

14. Murcia, junio 2013.

a) Comprueba que la matriz $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$ es regular (o inversible) y calcula su matriz inversa.
b) Resuelve la ecuación matricial $AX+A^2=B$, siendo A la matriz anterior y $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.
¡OJO!: El producto de matrices NO es conmutativo
Solución:

(Me llama la atención la advertencia del OJO).
a) Una matriz es regular cuando su determinante es distinto de 0.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -4+3) - 1 \neq 0$, la matriz A es regular.

Su inversa es $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot (A_{ij})^t$, siendo $\left(A_{ij}\right)$ la matriz de los adjuntos de A.

$$\left(A_{ij}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{(-1)} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

b) $AX + A^2 = B \Rightarrow A^{-1}\left(AX + A^2\right) = A^{-1}B \Rightarrow X + A = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B - A$.
Por tanto:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -15 & -22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -12 & -21 \end{pmatrix}.$$

Sistemas

15. Aragón, junio 2013.

Sea A la matriz: $A=\begin{pmatrix} 5 & -m & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$

a) (1,5 puntos) Discute el sistema que aparece a continuación, para cada uno de los valores de m y resuélvalo para los valores de m siguientes: $m = -1$ y $m = 2$.

$$AX=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donde } X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b) (1 punto) Determina la inversa de la matriz A cuando $m = 0$.

Solución:

El sistema que aparece es homogéneo. Por tanto siempre tendrá solución.
Esa solución será única cuando rango de A sea 3: sistema CD.
Tendrá infinitas soluciones cuando r(A) < 3: sistema CI.
Se estudia el rango de A. Su determinante vale

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & -m & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}=m^2-5m+6=(m-2)(m-3) \Rightarrow |A|\neq 0 \text{ cuando } m\neq 2 \text{ y } 3.$$

Por tanto:

- Si $m \neq 2$ y 3, la única solución del sistema es la trivial: $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$. En particular, cuando $m = -1$, esa será las solución.
- Si $m = 2$ o $m = 3$, el sistema será compatible indeterminado, con infinitas soluciones.

Para $m = 2$, se tiene: $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-2y+3z=0 \\ x-y=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \rightarrow$ Se prescinde de una ecuación: $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ z=-x \end{cases}$. La solución general es $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-t \end{cases}$.

b) Para $m = 0$, la matriz $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como su determinante vale 6, la matriz tendrá inversa.

Su inversa es $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot(A_{ij})^t$, siendo (A_{ij}) la matriz de los adjuntos de A.

$$(A_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & -5 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

(El lector debería comprobar que $A\cdot A^{-1}=I$).

<u>**16**. Castilla–León, junio 2013.</u>

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}2\\1\\a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

a) Calcula, cuando sea posible, las matrices $C\cdot B^t$, $B^t\cdot C$ y $B\cdot C$. (0,75 puntos)
b) Halla a para que el sistema $x\cdot A+y\cdot B=4\cdot C$, de tres ecuaciones y dos incógnitas x e y, sea compatible determinado y resuélvelo para ese valor de a. (1,75 puntos)

<u>Solución</u>:

a) $C\cdot B^t=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & -4\\6 & -2 & -8\\3 & -1 & -4\end{pmatrix}$; $B^t\cdot C=\begin{pmatrix}3 & -1 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=3-2-4=-3$

El producto $B\cdot C$ no puede realizarse: Para poder multiplicar matrices es necesario que el número de columnas de la matriz de la izquierda sea igual al de filas de la matriz de la derecha.

b) El sistema $x\cdot A+y\cdot B=4\cdot C \Leftrightarrow x\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\a\end{pmatrix}+y\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}2x\\x\\ax\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3y\\-y\\-4y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\\4\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases}2x+3y=4\\x-y=8\\ax-4y=4\end{cases}.$$

Este sistema se puede resolver aplicando Rouché: hay que imponer que el determinante de la matriz ampliada valga 0. Pero aquí se va a resolver aplicando procedimientos elementales.
El sistema será compatible determinado cuando la solución correspondiente a las dos primeras ecuaciones sea también válida en la tercera.
Las dos primeras ecuaciones generan el sistema:

$$\begin{cases}2x+3y=4\\x-y=8\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}\\2E2\end{matrix}\begin{cases}2x+3y=4\\2x-2y=16\end{cases} \to \text{Restando } E1-2E2\text{:} \begin{cases}x=28/5\\y=-12/5\end{cases}$$

Como esa solución debe ser válida en la ecuación $ax-4y=4$, sustituyendo:

$$a\cdot\frac{28}{5}-4\cdot\left(-\frac{12}{5}\right)=4 \Rightarrow 28a+48=20 \Rightarrow a=-1.$$

<u>**17**. Cataluña, junio 2013 (Serie 4)</u>

Sabemos que el vector (2, 1, –1) es solución del sistema

$$\left.\begin{aligned}ax+by+cz&=a+c\\bx-y+bz&=a-b-c\\cx-by+2z&=b\end{aligned}\right\}$$

Calcule los valores de los parámetros a, b y c para que el sistema no sea compatible determinado.
[2 puntos]

<u>Solución</u>:

Si (2, 1, –1) es solución del sistema, sustituyendo se obtiene:

$$\left.\begin{array}{r} 2a+b-c=a+c \\ 2b-1-b=a-b-c \\ 2c-b-2=b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b-2c=0 \\ a-2b-c=-1 \\ 2b-2c=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b-2c=0 \\ a-2b-c=-1 \\ b-c=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(Por Gauss)}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ E2-E1:\to \\ \\ \end{array} \left.\begin{array}{r} a+b-2c=0 \\ -3b+c=-1 \\ b-c=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ \\ E3+E2:\to \end{array} \left.\begin{array}{r} a+b-2c=0 \\ -3b+c=-1 \\ -2b=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=3 \\ c=2 \\ b=1 \end{array}\right. .$$

<u>**18**. Comunidad Valenciana, junio 2013.</u>

Se tiene el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} 2x+5y=a \\ -x-4y=b \\ 2x+y=c \end{array}\right.$, donde *a*, *b* y *c* son tres números reales.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) La relación que deben verificar los números *a*, *b* y *c* para que el sistema sea compatible. (4 puntos)
b) La solución del sistema cuando $a = -1$, $b = 2$ y $c = 3$. (2 puntos)
c) La solución del sistema cuando los números *a*, *b* y *c* verifican la $a = c = -2b$. (2 puntos)

<u>Solución</u>:

a) Es un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas. Para que tenga solución es necesario que el rango de la matriz ampliada sea menor que 3.
Por tanto,

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & a \\ -1 & -4 & b \\ 2 & 1 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 7a+8b-3c=0$$

El sistema será compatible cuando los números verifiquen la relación $7a+8b-3c=0$.

b) Cuando $a = -1$, $b = 2$ y $c = 3$ se verifica la relación anterior: 7 ·–1) + 8 · 2 – 3 · 3 = 0;
por tanto el sistema es compatible. Queda $\left\{\begin{array}{l} 2x+5y=-1 \\ -x-4y=2 \\ 2x+y=3 \end{array}\right.$.

Su solución, puede hacerse por Gauss (por el método de reducción). Restando a la primera, la tercera ecuación, queda: $4y = -4 \Rightarrow y = -1 \to x = 2$.

c) Cuando los números *a*, *b* y *c* verifican la $a = c = -2b$ también se cumple $7a+8b-3c=0$, pues si $a = c$, sustituyendo: $7a+8b-3a=0 \Rightarrow a=-2b$.
El sistema queda:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+5y=-2b \\ -x-4y=b \\ 2x+y=-2b \end{array}\right. \to \text{(por Gauss)} \to \begin{array}{r} \\ \\ E3-E1 \end{array} \left\{\begin{array}{l} 2x+5y=-2b \\ -x-4y=b \\ -4y=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-b \\ y=0 \end{array}\right.$$

<u>**19**. Extremadura, junio 2013.</u>
a) Encuentre, razonadamente, un valor del parámetro *a* para el que sea compatible determinado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} ax+2y+z=a+1 \\ (a+1)x-y-az=-1 \\ -x+y+z=2a \end{array}\right\}$$

b) Resuelva el sistema para el valor de *a* encontrado.
<u>Solución</u>:
Para que el sistema sea compatible determinado el rango de las matrices de coeficientes y ampliada, *A* y *M*, debe ser 3.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & a+1 \\ a+1 & -1 & -a & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2a \end{array}\right)=M$$

El determinante de *A* vale:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ a+1 & -1 & -a \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a(-1+a)-(a+1)\cdot 1-(-2a+1)=a^2-2\,.$$

Como $|A|=0$ si $a=\pm\sqrt{2}$, para cualquier otro valor de *a* el rango de *A* es 3. Por tanto, el sistema será compatible determinado para todo valor de $a\neq\pm\sqrt{2}$.

b) Por ejemplo, para *a* = 0 el sistema es compatible determinado. Queda así:

$$\left.\begin{array}{r} 2y+z=1 \\ x-y\qquad=-1 \\ -x+y+z=0 \end{array}\right\}$$

Puede resolverse por Gauss.

$$\left.\begin{array}{r} 2y+z=1 \\ x-y\qquad=-1 \\ -x+y+z=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} \\ \\ E3+E2:\to \end{array} \left.\begin{array}{r} 2y+z=1 \\ x-y\qquad=-1 \\ z=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \\ z=-1 \end{array}\right.$$

<u>**20**. Madrid, junio 2013.</u>

Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\left\{\begin{array}{r} ax+7y+5z=0 \\ x+ay+z=3 \\ y+z=-2 \end{array}\right.$, se pide:

a) Discutirlo según los valores de *a*.
b) Resolverlo en el caso *a* = 4.
c) Resolverlo en el caso *a* = 2.
<u>Solución</u>:

Las matrices de coeficientes y ampliada son: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)=M$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 7 & 5 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a(a-1) - 2 = a^2 - a - 2 \Rightarrow |A| = 0 \text{ si } a = -1 \text{ o } a = 2.$$

Por tanto:

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 2$, $|A| \neq 0 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si $a = -1$, se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) = M \rightarrow$ r(A) = 2.

Como el menor $|M_1| = \begin{vmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 + 14 \neq 0 \Rightarrow$ r(M) = 3.

Luego, si $a = -1$, el sistema es incompatible.

- Si $a = 2$, se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) = M \rightarrow$ r(A) = 2.

Como el menor $|M_1| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -14 + 14 = 0 \Rightarrow$ r(M) = 2.

Luego, si $a = 2$, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a = 4$ el sistema es compatible determinado. Queda así: $\begin{cases} 4x + 7y + 5z = 0 \\ x + 4y + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$.

Puede resolverse por el método de reducción de Gauss:

$$\begin{cases} 4x + 7y + 5z = 0 \\ x + 4y + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1 - 4E2 \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} -9y + z = -12 \\ x + 4y + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1 - E3 \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} -10y = -10 \\ x + 4y + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x + 4y + z = 3 \rightarrow x = 3 - 4y - z = 2 \\ z = -2 - y \rightarrow z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{cases}.$$

c) Para $a = 2$ el sistema es indeterminado; equivalente a $\begin{cases} 2x + 7y + 5z = 0 \\ x + 2y + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$.

Puede suprimirse una ecuación (la $E1$), y queda:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 - z \rightarrow x = 3 - z - 2y \rightarrow x = 7 + z \\ y = -2 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 + t \\ y = -2 - t \\ z = t \end{cases}.$$

21. Asturias, junio 2013.

Dado el sistema $\begin{cases} ax+2y+2z=a \\ 2x+ay+2z=-a \\ 2x+2y+az=0 \end{cases}$.

a) Estudia su compatibilidad según los valores del número real a.
b) Resuelve el sistema, si es posible, cuando $a = -4$.
Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 2 & a \\ 2 & a & 2 & -a \\ 2 & 2 & a & 0 \end{array}\right)=M$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix}=a\left(a^2-4\right)-2(2a-4)+2(4-2a)=(a-2)\left(a(a+2)-4-4\right) \Rightarrow$$

$|A|=(a-2)\left(a^2+2a-8\right) \Rightarrow |A|=0$ si $a = 2$ o $a = -4$; y $|A|\neq 0$ si $a \neq 2$ y $a \neq -4$.

Por tanto:

- Si $a \neq 2$ y $a \neq -4 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si $a = 2$, se tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)=M \rightarrow$ r(A) = 1 y r(M) = 2.

Luego, si $a = 2$, el sistema es incompatible.

- Si $a = -4$, se tiene: $A=\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right)=M \rightarrow$ r(A) = 2: $|A_1|=\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}\neq 0$

Como el menor $|M_1|=\begin{vmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-48+48=0 \Rightarrow$ r(M) = 2.

Luego, si $a = -4$, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a = -4$, el sistema es $\begin{cases} -4x+2y+2z=-4 \\ 2x-4y+2z=4 \\ 2x+2y-4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} E2/2 \\ E3/2 \end{matrix}\begin{cases} x-2y=2-z \\ x+y=2z \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \; E1-E2\begin{cases} -3y=2-3z \\ x+y=2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-2/3+z \\ x=2z-y \;\rightarrow x=2/3+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3}+t \\ y=-\dfrac{2}{3}+t \\ z=t \end{cases}$$

22. País Vasco, junio 2013.

Dado el sistema $\begin{cases} mx + my + 2z = m \\ x + (m-2)y = -1 \\ 2y + 2z = 2 \end{cases}$.

a) Discutirlo según los valores del parámetro *m*.
b) Resolverlo, si es posible, para *m* = 5.
Solución:
Es similar al problema anterior.

$|A| = 2(m-1)(m-2) \Rightarrow m \neq 1$ y $m \neq 2 \to$ SCD; *m* = 1, SCI; *m* = 2, incompatible.

Si *m* = 5, SCD con solución: *x* = 1; *y* = –2/3; *z* = 5/3.

23. Murcia, junio 2013.

Discute, en función del parámetro *a* el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - ay + z = 1 \\ ax + y + z = 4 \end{cases}.$$

No hay que resolverlo en ningún caso.
Solución:
Es similar al problema anterior.

$|A| = (a-1)(a+1) \Rightarrow a \neq 1$ y $a \neq -1 \to$ SCD; *a* = 1, incompatible; *a* = –1, SCI.

24. Canarias, junio 2013.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} y + z = 1 \\ (m-1)x + y + z = m \\ x + (m-1)y - z = 0 \end{cases}$.

a) Discutirlo según los valores de *m*.
b) Resolverlo para *m* = 2.
Solución:
Es similar al problema 13.

$|A| = m(m-1) \Rightarrow m \neq 0$ y $m \neq 1 \to$ SCD; *m* = 1, SCI; *m* = 0, incompatible.

Si *m* = 2, SCD con solución: *x* = 1; *y* = 0; *z* = 1.

25. La Rioja, junio 2013.

Discute el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro *a* y resuelve cuando sea compatible determinado:

$$\begin{cases} (a-3)y + 4z = 2 \\ y - 2z = -1 \\ ax - y + 2z = a \end{cases}.$$

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a-3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 & a \end{array}\right) = M$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix} = a(-2a+6-4) = a(2-2a) \Rightarrow$$

$\Rightarrow |A| = 0$ si $a = 0$ o $a = 1$; y $|A| \neq 0$ si $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

Por tanto:

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.
- Si $a = 0$, se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) = M \rightarrow$ r(A) = 2.

Como el menor $|M_1| = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6+4 \neq 0 \Rightarrow$ r(M) = 3.

Luego, si $a = 0$ el sistema es incompatible.

- Si $a = 1$, se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{4} & \cancel{2} \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) = M \rightarrow$ r(A) = 2 y r(M) = 2.

En consecuencia, si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

Cuando es compatible determinado ($a \neq 0$ y $a \neq 1$), la solución puede calcularse por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a-3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-(a-3)(-2+2a)+4(1-a)}{a(2-2a)} = \frac{(1-a)(2a-2)}{a(2-2a)} = \frac{a-1}{a};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ a & a & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{a(2-2a)} = 0; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a-3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a(-a+3-2)}{a(2-2a)} = \frac{a(1-a)}{a(2-2a)} = \frac{1}{2}$$