ALGUNOS PROBLEMAS DE SELECTIVIDAD PROPUESTOS EN 2013

1. Aragón, junio 13

a) Determina la función $f(x)$ cuya derivada es $f´(x) = 2xe^{5x}$ y que verifica que $f(0) = 2$.

b) Calcula: $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}$

Solución:

a) La función $f(x)$ es una primitiva de $f´(x) = 2xe^{5x}$: $f(x) = \int 2xe^{5x}dx$.

Esta integral se hace por partes, tomando:

$u = 2x \Rightarrow du = 2dx$; $dv = e^{5x}dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{5}e^{5x}$

Luego:

$$f(x) = \int 2xe^{5x}dx = 2x\cdot\frac{1}{5}e^{5x} - \int 2\cdot\frac{1}{5}e^{5x}dx = \frac{2}{5}\left(xe^{5x} - \int e^{5x}dx\right) = \frac{2}{5}\left(xe^{5x} - \frac{1}{5}e^{5x}\right) + c$$

Como $f(0) = 2$, entonces: $f(0) = \dfrac{2}{5}\left(0 - \dfrac{1}{5}e^{0}\right) + c = 2 \Rightarrow c = 2 + \dfrac{2}{25} = \dfrac{52}{25}$.

Por tanto, $f(x) = \dfrac{2}{5}\left(xe^{5x} - \dfrac{1}{5}e^{5x}\right) + \dfrac{52}{25}$.

b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}} = [1]^{\infty} \to$ Forma indeterminada. Se resuelve aplicando logaritmos.

$$\ln\left(\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}\right) = \lim_{x\to 2^+}\ln\left(\left(\frac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}}\right) = \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(2-x)^2}\ln\left(\frac{1}{3-x}\right) = [\infty\cdot 0] =$$

= (teniendo en cuenta que $\ln\left(\dfrac{1}{3-x}\right) = \ln 1 - \ln(3-x)$) = $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-\ln(3-x)}{(2-x)^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Aplicando la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{-\ln(3-x)}{(2-x)^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2^+}\frac{\frac{1}{3-x}}{2(2-x)\cdot(-1)} = \left[\frac{1}{0^+}\right] \to +\infty$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{3-x}\right)^{\frac{1}{(2-x)^2}} = +\infty$.

2. Aragón, junio 13

a) Sea la función $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$. Determina el dominio y las asíntotas de $f(x)$, si existen.

b) Determina el área del recinto encerrado por las funciones: $f(x)=-x^2+3$ y $g(x)=1$

Solución:

a) La función no está definida cuando $x^2-1=0$; esto es, si $x = \pm 1$.
Por tanto, Dom(*f*) = **R** – {–1, 1}.

Las rectas $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales de la curva, pues $\lim\limits_{x\to\pm1}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\left[\dfrac{1}{0}\right]=\infty$.

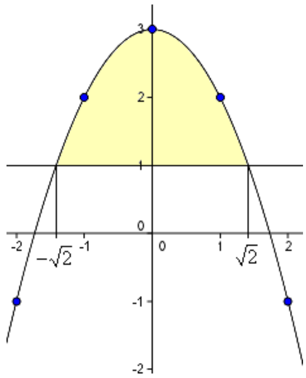
Al tratarse de una función racional con el grado del numerador mayor que el del denominador en una unidad, la curva tiene una asíntota oblicua.
La recta $y=mx+n$ es asíntota oblicua de la curva $f(x)$ cuando se cumple que:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x\left(x^2-1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-x}=1.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x^2-1}\right)=0.$$

La asíntota oblicua es la recta $y = x$.

b) Representando gráficamente las funciones dadas se obtiene el recinto sombreado en la figura adjunta.
El punto de corte de la parábola y la recta se da cuando
$-x^2+3=1 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=-\sqrt{2}$ y $x=\sqrt{2}$



Debido a la simetría del recinto, el área viene dada por

$$2\int_0^{\sqrt{2}}\left(-x^2+2\right)dx=2\left(-\frac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

3. Aragón, junio 13

a) Determina el valor que debe tomar k para que $\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+kx-5}\right)=1$.

b) Calcula: $\int 2x[\ln(x)]^2\,dx$

Solución:

a) Este límite se puede resolver multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada. Así:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+kx-5}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x-\sqrt{4x^2+kx-5}\right)\left(2x+\sqrt{4x^2+kx-5}\right)}{\left(2x+\sqrt{4x^2+kx-5}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-\left(4x^2+kx-5\right)}{2x+\sqrt{4x^2+kx-5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-kx-5}{2x+\sqrt{4x^2+kx-5}}$$ = (“dividiendo” por x) =

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-k-\frac{5}{x}}{2+\sqrt{\frac{4x^2+kx-5}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-k-\frac{5}{x}}{2+\sqrt{4x+\frac{k}{x}-\frac{5}{x^2}}}\frac{-k}{4}$$

Si se desea que el límite valga 1 $\Rightarrow \frac{-k}{4}=1 \Rightarrow k=-4$.

b) La integral puede hacerse utilizando el método de integración por partes. Tomando

$$u=2x[\ln(x)]^2 \Rightarrow du=\left(2[\ln(x)]^2+2x\cdot2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}\right)dx;\qquad dx=dv \Rightarrow v=x$$

Luego,

$$\int 2x[\ln(x)]^2\,dx = 2x[\ln(x)]^2\cdot x-\int x\left(2[\ln(x)]^2+2x\cdot2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}\right)dx=$$

$$=2x[\ln(x)]^2\cdot x-\int 2x[\ln(x)]^2dx-\int 4x\ln(x)dx$$ $\Rightarrow$ (trasponiendo la 1ª integral)

$$\Rightarrow 2\int 2x[\ln(x)]^2dx=2x[\ln(x)]^2\cdot x-\int 4x\ln(x)dx \qquad (1)$$

Ahora se trata de resolver $\int 4x\ln(x)dx$, que también se hace por partes.

Tomando ahora:

$$u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx;\qquad dv=4xdx \Rightarrow v=2x^2$$

Se tiene que:

$$\int 4x\ln(x)dx = 2x^2\ln x-\int 2x^2\cdot\frac{1}{x}dx=2x^2\ln x-\int 2xdx=2x^2\ln x-x^2.$$

Sustituyendo en (1):

$$2\int 2x[\ln(x)]^2dx=2x[\ln(x)]^2\cdot x-2x^2\ln(x)+x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int 2x[\ln(x)]^2dx=x^2[\ln(x)]^2-x^2\ln(x)+\frac{x^2}{2}+c=x^2\left([\ln(x)]^2-\ln(x)+\frac{1}{2}\right)+c.$$

4. <u>Castilla–León, junio 2013</u>

Sea la función $f(x)=\begin{cases} a\sqrt{x}+bx & \text{si } 0\le x\le 1 \\ c\ln x & \text{si } 1<x \end{cases}$. Halla *a*, *b* y *c* sabiendo que $f(x)$ es continua en (0, ∞), la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x=\dfrac{1}{16}$ es paralela a la recta $y=-4x+3$, y se cumple que $\int_1^e f(x)\,dx=2$.

<u>Solución</u>:

Por ser continua entre 0 e ∞, debe serlo en *x* = 1. Por tanto, en ese punto deben coincidir los límites laterales.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(a\sqrt{x}+bx\right)=a+b$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(c\ln x\right)=0$

Como deben ser iguales $\Rightarrow$ $a+b=0$.

En $x=\dfrac{1}{16}$, la función que actúa es $f(x)=a\sqrt{x}+bx$.

Su derivada es $f´(x)=\dfrac{a}{2\sqrt{x}}+b \Rightarrow f´(1/16)=\dfrac{a}{2\sqrt{1/16}}+b=2a+b$.

Como la tangente en ese punto debe ser paralela a $y=-4x+3 \Rightarrow f´(1/16)=-4$.

Por tanto: $2a+b=-4$.

Se tiene el sistema $\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=-4 \end{cases} \Rightarrow a=-4;\ b=4$.

La tercera condición, que $\int_1^e f(x)\,dx=2$, no requiere el conocimiento de *a* y *b*, pues en ese intervalo $f(x)=c\ln x$

$$\int_1^e f(x)\,dx=2 \Rightarrow \int_1^e (c\ln x)\,dx=2$$

La integral $\int (c\ln x)\,dx=c\int \ln x\,dx$ se hace por partes.

Tomando:

$u=\ln x \Rightarrow du=\dfrac{1}{x}dx$; $dv=dx \Rightarrow v=x$

$$c\int \ln x dx=c\left(x\ln x-\int dx\right)=c(x\ln x-x)$$

Luego:

$$\int_1^e (c\ln x)\,dx=2 \Rightarrow c[x\ln x-x]_1^e=c(e\cdot\ln e-e-(1\cdot\ln 1-1))=c \Rightarrow c=2.$$

5. Castilla León, junio 2013

a) Estudia el crecimiento de la función $f(x)=x^3+3x^2-3$.

b) Prueba que la ecuación $x^3+3x^2-3=0$ tiene exactamente tres soluciones reales.

Solución:

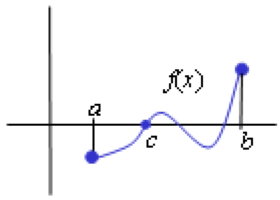
a) $f(x)=x^3+3x^2-3 \Rightarrow f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2) \to f'(x)=0$ si $x=-2$ o $x=0$.

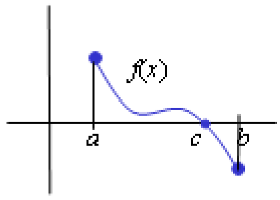
- Si $x<-2$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $-2<x<0$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $x>0$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece.

Aunque no se pide, en $x=-2$ hay un máximo; y en $x=0$, un mínimo.

b) Teorema de Bolzano:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a)<0<f(b)$ o $f(a)>0>f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c)=0$.





Desde el punto de vista algebraico, este teorema asegura que si $f(a)<0$ y $f(b)>0$, entonces la ecuación $f(x)=0$ tiene una solución entre a y b. Esa solución será el punto c cuya existencia afirma el teorema.

Aplicando el teorema de Bolzano a la función $f(x)=x^3+3x^2-3$ se observa:

- Para $x=-3$, $f(-3)=(-3)^3+3(-3)^2-3=-3<0$.
- Para $x=-2$, $f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-3=1>0$.
- Para $x=-1$, $f(-1)=(-1)^3+3(-1)^2-3=-1<0$.
- Para $x=0$, $f(0)=-3<0$.
- Para $x=1$, $f(1)=1^3+3\cdot1^2-3=1>0$.

Como puede observarse:

1) La función tiene distinto signo en los extremos del intervalo $[-3, -2] \Rightarrow f(x)$ corta al eje OX en algún punto del intervalo $(-3, -2)$.

2) La función tiene distinto signo en los extremos del intervalo $[-2, -1] \Rightarrow f(x)$ corta al eje OX en algún punto del intervalo $(-2, -1)$.

3) La función tiene distinto signo en los extremos del intervalo $[0, 1] \Rightarrow f(x)$ corta al eje OX en algún punto del intervalo $(0, 1)$.

En consecuencia, la ecuación $x^3+3x^2-3=0$ tiene tres raíces: una entre -3 y -2; otra, entre -2 y -1; la tercera, entre 0 y 1.

6. Castilla León, junio 2013.

Sea la función $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$.

a) Calcula sus asíntotas y estudia su crecimiento y decrecimiento.

b) Dibuja el recinto comprendido entre la recta *y* = 1, la gráfica de $f(x)$, el eje *OY* y la recta *x* = 2; calcula el área de dicho recinto.

Solución:

a) Tiene dos asíntotas: una vertical y otra horizontal.

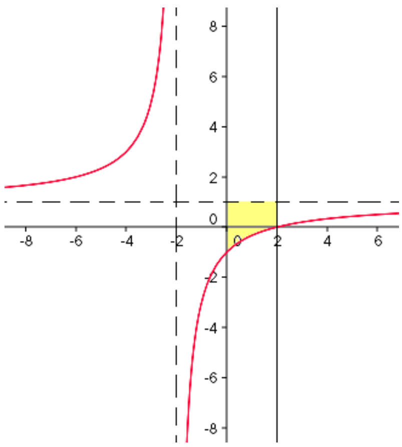
La recta *x* = –2 es A.V., pues $\lim_{x \to -2} \dfrac{x-2}{x+2} = \infty$.

La recta *y* = 1 es A.H., pues $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x-2}{x+2} = 1$.

Derivada:

$$f'(x) = \frac{x+2-(x-2)}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}.$$

Como la derivada es siempre positiva, la función es creciente en todo su dominio: en **R** – {–2}.



b) La gráfica es la adjunta.

Estudiando los límites laterales puede verse la posición de la curva respecto de las asíntotas.

El área pedida es la de la región sombreada. Su valor es

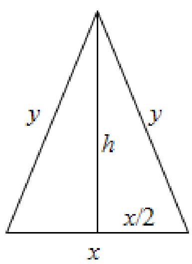
$$A = \int_0^2 \left(1 - \frac{x-2}{x+2}\right) dx = \int_0^2 \frac{4}{x+2} dx = \left[4\ln(x+2)\right]_0^2 = 4\ln 4 - 4\ln 2 = 4\ln 2 \ \text{u}^2.$$

7. Castilla León, junio 2013.

Determina, de entre los triángulos isósceles de perímetro 6 metros, el que tiene área máxima.

Solución:

Sea el triángulo de la figura.



Su perímetro vale 6 $\Rightarrow \ x + 2y = 6 \Rightarrow y = \dfrac{6-x}{2}$

Por Pitágoras: $y^2 = h^2 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{y^2 - \dfrac{x^2}{4}}$

Sustituyendo el valor de $y = \dfrac{6-x}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{36 - 12x + x^2}{4} - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{9-3x}$$

El área del triángulo es $A = \dfrac{x \cdot h}{2}$.

Sustituyendo h por su valor, $A(x) = \dfrac{x\sqrt{9-3x}}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{9x^2 - 3x^3}$

Para que el área *A* sea máxima: $A'(x) = 0$ y $A''(x) < 0$.

$$A'(x) = \frac{18x - 9x^2}{4\sqrt{9x^2 - 3x^3}} = 0 \Rightarrow 18x - 9x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2.$$

En vez de calcular la derivada segunda, que resulta muy engorroso, puede estudiarse el crecimiento y el decrecimiento de $A(x)$. Además, se descarta la solución $x = 0$, pues para ese valor se obtiene el área mínima, que es 0 m^2.

- Si $x < 2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.
- Si $x > 2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.

En consecuencia, en $x = 2$ se da el máximo buscado, que es el triángulo equilátero de lado 2 m.

8. Cataluña, junio 2013 (Serie 4)

La curva $y = x^2$ y la recta $y = k$, con $k > 0$, determinan una región plana.

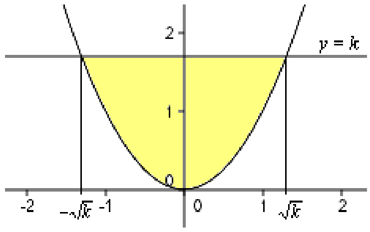
a) Calcule el valor del área de esta región en función del parámetro k.

b) Encuentre el valor de k para que el área limitada sea $\sqrt{6}$ u^2.

[1,5 puntos por el apartado *a*; 0,5 puntos por el apartado *b*]

Solución:

a) Representando gráficamente las funciones dadas se obtiene el recinto sombreado en la figura adjunta.



El punto de corte de la parábola y la recta se da cuando $x^2 = k \Rightarrow x = -\sqrt{k}$ y $x = \sqrt{k}$

Debido a la simetría del recinto, el área viene dada por

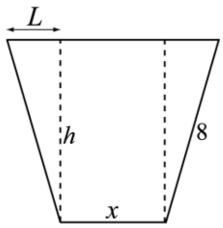
$$2\int_0^{\sqrt{k}} \left(k - x^2\right) dx = 2\left(kx - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{k}} = \frac{4k\sqrt{k}}{3}.$$

b) Si se desea que $\dfrac{4k\sqrt{k}}{3} = \sqrt{6} \Rightarrow 4k\sqrt{k} = 3\sqrt{6} \Rightarrow k^3 = \dfrac{54}{16} = \dfrac{27}{8} \Rightarrow k = \dfrac{3}{2}$.

9. Cataluña, junio 2013

Se quiere construir un canal que tenga como sección un trapecio isósceles de manera que la anchura superior del canal sea el doble de la anchura inferior y que los lados no paralelos sean de 8 metros.

A la derecha tiene un esquema de la sección del canal.



a) Encuentre el valor del segmento L de la grafica en función de la variable x (anchura inferior del canal).

b) Sabemos que el área de un trapecio es igual a su altura multiplicada por la semisuma de sus bases. Compruebe que, en este caso, el área de la sección viene dada por $A(x) = \dfrac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}$.

c) Calcule el valor de x para que el área de la sección del canal sea máxima (no es necesario que compruebe que es realmente un máximo).

[0,5 puntos por el apartado *a*; 0,5 puntos por el apartado *b*; 1 punto por el apartado *c*]

Solución:

a) La anchura superior de la sección vale $2x$. Por tanto, $2L + x = 2x \Rightarrow L = \dfrac{x}{2}$.

b) Por Pitágoras: $8^2 = h^2 + L^2 \Rightarrow h^2 = 64 - \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{256 - x^2}{4} \Rightarrow h = \dfrac{\sqrt{256 - x^2}}{2}$.

Como el área de la sección del canal es:

$$A(x)=\frac{(x+2x)}{2}\cdot h\ \Rightarrow\ A(x)=\frac{3x\sqrt{256-x^2}}{4}.$$

c) El máximo de $A(x)$ se da en las soluciones de $A'(x)=0$ que hacen negativa a $A''(x)$.

Si se introduce en la raíz el factor x de fuera, se tiene: $A(x)=\dfrac{3\sqrt{256x^2-x^4}}{4}$

Derivando,

$$A'(x)=\frac{3\left(512x-4x^3\right)}{8\sqrt{256x^2-x^4}}$$, que se anula cuando $512x-4x^3=0\Rightarrow 4x\left(128-x^2\right)=0$

$\Rightarrow x=0;\ x=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$.

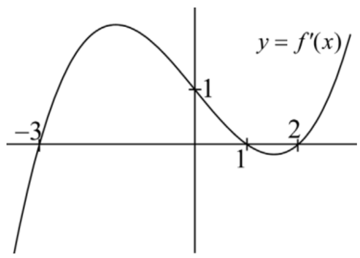
La solución $x = 0$ hay que descartarla; por tanto, la solución buscada es $x=8\sqrt{2}$.

Observación: Aunque el problema indica que no es necesario comprobar que realmente es un máximo, como es sencillo puede hacerse. Así: 1) Para valores de x a la izquierda de $x=8\sqrt{2}$ la derivada $A'(x)>0$; 2) Para valores de x a la derecha de $x=8\sqrt{2}$ la derivada $A'(x)<0$. Por tanto, como la función crece a la izquierda de $x=8\sqrt{2}$ y decrece a su derecha, en dicho punto se dará un máximo.

10. Cataluña, junio 2013

La función $f(x)$ es derivable y pasa por el origen de coordenadas.

La grafica de la función derivada es la que puede ver aquí dibujada, siendo $f'(x)$ creciente en los intervalos $(-\infty,-3]$ y $[2,+\infty)$.



a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la grafica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Indique las abscisas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifique estos extremos.

Solución:

a) La ecuación de la recta tangente es $y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

Como la función pasa por el origen, se tiene que $f(0)=0$.

Como puede verse en la gráfica, $f'(0)=1$.

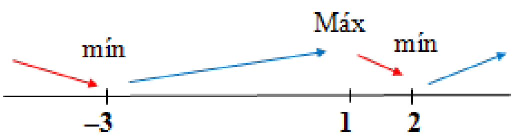
La ecuación de la tangente será: $y-0=1\cdot(x-0)\ \Rightarrow\ y=x$.

b) Los extremos relativos de $f(x)$ se dan en los puntos en los que se anula $f'(x)$.

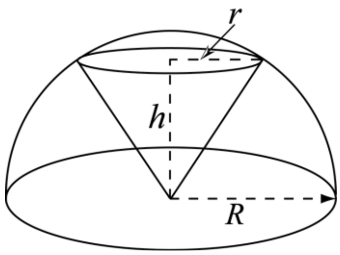
Estos puntos son: $x = -3$, $x = 1$ y $x = 2$.

Además:

- Si $x<-3$, $f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $-3<x<1$, $f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ crece. Por tanto, en $x = -3$ se da un mínimo.
- Si $1<x<2$, $f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ decrece. Por tanto, en $x = 1$ se da un máximo.
- Si $x>2$, $f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ crece. Por tanto, en $x = 2$ se da un mínimo.



11. Cataluña, junio 2013 (Serie 3)
En una semiesfera de radio R inscribimos un cono situando su vértice en el centro de la semiesfera, tal como se ve en el dibujo.



a) Sabiendo que el volumen de un cono es igual al área de la base multiplicada por la altura y dividida por 3, compruebe que, en este caso, podemos expresar el volumen como

$$V = \frac{\pi \cdot h}{3}\left(R^2 - h^2\right)$$

b) Encuentre las dimensiones de este cono (el radio de la base y la altura) para que su volumen sea máximo y compruebe que se trata realmente de un máximo.
[0,5 puntos por el apartado *a*; 1,5 puntos por el apartado *b*]
Solución:
a) Por Pitágoras: $R^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - h^2$.
Como el volumen del cono es:

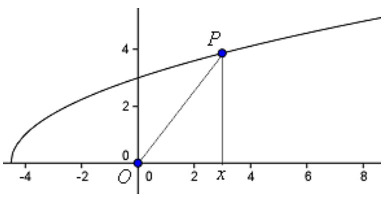
$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi r^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot\pi\left(R^2 - h^2\right)h \Rightarrow V = \frac{\pi \cdot h}{3}\left(R^2 - h^2\right)$$

b) El es función de la altura: $V(h) = \frac{\pi \cdot h}{3}\left(R^2 - h^2\right) = \frac{\pi}{3}\left(R^2 h - h^3\right)$.
El máximo de $V(h)$ se da en las soluciones de $V´(h) = 0$ que hacen negativa a $V´´(h)$.
Derivando,

$$V´(h) = \frac{\pi}{3}\left(R^2 - 3h^2\right), \text{ que se anula cuando } R^2 - 3h^2 = 0 \Rightarrow h = \frac{R}{\sqrt{3}}.$$

Como $V´´(h) = \frac{-6\pi h}{3} = -2\pi h$ es siempre negativa, para ese valor de $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$ se da el máximo buscado.

12. Valencia, junio 2013
Se estudió el movimiento de un meteorito del sistema solar durante un mes. Se obtuvo que la ecuación de su trayectoria T es $y^2 = 2x + 9$, siendo $-4,5 < x < 8$ e $y \geq 0$, estando situado el Sol en el punto (0, 0). Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) La distancia del meteorito al Sol desde un punto P de su trayectoria cuya abscisa es x.
b) El punto P de la trayectoria T donde el meteorito alcanza la distancia mínima al Sol.
c) Distancia mínima del meteorito al Sol.
Nota**.** En los tres resultados sólo se dará la expresión algebraica o el valor numérico obtenido, sin mencionar la unidad de medida por no haber sido indicada en el enunciado.
Solución:
a) El meteorito sigue una trayectoria que es un arco de parábola; como se indica en la figura adjunta.



La distancia del $P(x, y) \equiv P\left(x, \sqrt{2x+9}\right)$ al Sol, $O(0, 0)$, será:

$$d(P,O) = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{2x+9}\right)^2}$$

Es una función de x: $d(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 9}$.

b) El mínimo de $d(x)$ se da en las soluciones de $d'(x)=0$ que hacen positiva a $d''(x)$.
Derivando,

$$d'(x)=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+9}}$$, que se anula cuando $2x+2=0 \Rightarrow x=-1$.

En vez de hacer la segunda derivada puede verse que la función $d(x)$ decrece a la izquierda de $x=-1$ y crece a su derecha.
En efecto:

- Si $x<-1$, $d'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
- Si $x>-1$, $d'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crece. Por tanto, en $x=-1$ se da el mínimo buscado.

El punto de mínima distancia es $P\left(-1, \sqrt{2(-1)+9}\right) \equiv \left(-1, \sqrt{7}\right)$.

c) La distancia mínima es $d(-1)=\sqrt{(-1)^2+2\cdot(-1)+9}=\sqrt{8}$.

<u>**13**. Valencia, junio 2013</u>
Dada la función *f* definida por $f(x)=\sin x$, para cualquier valor real *x*, se pide obtener <u>razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>:
a) La ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x=\pi/6$.
b) La ecuación de la recta normal a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x=\pi/3$. Se recuerda que la recta normal a una curva en un punto *P* es la recta que pasa por ese punto *P* y es perpendicular a la recta tangente a la curva en el punto *P*.
c) El ángulo formado por las rectas determinadas en los apartados a) y b).
<u>Solución</u>:
a) La ecuación de la recta tangente es $y-f(\pi/6)=f'(\pi/6)(x-\pi/6)$.

$$f(x)=\sin x \to f(\pi/6)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}; \quad f'(x)=\cos x \to f'(\pi/6)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La tangente es: $y-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{6-\pi\sqrt{3}}{12}$.

b) La tangente en el punto de abscisa $x=\pi/3$ es: $y-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

La normal será: $y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-2\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow y=-2x+\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{6}$.

c) Las ecuaciones paramétricas de las rectas obtenidas son:

$$r \equiv y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{6-\pi\sqrt{3}}{12} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x= t \\ y=\dfrac{6-\pi\sqrt{3}}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \to \vec{v}_r=\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$s \equiv y=-2x+\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{6} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x= t \\ y=\dfrac{4\pi+3\sqrt{3}}{6}-2t \end{cases} \to \vec{v}_s=(1,-2)$$

Por tanto:

$$\cos(r, s)=\cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s)=\left|\frac{\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s}{|\vec{v}_r|\cdot|\vec{v}_s|}\right| = \left|\frac{(1, \sqrt{3}/2)\cdot(1,-2)}{\sqrt{1+3/4}\sqrt{1+4}}\right|=\left|\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{35/4}}\right| = 0{,}2475 \to 75{,}67^{\circ}.$$

14. Extremadura, junio 2013

Estudia si la recta $y = 4x - 2$ es tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ en alguno de sus puntos.

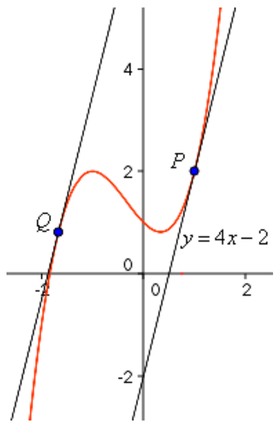
Solución:

La recta será tangente si la derivada de la función puede tomar el valor 4, que es la pendiente de la recta.

$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

La derivada vale 4 si $3x^2 + 2x - 1 = 4 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{6} = \begin{cases} 1 \\ -5/3 \end{cases}$$



La recta $y = 4x - 2$ puede ser tangente de la curva en dos puntos, cuyas abscisas son $x = 1$ y $x = -4/3$.

Por tanto, en los puntos $P(1, 2)$ y $Q(-5/3, 22/27)$. Pero, para que sea tangente, además, la recta debe pasar por alguno de esos puntos. Como el punto (1, 2) pertenece a la recta, se concluye que la recta es tangente a la curva en ese punto $P(1, 2)$.

(Véase la figura).

15. Extremadura, junio 2013

a) Halla, utilizando la fórmula de integración por partes, una primitiva de la función $f(x) = 1 + \ln x$.

b) Calcula el área de la región plana limitada por la curva $y = \ln x$, la recta horizontal $y = -1$, y las rectas $x = 1$ y $x = e$.

Solución:

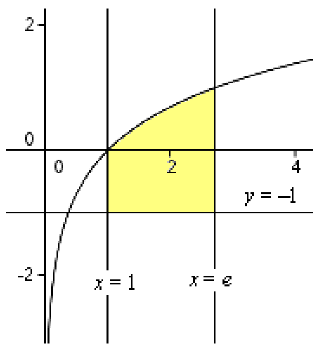
a) La integral $\int (1 + \ln x)\, dx = \int dx + \int \ln x\, dx = x + \int \ln x\, dx$.

La segunda integral se hace por partes, tomando:

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx; \quad dv = dx \Rightarrow v = x \rightarrow \int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x$$

Luego:

$$\int (1 + \ln x)\, dx = x + \int \ln x\, dx = x + x \ln x - x + c = x \ln x + c.$$



b) El recinto es el sombreado en la figura adjunta.

$$\int_1^e (\ln x - (-1))\, dx = \int_1^e (\ln x + 1)\, dx =$$

$$= (x \ln x)\Big|_1^e = e \ln e - 1 \ln 1 = e$$

Por el apartado a): $\int (\ln x + 1)\, dx = x \ln x - x + x = x \ln x$.

16. Extremadura, junio 2013

3. a) Enuncia el teorema de Bolzano.

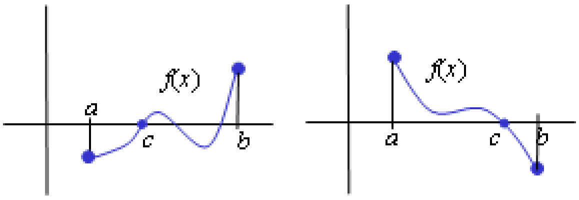
b) Demuestra que alguna de las raíces del polinomio $P(x) = x^4 - 8x - 1$ es negativa.

c) Demuestra que $P(x)$ tiene también alguna raíz positiva.

Solución:

a) Teorema de Bolzano:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado [*a*, *b*] y toma valores de distinto signo en sus extremos ($f(a) < 0 < f(b)$ o $f(a) > 0 > f(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.



Significado geométrico: si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ corta al eje *OX* en un punto, al menos. (Análogamente si $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$.)

Significado algebraico: si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una solución entre *a* y *b*. Esa solución será el punto *c* cuya existencia afirma el teorema.

b) La función $P(x) = x^4 - 8x - 1$ es continua en todo **R**.

Además: $P(-1) = 1 + 8 - 1 = 8 > 0$; $P(0) = -1 < 0$

Por tanto, por Bolzano la función $P(x) = x^4 - 8x - 1$ corta al eje entre –1 y 0 (que es un número negativo). Esto es, el polinomio $P(x) = x^4 - 8x - 1$ tiene una raíz negativa.

c) Como $P(0) = -1 < 0$ y $P(3) = 81 - 24 - 1 > 0$, el polinomio $P(x) = x^4 - 8x - 1$ tiene una raíz positiva, ente 0 y 3.

(Si se quiere estrechar el intervalo, puede verse que como $P(2) = -1 < 0$ y $P(3) > 0$, se puede asegurar que entre 2 y 3 existe una raíz).

17. Extremadura, junio 2013

Calcule la siguiente integral de una función racional: $\int \frac{3x}{x^2 + x - 2} dx$.

Solución:

Se hace por descomposición en fracciones simples.

Como las raíces del denominador son $x = 1$ y $x = -2$: $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, puede escribirse la igualdad:

$$\frac{3x}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

Con esto:

$$3x = A(x+2) + B(x-1) \Rightarrow 3x = 2A - B + (A+B)x \Rightarrow \begin{cases} 2A - B = 0 \\ A + B = 3 \end{cases} \Rightarrow A = 1;\ B = 2.$$

Por tanto:

$$\int \frac{3x}{x^2 + x - 2} dx = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2}{x+2} dx = \ln(x-1) + 2\ln(x+2) + c$$

<u>**18**. Canarias, junio 2013.</u>

Determina los valores de *a* y *b* para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{ax} & x\le 0 \\ 2a+b\sin x & 0<x \end{cases}$ sea derivable.

<u>Solución</u>:

Por separado, para cada intervalo de definición, las funciones dadas son continuas y derivables. El único punto conflictivo es $x = 0$, en donde las funciones difieren a izquierda y derecha.

En ese punto la función está definida, siendo $f(0)=e^{a\cdot 0}=1$; para que sea continua, además, debe tener límite en $x = 0$ y coincidir con su valor de definición.

Por la izquierda: Si $x\to 0^-$, $f(x)=e^{ax}\to 1$.

Por la derecha: Si $x\to 0^+$, $f(x)=2a+b\sin x\to 2a$.

Como ambos límites deben ser iguales: $1 = 2a \Rightarrow a = 1/2$.

Luego, la función continua es: $f(x)=\begin{cases} e^{x/2} & x\le 0 \\ 1+b\sin x & 0<x \end{cases}$.

Salvo en $x = 0$, su derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{x/2} & x<0 \\ b\cos x & 0<x \end{cases}$$

La función será derivable en $x = 0$ cuando coinciden las derivadas laterales.

Si $x\to 0^-$, $f'(x)=\frac{1}{2}e^{x/2}\to \frac{1}{2}$

Si $x\to 0^+$, $f'(x)=b\cos x\to b$

Las derivadas son iguales cuando $b=\frac{1}{2}$.

Por tanto, la función derivable es: $f(x)=\begin{cases} e^{x/2} & x\le 0 \\ 1+\frac{1}{2}\sin x & 0<x \end{cases}$.

<u>**19**. Canarias, junio 2013.</u>

Resolver las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{5x+\sqrt{3x}}{x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{6\sin x}{5-3\cos x}\,dx$

<u>Solución</u>:

a) $$\int \frac{5x+\sqrt{3x}}{x^2}\,dx = \int\left(\frac{5}{x}+\sqrt{3}x^{-3/2}\right)dx = 5\ln x+\frac{\sqrt{3}}{-1/2}x^{-1/2}+c = 5\ln x-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x}}+c .$$

b) Si se hace el cambio $\cos x=t \Rightarrow -\sin x dx=dt$.

Además: si $x = \pi$, $\cos\pi=t \Rightarrow t = -1$; si $x = 0$, $\cos 0=t \Rightarrow t = 1$.

Luego:

$$\int_0^{\pi}\frac{6\sin x}{5-3\cos x}\,dx = \int_1^{-1}\frac{-6}{5-3t}\,dt = 2\int_1^{-1}\frac{-3}{5-3t}\,dt = 2\ln(5-3t)\Big|_1^{-1} = 2(\ln 8-\ln 2)=4\ln 2 .$$

20. Canarias, junio 2013.

a) Determinar los valores de *a*, *b* y *c* sabiendo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene extremos relativos en *x* = 1 y *x* = –3, y que corta a su función derivada en *x* = 0. Determinar asimismo la naturaleza de los extremos. (1,25 puntos)

b) Calcular el límite:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x-3}-1} \quad \text{(1,25 puntos)}$$

Solución:

a) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

En los extremos relativos la derivada vale 0 $\Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \to 3 + 2a + b = 0 \\ f'(-3) = 0 \to 27 - 6a + b = 0 \end{cases}$.

Resolviendo el sistema se obtiene: *a* = 3 y *b* = –9.

Luego: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + c$; y $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$.

Como $f(x)$ y $f'(x)$ se cortan en el origen $\Rightarrow$ $f(0) = f'(0)$ $\Rightarrow c = -9$.

Por tanto $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 9$.

Para determinar la naturaleza de los extremos se hace la derivada segunda y se estudia el signo en esos puntos.

$$f''(x) = 6x + 6$$

Como $f''(-3) = -18 + 6 < 0$, en *x* = –3 se da un máximo relativo.

Como $f''(0) = 6 > 0$, en *x* = 0 se da un mínimo relativo.

b) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x-3}-1} = \left[\frac{0}{0}\right]$. La indeterminación se resuelve multiplicando el numerador y el denominador por las expresiones conjugadas de ambos términos.

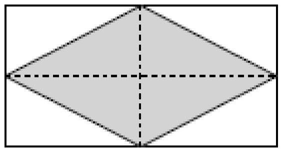
$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x-3}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{2x-3}+1\right)}{\left(\sqrt{2x-3}-1\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{2x-3}+1\right)} = \text{(operando)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\left(\left(\sqrt{x+2}\right)^2 - 2^2\right)\left(\sqrt{2x-3}+1\right)}{\left(\left(\sqrt{2x-3}\right)^2 - 1^2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\left(\sqrt{2x-3}+1\right)}{(2x-4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \text{(simplificando)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{2x-3}+1\right)}{2\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

21. Canarias, junio 2013.

La figura siguiente muestra un rombo inscrito dentro de un rectángulo, de forma que los vértices del rombo se sitúan en los puntos medios de los lados del rectángulo. El perímetro del rectángulo es de 100 metros. Calcular las longitudes de sus lados para que el área del rombo inscrito sea máxima.



Solución:

Si x es la base del rectángulo e y su altura, se tiene que: $x+y=50 \Rightarrow y=50-x$.

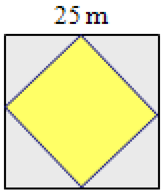
La base y la altura del rectángulo coinciden con las diagonales, D y d, del rombo, cuya área viene dada por:

$$A=\frac{D\cdot d}{2} \Rightarrow A(x)=\frac{x\cdot(50-x)}{2}=\frac{50x-x^2}{2}$$

El máximo de $A(x)$ se da en las soluciones de $A'(x)=0$ que hacen negativa a $A''(x)$.

Derivando,

$$A'(x)=\frac{50-2x}{2}=0 \Rightarrow x=25.$$



Como $A''(x)=-1$, para el valor hallado se da el máximo buscado.

Por tanto, se trata de un rombo inscrito en un cuadrado de lado 25 m.

22. La Rioja, junio 2013

Dependiendo de los valores de a, estudia continuidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{(e^x-1)^2}{e^{x^2}-1} & \text{si } x\neq 0 \\ a & \text{si } x=0 \end{cases}.$$

Solución:

La función será continua en $x = 0$ cuando $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=a$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{e^{x^2}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=\lim_{x\to 0}\frac{2(e^x-1)e^x}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x}{xe^{x^2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-e^x}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=\frac{2-1}{1+0}=1.$$

Por tanto, $a = 1$.

<u>**23**. La Rioja, junio 2013</u>

Enuncia el teorema del valor medio de Lagrange. Para la función:

$$f(x)=\begin{cases} x\sin x & \text{si } x\le \pi \\ a\cos x+b & \text{si } x>\pi \end{cases}.$$

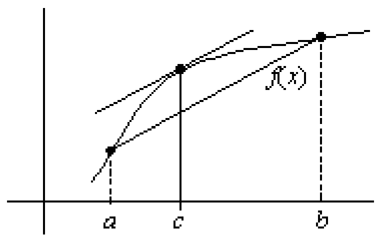
i) Estudia la derivabilidad de $f(x)$ en función de *a* y *b*; expresa la función derivada $f'(x)$ donde exista.

ii) Calcula el área que determina la función $f(x)$ en el intervalo [0, π].

<u>Solución</u>:

Teorema de Lagrange. Si $f(x)$ es continua en [*a*, *b*] y derivable en (*a*, *b*), entonces existe algún punto *c* ∈ (*a*, *b*) tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

<u>Interpretación geométrica</u>: existe un punto perteneciente al intervalo en el que la tangente a $f(x)$ es paralela a la secante que pasa por los puntos de abscisa *a* y *b*.



i) Por separado, para cada intervalo de definición, las funciones dadas son continuas y derivables. El único punto conflictivo es *x* = π, en donde las funciones difieren a izquierda y derecha.

Será continua cuando $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x)$.

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x)=\lim_{x\to\pi^-}(x\sin x)=\pi\sin\pi=0$$

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x)=\lim_{x\to\pi^+}(a\cos x+b)=a\cos\pi+b=-a+b$$

Por tanto, debe cumplirse que $-a+b=0 \Rightarrow a=b$.

Será derivable cuando también se cumpla que $\lim\limits_{x\to\pi^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to\pi^+} f'(x)$.

Salvo en *x* = π, la derivada es: $f'(x)=\begin{cases} \sin x+x\cos x & \text{si } x<\pi \\ -a\sin x & \text{si } x>\pi \end{cases}$.

Luego:

$$\lim_{x\to\pi^-} f'(x)=\lim_{x\to\pi^-}(\sin x+x\cos x)=-\pi;\quad \lim_{x\to\pi^+} f'(x)=\lim_{x\to\pi^+}(-a\sin x)=0$$

Como esos valores no son iguales, la función nunca será derivable en *x* = π.

ii) Como la función $f(x)=x\sin x$ no es negativa en el intervalo [0, π], el área pedida viene dada por el valor de la integral $\int_0^\pi x\sin x\,dx$.

Una primitiva se obtiene por el método de integración por partes.

Haciendo:

$$x=u \Rightarrow dx=du;\qquad \sin x dx=dv \Rightarrow v=\int \sin x dx=-\cos x$$

Luego, $\int x\sin x dx=-x\cos x+\int \cos x dx=-x\cos x+\sin x$.

De donde:

$$\int_0^\pi x\sin x\,dx = (-x\cos x+\sin x)\Big|_0^\pi=-\pi\cdot(-1)=\pi \text{ u}^2.$$

<u>**24**. La Rioja, junio 2013</u>

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si } x<0 \\ 5\sin x-2\cos x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$.

a) Determine el valor de *b* para que la función sea continua en el punto *x* = 0. (1 punto)
b) Calcule el valor de *a* y *b* para que la función sea derivable en el punto *x* = 0. (1,5 p)

<u>Solución</u>:

a) Por separado, para cada intervalo de definición, las funciones dadas son continuas y derivables. El único punto conflictivo es *x* = 0, en donde las funciones difieren a izquierda y derecha.

Será continua cuando $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax+b)=b$. $\qquad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(5\sin x-2\cos x)=-2$.

Por tanto, debe cumplirse que $b=-2$.

La función continua es: $f(x)=\begin{cases} ax-2 & \text{si } x<0 \\ 5\sin x-2\cos x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$.

b) Será derivable cuando también se cumpla que $\lim\limits_{x\to \pi^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to \pi^+} f'(x)$.

Salvo en *x* = 0, la derivada es: $f'(x)=\begin{cases} a & \text{si } x<0 \\ 5\cos x+2\sin x & \text{si } x>0 \end{cases}$.

Luego:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} a=a$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(5\cos x+2\sin x)=5 \Rightarrow a=5$.

La función derivable es: $f(x)=\begin{cases} 5x-2 & \text{si } x<0 \\ 5\sin x-2\cos x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$.

<u>**25**. Madrid, junio 2013</u>

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-3)^2}$, se pide:

a) (1 punto) Halla las asíntotas de su gráfica.
b) (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa *x* = 2.

<u>Solución</u>:

a) La función tiene dos asíntotas, una vertical y otra oblicua.

En efecto:

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3}{(x-3)^2}=\left[\dfrac{27}{0}\right]=\infty \Rightarrow$ La recta *x* = 3 es asíntota vertical.

Por otra parte, la recta $y=mx+n$ es asíntota oblicua de la curva $f(x)$ cuando se cumple que:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x-3)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-6x^2+9x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L'H)=...=1.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-6x+9}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x^2-9x}{x^2-6x+9}\right)=6.$$

La asíntota oblicua es la recta *y* = *x* + 6.

b) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es:

$$y - f(2) = f'(2)(x-2)$$

Derivando:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-3)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2(x-3)^2 - x^3 \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{3x^2(x-3) - 2x^3}{(x-3)^3}$$

$$f(2) = \frac{8}{(-1)^2} = 8\,; \qquad f'(2) = \frac{-12-16}{(-1)^3} = 28\,.$$

La recta tangente es:

$$y - 8 = 28(x-2) \Rightarrow y = 28x - 48\,.$$

<u>**26**. Madrid, junio 2013</u>

Calcula las siguientes integrales:

a) (1 punto) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2+9}\,dx$ b) (1 punto) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3}\,dx$

<u>Solución</u>:

a) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2+9}\,dx = \int\left(\frac{x}{x^2+9} - \frac{3}{x^2+9}\right)dx = \int \frac{x}{x^2+9}\,dx - \int \frac{3}{x^2+9}\,dx\,.$

La primera integral es casi inmediata: es un neperiano; en ella hay que ajustar constantes.

La segunda integral también es casi inmediata, aunque algo más difícil: es un arcotangente. También hay que ajustar constantes.

$$\int \frac{x}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right) + c_1\,.$$

$$\int \frac{3}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{3}{\left((x/3)^2+1\right)}\,dx = \frac{3}{9}\int \frac{3\cdot(1/3)}{\left((x/3)^2+1\right)}\,dx = \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c_2\,.$$

Por tanto:

$$\int \frac{x-3}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right) - \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c\,.$$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3}\,dx = \int_1^2\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} + x\right)dx = \int_1^2\left(3x^{-3} - \frac{1}{x} + x\right)dx =$

$$= \left(-\frac{3}{2x^2} - \ln x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \left(-\frac{3}{8} - \ln 2 + 2\right) - \left(-\frac{3}{2} - \ln 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{21}{8} - \ln 2$$

<u>**27**. Madrid, junio 2013</u>
Dada la función $f(x)=2\cos^2 x$, se pide:

a) (1 punto) Determina los extremos absolutos de $f(x)$ en $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

b) (1 punto) Determina los puntos de inflexión de $f(x)$ en $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

c) (1 punto) Calcula $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$.

<u>Solución</u>:
a) Derivando:

$$f(x)=2\cos^2 x \Rightarrow f'(x)=2\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x)=-2\sin(2x).$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow -2\sin(2x)=0 \Rightarrow x=0,\ x=\pi/2,\ x=-\pi/2.$$

Derivando otra vez: $f''(x)=-4\cos(2x)$.
Como $f''(0)=-4\cos 0=-4 \Rightarrow$ en $x = 0$ se da un máximo de la función.
Como $f(x)=2\cos^2 x\geq 0$ para todo x, y se cumple que $f(\pi/2)=2\cos^2(\pi/2)=0$, y lo mismo para $-\pi/2$, en esos dos puntos la función tiene sendos mínimos.

b) $f''(x)=-4\cos(2x)=0 \Rightarrow x=\pi/4,\ x=-\pi/4$.
Haciendo la derivada tercera: $f'''(x)=8\sin(2x)$.
Como $f'''(\pi/4)=8\sin(\pi/2)=8\neq 0$ y $f'''(-\pi/4)=8\sin(-\pi/2)=-8\neq 0$, en ambos puntos se da una inflexión de la función.

c) Teniendo en cuenta que $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$, se tiene:

$$\int 2\cos^2 x dx=\int 2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\int(1+\cos 2x)dx=x+\frac{1}{2}\sin 2x+k.$$

Por tanto:

$$\int_0^{\pi/2} 2\cos^2 x\,dx=\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}\ \text{u}^2.$$

<u>**28**. Asturias, junio 2013.</u>
Dada la función $f(x)=(x-a)\cos(x)$, busque el valor del número real a sabiendo que $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx=\frac{\pi}{2}-2$ (2,5 puntos)

<u>Solución</u>:
Obtención de una primitiva de $f(x)=(x-a)\cos(x)$.

$$\int (x-a)\cos(x)dx=\int x\cos x dx-a\int\cos x dx.$$

La primera de esas dos integrales se hace por partes; la segunda es inmediata.

Haciendo:

$x = u \Rightarrow dx = du$; $\quad dv=\cos x dx \Rightarrow v=\sin x$.

se tiene:

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x$$

Por tanto:

$$\int (x-a)\cos(x)dx = \int x\cos x dx - a\int \cos x dx = x\sin x + \cos x - a\sin x .$$

Luego:

$$\int_0^{\pi/2} (x-a)\cos(x)dx = (x\sin x + \cos x - a\sin x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - a - 1.$$

Como se desea que $\int_0^{\pi/2} f(x)\, dx = \frac{\pi}{2} - 2 \Rightarrow \frac{\pi}{2} - 2 = \frac{\pi}{2} - a - 1 \Rightarrow a = 1.$

29. Asturias, junio 2013.

Considere las curvas $f(x) = x^3 - 3x - 2$ y $g(x) = x^2 - x - 2$.

a) Encuentre sus puntos de intersección. (0,5 puntos)

b) Represente el recinto limitado que encierran entre ellas. (1 punto)

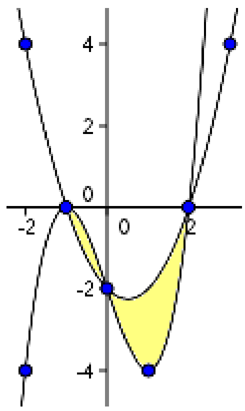
c) Encuentre el área del recinto limitado por las dos curvas. (1 punto)

Solución:

a) Se resuelve la ecuación $f(x) = g(x)$: $x^3 - 3x - 2 = x^2 - x - 2 \Rightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0; x = -1; x = 2.$

Los puntos de intersección serán: (–1, 0); (0, –2); (2, 0).



b) La representación se puede hacer dando más valores.

También podría verse que $f(x) = x^3 - 3x - 2$ tiene un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$, pues: $f'(x) = 3x^3 - 3 = 3(x^2 - 1)$ se anula en esos puntos.

c) El recinto es el sombreado en la figura.

Su área viene dada por:

$$A = \int_{-1}^{0} \left(x^3 - 3x - 2 - (x^2 - x - 2)\right)dx + \int_0^2 \left(x^2 - x - 2 - (x^3 - 3x - 2)\right)dx$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)dx + \int_0^2 (-x^3 + x^2 + 2x)dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) + \left(-4 + \frac{8}{3} + 4\right) = \frac{37}{12} \text{ u}^2.$$

30. Asturias, junio 13.

Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\tan(3x)}$. (2,5 puntos)

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\tan(3x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \text{(L´H)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{1+2x}}{(1+\tan^2(3x))\cdot 3} = \frac{2}{3}.$$

<u>**31**. Asturias, junio 2013.</u>

Considere la curva $y=\frac{1}{3}x^3-4x^2-\frac{2}{3}x-4$.

a) Halle los puntos de la curva en que la recta tangente es paralela a la recta $0=2x+3y-4$. (2 puntos)

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva en x = 1. (0,5 puntos)

<u>Solución</u>:

a) La recta dada, $0=2x+3y-4 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$.

Hay que buscar los puntos de la curva en los que su derivada valga $-\frac{2}{3}$, pues ese es el valor de la pendiente de todas las paralelas a la recta dada.

$$y=\frac{1}{3}x^3-4x^2-\frac{2}{3}x-4 \Rightarrow y'=x^2-8x-\frac{2}{3}$$

La derivada vale $-\frac{2}{3}$ si $x^2-8x-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3} \Rightarrow x^2-8x=0 \Rightarrow x=0$ o $x=8$.

Si $x=0$, $y=-4 \to$ punto $(0, -4)$. Si $x=8$, $y=-284/3 \to$ punto $(8, -284/3)$.

b) La ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa x = 1 es:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1).$$

Como $f(1)=-\frac{25}{3}$ y $f'(1)=-\frac{23}{3}$, la tangente pedida es:

$$y+\frac{25}{3}=-\frac{23}{3}(x-1) \Rightarrow y=-\frac{23}{3}x-\frac{2}{3}.$$

<u>**32**. Asturias, junio 2013.</u>

Sea la función $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}4x+12 & \text{si } x\le -1\\ x^2-4x+3 & \text{si } x>-1\end{cases}$.

a) Haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función f. (0,75 puntos)

b) Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función f, el eje de abscisas y la recta x = 2. (1,75 puntos)

<u>Solución</u>:

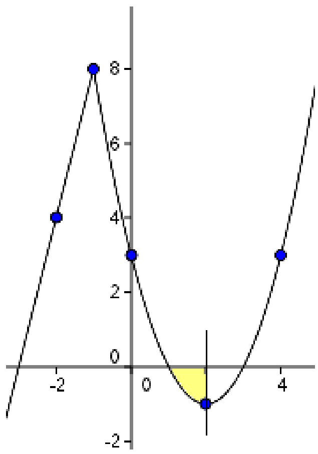
a) La representación se puede hacer dando algunos valores, pues las funciones que intervienen son una recta y una parábola.

Algunos puntos son:

Recta $\to$ (–2, 4); (–1, 8).

Parábola $\to$ En primer lugar se observa que es continua, pues si $x\to -1^+$, $f(x)\to 8$.

Puntos: (0, 3); (1, 0); (2, –1); (4, 3). (Figura adjunta).



b) El recinto es el sombreado en la figura.

Su área viene dada por:

$$A=-\int_1^2\left(x^2-4x+3\right)dx=-\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_1^2=$$

$$=-\left(\frac{8}{3}-8+6\right)+\left(\frac{1}{3}-2+3\right)=\frac{2}{3}\ \text{u}^2.$$

<u>**33**. Asturias, junio 2013.</u>

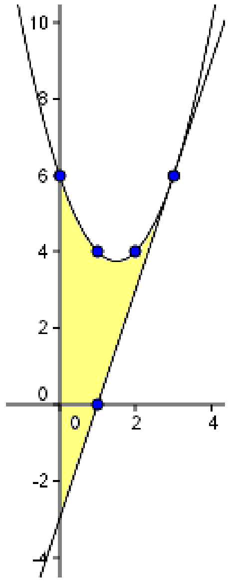
Sea la parábola $y = x^2 - 3x + 6$.

a) Halle la ecuación de la tangente a la gráfica de esa curva en el punto de abscisa *x* = 3. (0,5 puntos)

b) Haga un dibujo aproximado del recinto limitado por la gráfica de la parábola, el eje *OY* y la recta tangente hallada anteriormente. (0,5 puntos)

c) Calcule el área del recinto anterior. (1,5 puntos)

<u>Solución</u>:



a) La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa *x* = 3 es:

$y - f(3) = f'(3)(x-3)$.

$y = x^2 - 3x + 6 \Rightarrow y' = 2x - 3$.

Como $f(3) = 6$ y $f'(3) = 3$, la tangente pedida es:

$y - 6 = 3(x-3) \Rightarrow y = 3x - 3$.

b) Dando valores se obtiene la figura adjunta.

Puntos:

Parábola → (0, 6); (1, 4); (2, 4); (3, 6).

Tangente → (1, 0); (3, 6).

El recinto es el sombreado.

c) Su área viene dada por:

$$A = \int_0^3 \left(x^2 - 3x + 6 - (3x-3)\right)dx = \int_0^3 \left(x^2 - 6x + 9\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]_0^3 = 9 \text{ u}^2.$$

<u>**34**. Asturias, junio 2013.</u>

Calcule $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{1/(1-x)}$. (2,5 puntos)

<u>Solución</u>:

$\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{1/(1-x)} = [1^\infty] \to$ Forma indeterminada. Se resuelve aplicando logaritmos.

(<u>Nota</u>: habría que exigir que $x \to 1^+$).

$$\ln\left(\lim_{x\to 1}(2-x)^{1/(1-x)}\right) = \lim_{x\to 1}\ln\left((2-x)^{1/(1-x)}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ln(2-x) = [\infty\cdot 0] =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{1-x} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Aplicando la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{1-x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{-1}{2-x}}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{1/(1-x)} = e$.

35. País Vasco, junio 2013.

Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{2}{x^2-5x+6}$. Obtener razonadamente:

a) El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

c) Realizar un dibujo aproximado de la gráfica de dicha función.

Solución:

a) La función no está definida cuando $x^2-5x+6=0 \to x=2$ o $x=3$.

Por tanto: Dom(f) = **R** – {2, 3}

La función tiene dos asíntotas verticales. Las rectas $x = 2$ y $x = 3$, pues:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2}{x^2-5x+6}=\left[\frac{2}{0}\right]=\infty \text{ y } \lim_{x\to 3}\frac{2}{x^2-5x+6}=\left[\frac{2}{0}\right]=\infty.$$

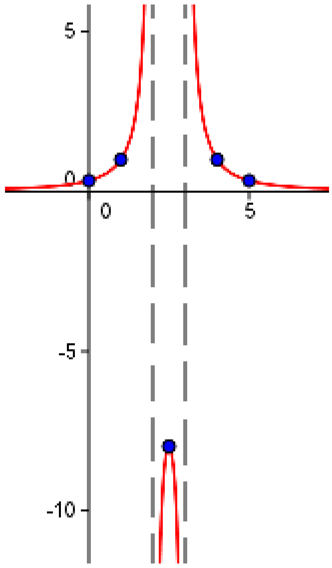
También tiene una asíntota horizontal, la recta $y = 0$, pues $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2-5x+6}=\left[\dfrac{2}{\infty}\right]=0$.

Como la función, para valores muy grandes (tanto positivos como negativos) toma siempre valores positivos, se deduce que la curva se pega a la asíntota, al eje OX, por arriba.

b) Derivando: $f'(x)=\dfrac{-2\cdot(2x-5)}{\left(x^2-5x+6\right)^2} \to$

$\to$ Se anula en $x = 5/2$. Con esto:

- Si $x < 2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece. También se deduce que la curva se pega a la asíntota hacia $+\infty$.
- Si $2 < x < 5/2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece. También se deduce que la curva "aparece" por $-\infty$.
- Si $5/2 < x < 3$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece. Por tanto, en $x = 5/2$ se da un máximo. Además, la curva se "pierde" hacia $-\infty$.
- Si $x > 3$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece. También se deduce que la curva "aparece" por $+\infty$.



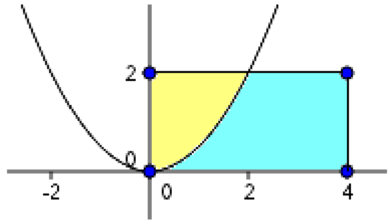
c) Con toda la información anterior y dando algunos valores se puede trazar la gráfica adjunta.

Algunos valores: (0, 1/3); (1, 1); (5/2, –8) $\to$ máximo; (4, 1); (5, 1/3).

36. País Vasco, junio 2013.

La parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ divide al rectángulo de vértices (0, 0), (4, 0), (4, 2) y (0, 2) en dos recintos.
Calcular el área de cada uno de los recintos.
Solución:
La situación es la que se muestra en la figura adjunta.
El área del "triángulo" viene dada por la integral,

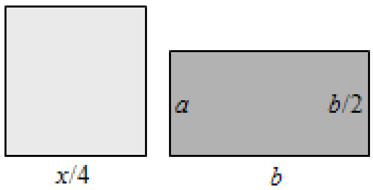
$$\int_0^2 \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \left[2x - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{3}\ \text{u}^2.$$



Como el área del rectángulo vale 8 u^2, la del recinto de la derecha será $8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$ u^2.

37. País Vasco, junio 2013.

Se divide un segmento de longitud 200 cm en dos trozos. Con uno de los trozos se forma un cuadrado y con otro un rectángulo en el que la base es el doble de la altura. Calcula la longitud de cada uno de los trozos con la condición que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.
Solución:
Si *x* es la longitud empleada en la construcción del cuadrado, para el rectángulo se emplearán 200 – *x* cm.
El lado del cuadrado medirá $\frac{x}{4}$, mientras que su superficie será $A_C = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$.



Si *b* es la longitud de la base del rectángulo, y *a* su altura, se cumple que
$2b + 2a = 200 - x$; y como $a = \frac{b}{2} = \frac{16}{3} \Rightarrow 2b + b = 200 - x \Rightarrow b = \frac{200 - x}{3}$ y $a = \frac{200 - x}{6}$.

Por tanto, el área del rectángulo será: $A_R = \frac{200 - x}{3} \cdot \frac{200 - x}{6} = \frac{40000 - 400x + x^2}{18}$.

La suma de ambas áreas es: $A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{40000 - 400x + x^2}{18}$.

El mínimo de $A(x)$ se da en las soluciones de $A´(x) = 0$ que hacen positiva a $A´´(x)$.
Derivando:

$$A´(x) = \frac{2x}{16} + \frac{-400 + 2x}{18} = \frac{17x - 1600}{72} \rightarrow \text{se anula si } x = \frac{1600}{17}.$$

Como $A´´(x) = \frac{17}{72} > 0$, para el valor hallado de *x* se da el mínimo buscado.

Las longitudes de cada trozo será: $x = \frac{1600}{17}$, para el cuadrado; $200 - \frac{1600}{17} = \frac{1800}{17}$, para el rectángulo.

38. País Vasco, junio 2013.

Calcula la siguiente integral $\int \frac{ax+b}{x^2-5x+6}dx$, en función de *a* y de *b*.

Solución:

Por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{ax+b}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

Luego:

$$ax+b=A(x-3)+B(x-2) \Rightarrow ax+b=(A+B)x-3A-2B.$$

Por tanto:

$$\begin{cases} a=A+B \\ b=-3A-2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a=3A+3B \\ b=-3A-2B \end{cases} \Rightarrow B=3a+b;\ A=-2a-b$$

Con esto:

$$\int \frac{ax+b}{x^2-5x+6}dx=\int \frac{-2a-b}{x-2}dx+\int \frac{3a+b}{x-3}dx=(-2a-b)\ln(x-2)+(3a+b)\ln(x-3)+k$$

39. País Vasco, julio 2013.

Una franquicia de tiendas de electrónica ha estimado que sus beneficios semanales (en miles de euros) dependen del número de tiendas *n* que tiene en funcionamiento de acuerdo con la expresión:

$$B(n)=-4n(2n^2-15n+24).$$

Determina razonadamente:

a) El número de tiendas que debe tener para maximizar sus beneficios semanales.

b) El valor de dichos beneficios máximos.

Solución:

a) El máximo de $B(n)$ se da en las soluciones de $B'(n)=0$ que hacen negativa a $B''(n)$.

Operando y derivando:

$$B(n)=-4n(2n^2-15n+24)=-8n^3+60n^2-96n \Rightarrow B'(n)=-24n^2+120n-96;$$

$$B'(n)=0 \Rightarrow -n^2+5n-4=0 \Rightarrow n = 1 \text{ o } n = 4.$$

Derivando otra vez:

$B''(n)=-48n+120 \to$ Como $B''(1)>0$ y $B''(4)<0$, el máximo buscado se da cuando n = 4.

b) Para n = 4, $B(4)=-8\cdot 4^3+60\cdot 4^2-96\cdot 4=64 \to$ 64000 euros.

40. País Vasco, julio 2013.

Dadas las funciones: $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=9x$, $h(x)=25x$.

a) Dibujar el recinto finito, en el primer cuadrante, limitado por las tres gráficas.
b) Calcular el área de dicho recinto.

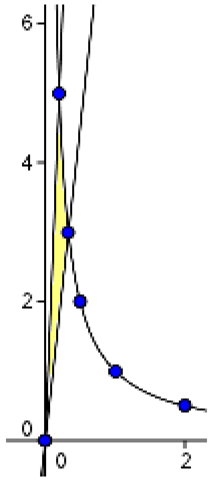
Solución:

a) Las funciones dadas pueden representarse dando valores.

- $f(x)=\frac{1}{x}$ es una hipérbola.

Puntos: (1, 1); (2, 1/2); (5, 1/5); (1/5, 5)…

- $g(x)=9x$ es una recta. Puntos: (0, 0); (1, 9).
- $h(x)=25x$ es otra recta. Puntos: (0, 0); (1, 25).



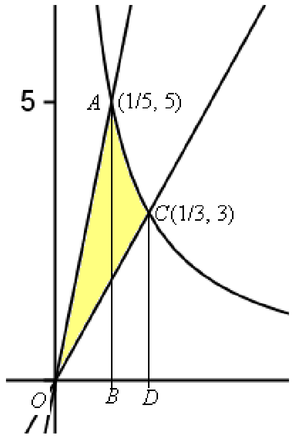
Corte de la hipérbola con las rectas (en el primer cuadrante):

$\frac{1}{x}=9x \Rightarrow 1=9x^2 \Rightarrow x = 1/3 \rightarrow$ Punto $C(1/3, 3)$.

$\frac{1}{x}=25x \Rightarrow 1=25x^2 \Rightarrow x = 1/5 \rightarrow$ Punto $A(1/5, 5)$.

El recinto es el sombreado en la figura adjunta. Hago un cambio de escala para apreciar mejor los detalles.

b) El área del recinto sombreado.
Se puede encontrar como sigue:
Área del recinto *ABC* = área del triángulo *OAB* + área del recinto de extremos *BACD* – área del triángulo *OCD*.



El área del recinto *BACD* es igual a:

$$\int_{1/5}^{1/3}\left(\frac{1}{x}\right)dx = \ln x\Big|_{1/5}^{1/3} = \ln\frac{1}{3}-\ln\frac{1}{5} = -\ln 3+\ln 5 = \ln\frac{5}{3}.$$

El área del triángulo *OAB* = $\frac{(1/5)\cdot 5}{2}=\frac{1}{2}$.

El área del triángulo *OCD* = $\frac{(1/3)\cdot 3}{2}=\frac{1}{2}$.

Por tanto, el área pedida vale $\frac{1}{2}+\ln\frac{5}{3}-\frac{1}{2}=\ln\frac{5}{3}$ u^2.

<u>**41**. País Vasco, julio 2013.</u>

Dadas la función: $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$.

a) Hallar los valores de los parámetros *A*, *B* y *C* para que *f* tenga un extremo en *x* = 0 y otro en *x* = 2. ¿Son únicos dichos parámetros?

b) Determinar de qué tipo de extremo se trata (máximo o mínimo).

c) Representar *f* en el caso *C* = 0.

<u>Solución</u>:

a) Derivando:

$$f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B.$$

- Si *f* tiene extremos en *x* = 0 y en *x* = 2 $\Rightarrow$ $f'(0) = 0$; $f'(2) = 0$.

Por tanto: $0 = B$; $0 = 12 + 4A \Rightarrow A = -3$.

El parámetro C no puede determinarse; por tanto puede tomar cualquier valor.

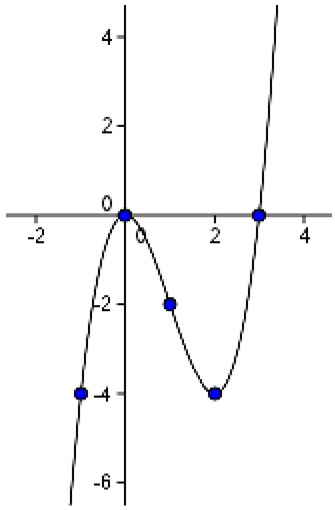
Luego, la función será $f(x) = x^3 - 3x^2 + C$

b) Haciendo la derivada segunda: $f''(x) = 6x - 6$.

Como $f''(0) = -6 < 0$, en *x* = 0 se tiene un máximo relativo.

Como $f''(2) = 6 > 0$, en *x* = 0 se tiene un mínimo relativo.

Puede hacerse notar que en *x* = 1, $f''(x) = 0 \to$ Se da un punto de inflexión.



c) Para *C* = 0, la función es $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Corta al eje *OX* en las abscisas *x* = 0 y *x* = 3.

El máximo relativo se da en el punto (0, 0);

su mínimo relativo, en (2, –4).

Otros puntos son: (–1, –4); (1, –2), PI.

Su gráfica es la adjunta.

<u>**42**. País Vasco, julio 13.</u>

Explicar en qué consiste el método de integración por partes y aplicarlo para calcular las siguientes integrales.

$$\int x\ln(x)dx \quad \text{y} \quad \int x\cos(2x)dx$$

<u>Solución</u>:

- $\int x\ln(x)dx \to$ Tomando: $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$; $\qquad dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

Se tiene:

$$\int x\ln(x)dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c.$$

- $\int x\cos(2x)dx \to$ Haciendo: $x = u \Rightarrow dx = du$; $\qquad dv = \cos(2x)dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}\sin 2x$.

Se tiene:

$$\int x\cos(2x)dx = \frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin(2x)dx = \frac{x}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + c$$

43. UNED, junio 2013.

Se considera la función $f(x)=\dfrac{\ln 7x}{x}$. Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento, posibles puntos de máximo y mínimo relativo y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función *f*. Nota: ln *x* designa el logaritmo neperiano de *x*.

Solución:

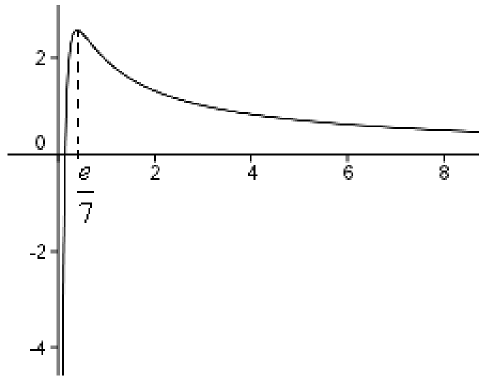
La función está definida sólo para valores de *x* > 0, pues así lo exige el logaritmo.

Asíntotas:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln 7x}{x}=\left[\dfrac{\ln 0^+}{0^+}=\dfrac{-\infty}{0^+}\right]=-\infty \Rightarrow$ La recta *x* = 0 es una asíntota vertical de la curva; que tiende hacia –∞ por la derecha del 0.
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln 7x}{x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=(L´H)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0 \Rightarrow$ La recta *y* = 0 es asíntota horizontal de la curva; que tiende hacia 0 por encima de la asíntota, pues toma valores positivos.

Crecimiento:

$$f´(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln 7x}{x^2}=\dfrac{1-\ln 7x}{x^2}\to \text{se anula cuando } 1-\ln 7x=0 \Rightarrow 7x=e \Rightarrow x=\dfrac{e}{7}.$$



- Si $0<x<\dfrac{e}{7}$, $f´(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $x>\dfrac{e}{7}$, $f´(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- En consecuencia, en $x=\dfrac{e}{7}$ la función tiene un máximo (absoluto). No tiene mínimo.

El valor de la función en $x=\dfrac{e}{7}$ es

$f(e/7)=\dfrac{\ln e}{e/7}=\dfrac{7}{e}\approx 2{,}56.$

44. UNED, junio 2013.

Calcule $\int (x^2+3x-1)^3\,dx$.

Solución:

Operando la expresión $(x^2+3x-1)^3=x^6+9x^5+24x^4+9x^3-24x^2+9x-1$.

Por tanto:

$$\int (x^2+3x-1)^3dx=\int (x^6+9x^5+24x^4+9x^3-24x^2+9x-1)dx =$$

$$=\dfrac{x^7}{7}+\dfrac{3x^6}{2}+\dfrac{24x^5}{5}+\dfrac{9x^4}{4}-8x^3+\dfrac{9x^2}{2}-x+c$$

45. UNED, junio 2013.

Sea la función $f(x)=\dfrac{x^6}{x^6+5}$. Estudie el dominio, asíntotas, crecimiento, posibles puntos de máximo y mínimo relativo y haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función *f*.

Solución:

La función está definida en todo **R**, pues $x^6+5>0$ para todo *x*.

Asíntotas:

- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6}{x^6+5}=1$, pues el numerador y el denominador tienen el mismo grado y el

mismo coeficiente principal. Por tanto, la recta *y* = 1 es asíntota horizontal de la curva; que tiende hacia 1 por debajo de la asíntota, pues el denominador siempre vale más que el numerador.

Crecimiento:

$$f'(x)=\frac{6x^5\cdot\left(x^6+5\right)-x^6\cdot 6x^5}{\left(x^6+5\right)^2}=\frac{30x^5}{\left(x^6+5\right)^2}\to \text{se anula cuando } 30x^5=0 \Rightarrow x=0.$$

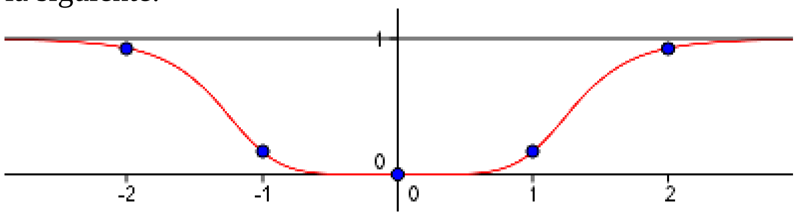
- Si *x* < 0, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
- Si *x* > 0, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

En consecuencia, en $x=0$ la función tiene un mínimo (absoluto). No tiene máximos. En *x* = 0, $f(0)=0$.

Otros puntos son:

(–2, 64/69); (–1, 1/6); (1, 1/6); (2, 64, 69) … Puede observarse que la función es par, simétrica respecto del eje *OY*.

Su gráfica es la siguiente.



<u>**46**. UNED, junio 2013.</u>
Calcule $\int e^x \cos x\, dx$.

<u>Solución</u>:

Para calcular $\int e^x \cos x\, dx$ hay que aplicar dos veces el método de integración por partes.

1) Haciendo:

$u = e^x$ y $dv = \cos x dx \Rightarrow du = e^x dx$; $v = \sin x$

Luego:

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx.$$

La segunda integral, $\int e^x \sin x\, dx$, también debe hacerse por el método de partes.

2) Tomando:

$u = e^x$ y $dv = \sin x dx \Rightarrow du = e^x dx$; $v = -\cos x$

Luego:

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \left(e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)\, dx \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

Pasando la integral del segundo miembro al primero:

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

Por tanto, $\int e^x \cos x\, dx = \dfrac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c$