Apéndice. Recursos informáticos

Uso de herramientas computacionales

En la actualidad, muchas de las tareas matemáticas pueden realizarse con ayuda de máquinas: se puede operar con cualquier tipo de expresión algebraica; las representaciones gráficas adquieren una gran vistosidad y precisión; los estudios estadísticos pueden hacerse con muestras grandes, lo que aumenta la fiabilidad de los resultados; ...
No obstante, conviene advertir que siempre hay que conocer los conceptos matemáticos que se están aplicando: las máquinas facilitan el trabajo, pero siempre hay que saber qué se está haciendo y saber interpretar los resultados. (Una calculadora hace al instante la suma 4 + 6, pero lo importante es saber cómo se llega a 10).

En las páginas que siguen se proponen algunas herramientas que los alumnos de Bachillerato pueden utilizar para comprobar sus cálculos, sobre todo cuando son cálculos engorrosos, repetitivos y sujetos a errores elementales. Más abajo se indica el contenido de las aplicaciones propuestas; naturalmente se trata de sugerencias que pueden ignorarse.
He elegido programas informáticos que se encuentran fácilmente en Internet: GeoGebra; Excel; Mathway; Google; … Suelo indicar el procedimiento que puede seguirse para que la aplicación funcione, aunque siempre hay alternativas diferentes que pueden encontrarse también en Internet.

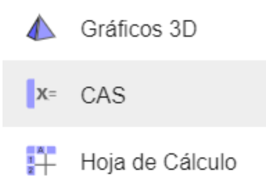
Contenido

1. Operaciones con polinomios

La mayoría de las operaciones matemáticas, con números o con expresiones algebraicas, pueden realizarse con ayuda de ordenadores, móviles o calculadoras.

GeoGebra → Es un programa muy versátil y fácil de manejar.

Multiplicación de polinomios: Ir a cálculo simbólico: CAS.
Escribir Desarrolla(Expresión).



Ejemplo: Cálculo de $\left(4x^3+5x-6\right)\cdot\left(-2x^2+\frac{1}{2}x\right)$.

Escribir: Desarrolla((4x^3+5x–6)*(–2x^2+x/2))

Directamente aparece el resultado → $-8x^5+2x^4-10x^3+\frac{29}{2}x^2-3x$.

Potencia de un binomio: Ir a cálculo simbólico: CAS. Escribir Desarrolla(Expresión).

Ejemplo: Cálculo de $(1-4x)^3$.

Escribir: Desarrolla((1–4x)^3). Aparece → $-64x^3+48x^2-12x+1$.

División de polinomios: teclear “División(polinomio dividendo, polinomio divisor)”.

Ejemplo: Dividir $\left(6x^4+15x^3-17x-2\right):\left(2x^2-3x\right)$

Escribir: División(6x^4+15x^3–17x–2, 2x^2–3x), ENTER → {3x^2+12x+18, 37x –2}; esto es, el cociente y el resto: Cociente, $C(x)=3x^2+12x+18$; resto, $r(x)=37x-2$.

Factorización de polinomios: teclear “Factoriza(polinomio)”.

Ejemplo: Factorizar $P(x)=x^3-4x^2+x+6$.
Escribir: Factoriza[x^3–4x^2+x+6] → se obtiene (x–3)(x–2)(x+1).

Mathway → Puede descargarse como aplicación móvil. Es sencillo de manejar, permite introducir la expresión algebraica de marera simbólica o haciendo una foto.

División de polinomios:

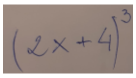
Ejemplo: Dividir $\left(6x^4+15x^3-17x-2\right):\left(2x^2-3x\right)$.
Escribir (6x^4+15x^3–17x–2) : (2x^2–3x) → (aparece un menú de opciones): Con la opción "Dividir usando la división de polinomios larga" se obtiene $3x^2+12x+18+\dfrac{37x-2}{2x^2-3x}$,
lo que indica que el cociente es $c(x)=3x^2+12x+18$, y el resto $r(x)=37x-2$.

Factorización de polinomios:

Ejemplo: Factorizar $P(x)=x^3-4x^2+x+6$.
Escribir x^3–4x^2+x+6 → (aparece un menú de opciones) → Factorizar → (x+1)(x–3)(x–2).

Photomath → Puede descargarse como aplicación móvil; soluciona el problema haciendo una foto.

Ejemplo: Cálculo de $(2x+4)^3$.

Hay que hacer una foto:  → se obtiene $8x^3+48x^2+96x+64$.

Google → Entrando en Google es posible encontrar ayuda.

Ejemplo: Factorizar $P(x)=3x^3+54x^2-2x$.
Si se teclea "factorizar 3x^3 +5x^2–2x y se pulsa ENTER aparece la solución $x(x+2)(3x-1)$.

Ejemplo: Dividir $\left(2x^4+15x^3+3x^2-17x-2\right):\left(x^2-3x\right)$.
Al teclear (2x^4+15x^3+3x^2–17x–2) : (x^2–3x) y pulsar ENTER aparecen varias webs:

Symbolab | Mathway | Tiger Algebra | GeoGebra | CameraMath

que permiten su resolución. Así, con Sy se obtiene:

$$\text{División larga } \frac{\left(2x^4+15x^3+3x^2-17x-2\right)}{\left(x^2-3x\right)}:\quad 2x^2+21x+66+\frac{181x-2}{x^2-3x}$$

que indica que el cociente es $C(x)=2x^2+21x+66$, y el resto, $r(x)=181x-2$.

2. Ecuaciones

Debes conocer los procedimientos para resolver todo tipo de ecuaciones. Estas herramientas deben usarse para comprobar los resultados.

En **GeoGebra** hay que teclear Resuelve(<ecuación>).

Ejemplos: Resolver las ecuaciones:

a) $x^2+3x-5=0$; b) $x^3-9x=0$; c) $\sqrt{2x+5}-2\sqrt{x-1}=1$.

En cada caso hay que teclear lo que se indica:

a) Resuelve(x^2+3x–5=0) → se obtiene {x=–5/2, x = 1}.

b) Resuelve(x^3–9x=0) → {x = 3, x = 0, x = 3}.

c) Resuelve(sqrt(2x+5)–2sqrt(x–1) =1) → {x = 2}.

Ejemplos:

a) Para resolver la ecuación $\frac{x}{x+1}+2=\frac{3x+1}{x}$, hay que teclear:

Resuelve(x/(x+1)+2= (3x+1)/x) → se obtiene {x = –1/2}.

b) La ecuación $\frac{|x|}{2-x}=1$, se teclea: Resuelve (abs(x)/(2–x)=1) → {x=1}.

Ejemplo: Resuelve la ecuación $2\cos^2 x=3\sin x$.

Con GeoGebra, tecleando: Resuelve(2(cosx)^2=3sinx) se obtiene {x = 150º, x = 30º}.

Hay que saber que el conjunto de soluciones es $x=\begin{cases}30^{\circ}+k\cdot 360^{\circ}\\150^{\circ}+k\cdot 360^{\circ}\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}$.

La aplicación **Mathway** da la solución en grados y en radianes.

En este caso se obtiene:

$x=30+360n, 150+360n$, para cualquier número entero n

$x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, \frac{5\pi}{6}+2\pi n$, para cualquier número entero n

3. Inecuaciones

Con **Mathway** se obtiene el conjunto de soluciones de manera muy sencilla.

- Para resolver la inecuación $\frac{-4}{x-3}<1$ se teclea la expresión (o se hace una foto de ella).

Se obtiene: $x<-1$ o $x>3$.

En notación de intervalos: $(-\infty, -1)\cup(3, \infty)$.

Con **GeoGebra**:

- Teclear Resuelve (–4/(x–3)<1) → se obtiene: {x < –1, x > 3}.
- Para resolver $\sqrt{x^2-9}<4$ se teclea Resuelve(sqrt(x^2–9)<4) → $\left\{-\sqrt{13}<x<\sqrt{13}\right\}$.

4. Cálculo con matrices y determinantes

Las operaciones con matrices y determinantes se hacen fácilmente utilizando la aplicación **[Mathway](https://www.mathway.com)**.

Para ello se abre la aplicación y elige el comando matriz, , se escribe la matriz o matrices y se indica la operación deseada. Aparece el cuadro de opciones adjunto.

- Obtener el determinante
- Obtener la inversa
- Obtener la forma escalonada de fila reducida
- Simplificar matriz
- Convertir a un sistema lineal
- Multiplicar
- Obtener la matriz de adjuntos
- Transponer
- Obtener el espacio nulo

Ejemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtener el determinante

Su determinante vale 14**.**

Matriz de los adjuntos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -14 \\ -2 & 3 & 8 \\ 8 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Inversa

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & \frac{3}{14} & -\frac{5}{14} \\ -1 & \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

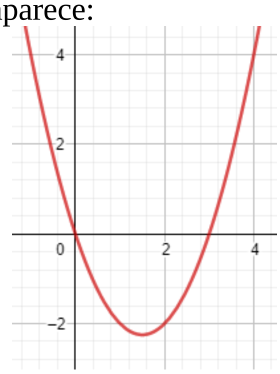
Multiplicación de matrices:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 15 & -5 & 2 \\ 26 & 4 & 10 \\ 10 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

5. Gráfica de una función

Con **GeoGebra**.
Es fácil de manejar. Para dibujar una función basta con teclear su expresión y pulsar ENTER. (Comprueba que la expresión es correcta: paréntesis, exponentes, …).

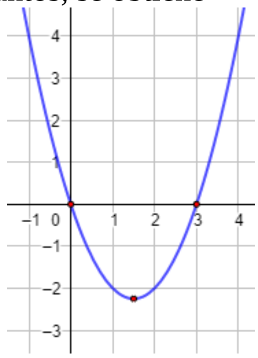
Tecleando x^2–3x aparece:



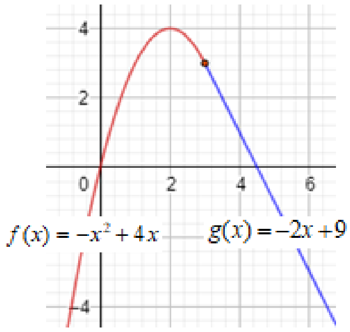
Si se desea cambiar su presentación (escala de ejes, color, grosor del trazo, cuadrícula…) hay que ir a Propiedades:

Elegir las opciones deseadas.

Marcando algunos puntos, se obtiene



Función definida a trozos
Con GeoGebra:



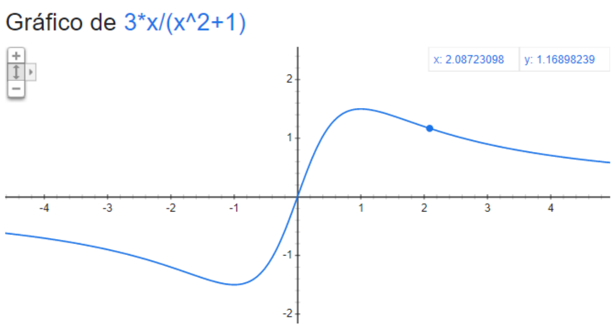
Ejemplo:

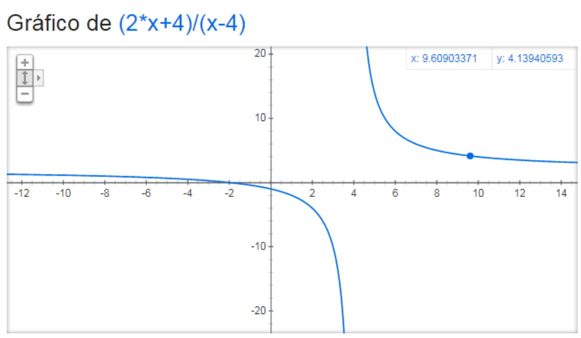
Para dibujar la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x, & \text{si } x \leq 3 \\ -2x + 9, & \text{si } x > 3 \end{cases}$,

Teclear:
si(x≤3, –x^2+4x) → aparece el trozo de parábola;
si(x>3, –2x+9) → aparece la semirrecta.
El punto (3, 3) se dibuja aparte.

Dibujando con **Google**
Puede hacerse un esbozo (con muchas limitaciones gráficas, pero muy rápido).

Ejemplos:
Para las dibujar las funciones que siguen se teclea: 3x/(x^2+1) INTRO, para la de la izquierda; y (2x+4)/(x–4) INTRO, para la de la derecha.
Aparecen las figuras (puede cambiarse su aspecto acercando o alejando la figura, con el ratón; la escala puede variarse "trasteando" en los botones).



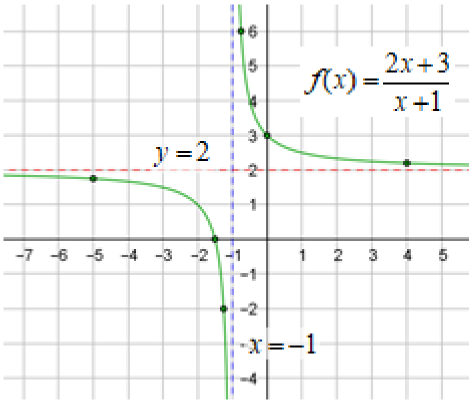


6. Estudio de una función con GeoGebra

A partir de la gráfica de una función es relativamente sencillo deducir su comportamiento: crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad, asíntotas…

Por ejemplo, si se quiere estudiar la función $f(x)=\frac{2x+3}{x+1}$ puede hacerse lo siguiente:

1. Abriendo **GeoGebra** y tecleando (2x+3)/(x+1) se obtiene la gráfica adjunta. (La escala de los ejes, el grosor, estilo de trazo y color de la curva puede modificarse: ir a "propiedades").



Puede observarse que presenta una discontinuidad y que siempre es decreciente.

2. Por la izquierda de –1 la curva se pierde hacia –∞; y por la derecha, aparece por arriba. Esto indica la existencia de una asíntota vertical. Efectivamente, como el denominador se anula en $x = -1$, en ese punto la función se va al infinito. La asíntota es la recta de ecuación $x = -1$. (Se dibuja tecleando x = –1 → línea azul).

3. También se observa que, para valores grandes de x, la curva se acerca cada vez más a la recta $y = 2$, que es su asíntota horizontal (línea roja).

4. Pueden marcarse algunos puntos:
   (0, 3); (4, 11/5); (–0,75, 6); (–3/2, 0); (–1,25, –2); (–5, 1,75)…

7. Límites

Cálculo de las asíntotas de una función

→ Para la función de arriba, $f(x)=\frac{2x+3}{x+1}$, pueden confirmarse sus asíntotas aplicando límites.

Se hace como sigue:

Por la izquierda de –1, $x\to -1^-$: hay que teclear $\text{LímiteIzquierda}\left(\frac{2x+3}{x+1},-1\right)$; sale –∞.

Por la derecha de –1, $x\to -1^+$: hay que teclear $\text{LímiteDerecha}\left(\frac{2x+3}{x+1},-1\right)$; sale ∞.

(Si se calcula $\text{Límite}\left(\frac{2x+3}{x+1},-1\right)$ se obtiene $\boxed{?}$, lo que significa que $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x+3}{x+1}$ no existe).

Estos resultados indican que $x = -1$ es asíntota vertical.

Si se teclea $\text{Límite}\left(\frac{2x+3}{x+1},\text{inf}\right)$ se obtiene 2 ⇒ la recta $y = 2$ es su asíntota horizontal.

→ Para calcular $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x-3}{x^2+5x-6}$, se teclea: $\text{Límite}\left(\frac{3x-3}{x^2+5x-6},1\right)$ → aparece 0.4286.

El resultado que se obtiene aplicando los métodos tradicionales es $\frac{3}{7}$. La aparente disparidad de resultados, que no es tal, pues 3/7 = 0,42857…, solo puede entenderse si se conoce el significado del límite; por eso hay que utilizar los recursos informáticos con sumo cuidado: hay que conocer lo que se está haciendo y hay que saber interpretar los resultados.

Otros ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Teclear Límite((x–2)/(x^2–4), 2) → 0,25.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\sqrt{x}-2}{x^2-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Teclear $\text{Límite}\left(\dfrac{2\sqrt{x}-2}{x^2-1},1\right)$ → = 0,5.

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x=[1]^\infty$. Teclear $\text{Límite}\left(\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x,\infty\right) = 0.1353$

Haciendo el límite por los métodos tradicionales se obtiene e^{-2}, que es un resultado más elegante.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-3}{2x-3}-\dfrac{x^2+5x}{x+2}\right)=[\infty-\infty]$. Teclear $\text{Límite}\left(\dfrac{2x^2-3}{2x-3}-\dfrac{x^2+5x}{x+2},\infty\right)$

→ se obtiene –1,5.

Para los ejemplos que siguen habría que aplicar la regla de L´Hôpital.

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+x^2}{2x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ → $\text{Límite}\left(\dfrac{1-\cos(x)+x^2}{2x^2},0\right) = 0.75$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)=[\infty-\infty]$ → $\text{Límite}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x},0\right) = -0.5$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+4\right)^{1/\ln x}=\left[\infty^0\right]$ → $\text{Límite}\left(\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{\ln(x)}},\infty\right) = 7.39$

Resolviendo la indeterminación por los métodos tradicionales se obtiene e^{-2}, que es el resultado exacto y más elegante: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+4\right)^{1/\ln x}=e^2$.

8. Estudio de una función con Mathway

Mathway a Chegg® service

Cálculo

El cálculo de límites es más sencillo utilizando este programa. Así, para el ejemplo anterior, Hay que ir a "Cálculo" y teclear el límite que se quiere calcular.

Así, para algunos de los ejemplos anteriores:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{x^2+5x-6}$

Forma exacta: $\dfrac{3}{7}$

Forma decimal: $0.\overline{428571}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

Forma exacta: e^2

Forma decimal: $7.38905609\ldots$

→ Igualmente, tecleando la función o haciendo una foto de su expresión, pueden obtenerse múltiples ayudas.

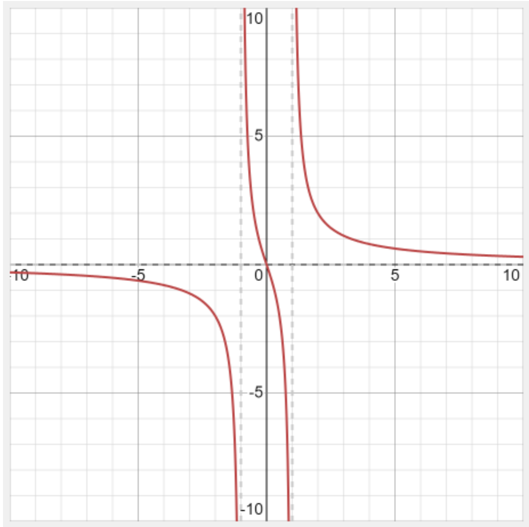
Ejemplo: Si se teclea, $\frac{3x}{(x^2-1)}$

aparece el cuadro:

¿Cómo debo responder?

- Obtener la derivada - d/dx
- Obtener el dominio
- Obtener las asíntotas
- Gráfica
- Dividir
- Simplificar
- Obtener la integral
- Obtener el dominio y el rango
- Factorizar

Pulsando en Gráfica se obtiene:



Otras opciones que aparecen:

Obtener el dominio y el rango

Dominio: $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)\,,\{x|x\neq 1,-1\}$

Rango: $(-\infty,\infty)\,,\{y|y\in\mathbb{R}\}$

Obtener las asíntotas

Asíntotas verticales: $x=-1,1$

Asíntotas horizontales: $y=0$

No hay asíntotas oblicuas

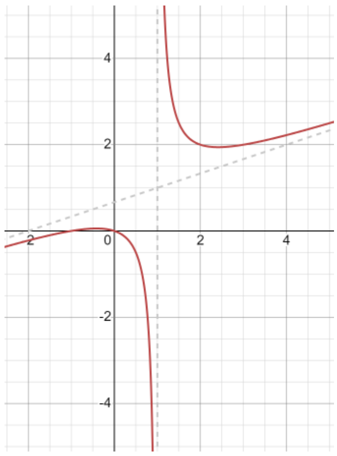
Ejemplo:

La función $f(x)=\frac{x^2+x}{3x-3}$ tiene dos asíntotas, una vertical (la recta x = 1) y otra oblicua, la recta $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+x}{3x-3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{3x^2-3x}=\frac{1}{3};$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x}{3x-3}-\frac{1}{3}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3x-3}=\frac{2}{3}.$$

La asíntota es la recta $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$.



Nota: Este resultado puede comprobarse con **Mathway**.

$\frac{(x^2+x)}{3x-3}$

Obtener las asíntotas

Asíntotas verticales: $x=1$

No hay asíntotas horizontales

Asíntotas oblicuas: $y=\frac{x}{3}+\frac{2}{3}$

9. Derivadas

El cálculo de la derivada de una función puede resultar engorroso y sujeto a errores (muchas veces por “despistes”). Las herramientas informáticas deben limitarse a comprobar que los resultados obtenidos manualmente son correctos.

Con **GeoGebra**, para derivar una función debe escribirse “Derivada(Función)”.

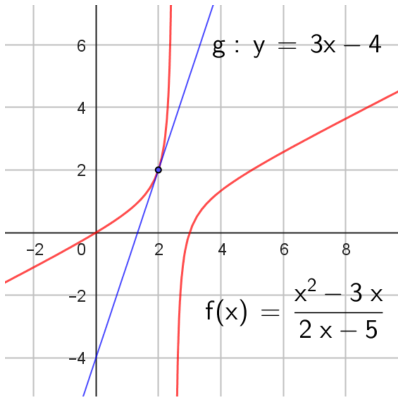
Ejemplos:

a) Derivar $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{2x-5} \rightarrow$ $\quad \text{Derivada}\left(\dfrac{x^2-3x}{2x-5}\right) = \dfrac{2x^2-10x+15}{4x^2-20x+25}$

b) Derivar $f(x)=x^2e^{-x} \rightarrow$ $\quad f(x) = \text{Derivada}\left(x^2 e^{-x}\right)$

$\rightarrow 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$

$\rightarrow$ También puede obtenerse la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto de ella.
Para ello hay que hacer la gráfica, indicar el punto de tangencia e ir, en la barra de tareas, a “Tangentes”: pulsar punto y curva.
Así se obtiene la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{2x-5}$ en el punto (2, 2): es $y=3x-4$.



Utilizando **Mathway** resulta más claro y, además, recuerda el procedimiento de cálculo.
Para los mismos ejemplos, tecleando las funciones correspondientes, se obtiene:

$\dfrac{(x^2-3x)}{2x-5}$

Obtener la derivada - d/dx

Diferenciar con la regla del cociente, $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{g(x)^2}$.

$\dfrac{2x^2-10x+15}{(2x-5)^2}$

x^2e^{-x}

Obtener la derivada - d/dx

Diferencia con la regla del producto, $\dfrac{d}{dx}[f(x)\,g(x)] = f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)]$.

$-x^2e^{-x} + 2xe^{-x}$

$\rightarrow$ También puede hallarse la derivada segunda.

Así, para $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{2x-5}$ se obtiene:

$\dfrac{x^2-3x}{2x-5}$

Find the Second Derivative

Obtén la derivada de $\dfrac{x^2-3x}{2x-5}$ dos veces.

$f''(x) = -\dfrac{10}{(2x-5)^3}$

10. Integrales indefinidas

El estudiante debe conocer y saber aplicar los métodos de integración. Los recursos informáticos que aquí se indican deben utilizarse solo para comprobar los resultados.

Con **GeoGebra**, para calcular una primitiva debe escribirse "Integral(Función, variable)".

Ejemplos:

a) Para calcular $\int xe^x dx$ debe teclearse Integral(xe^x, x) $\to$ la solución es $e^x(x-1)$.

b) $\int (1-x)^3 dx \to$ Integral((1–x)^3, x) = $-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x$.

c) $\int \frac{x-3}{x^2+9}\, dx \to$ Integral((x–3)/(x^2+9), x) $\to$ aparece $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right) - \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$.

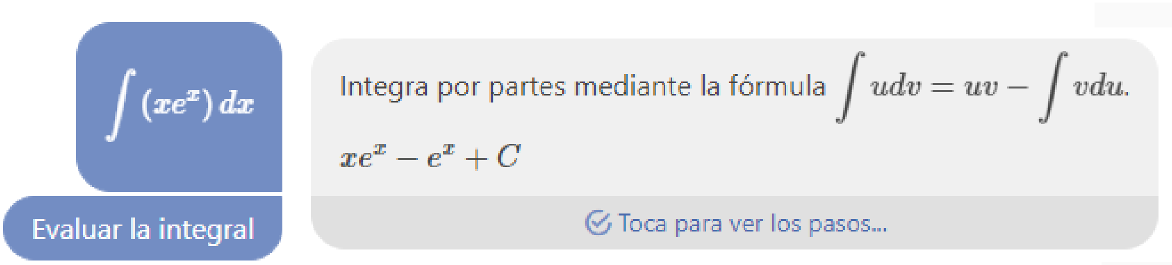
d) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \to$ Integral(1/(1+sqrt(x)), x) = $2\left(-\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+\sqrt{x}\right)$.

Observa que se omite la constante de integración.

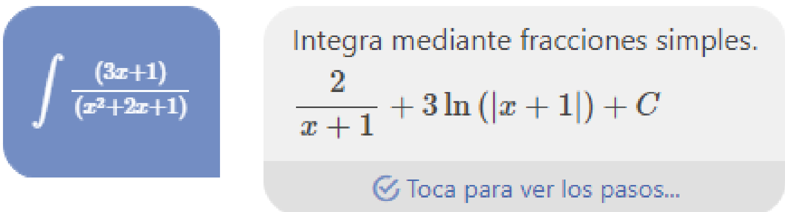
Utilizando **Mathway** se obtienen soluciones en las que se indica el procedimiento aplicado.

Ejemplos:

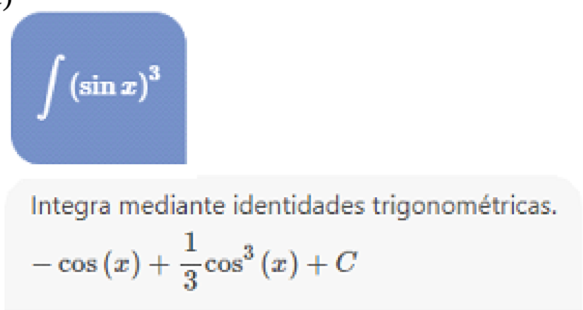
a)



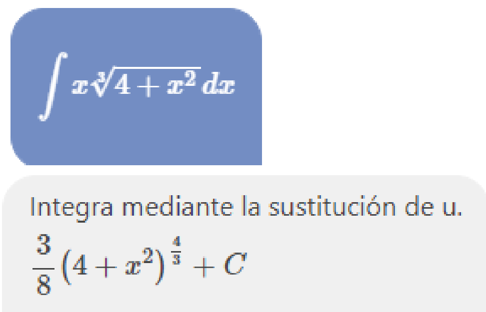
b)



c)



d)



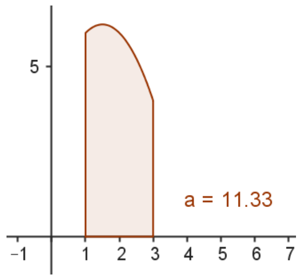
11. Integral definida

Con **GeoGebra**, para calcular el valor de una integral definida debe escribirse:

Integral(<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>)

Ejemplos:

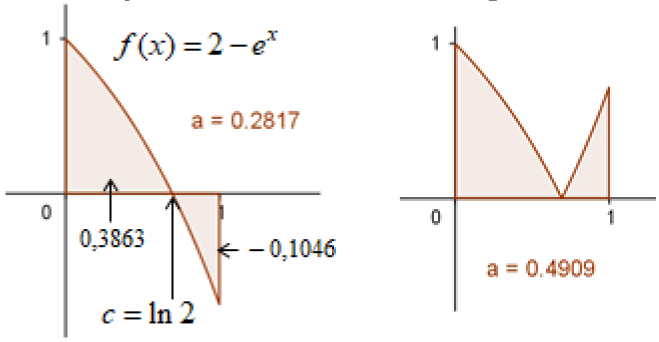
a) $\int_1^3 \left(-x^2+3x+4\right)dx$ → Integral((−x^2+3x+4), 1, 3). Al pulsar ENTER muestra el resultado (a = 11,33) y una interpretación geométrica.



El valor exacto es $\frac{34}{3}$ u^2, que da el área del recinto sombreado.

b) $\int_0^1 \left(2-e^x\right)dx$ → Integral(2−exp(x), 0, 1). Resultado: a = 0,2817.

En este caso, el resultado no coincide con el área sombreada (figura de la izquierda), pues no tiene en cuenta que la función corta al eje *OX* en el intervalo de integración.



Si se quiere calcular el área encerada entre la gráfica de la función $f(x)=2-e^x$, el eje *OX* y las rectas x = 0 y x = 1, habría que teclear:

Integral(abs(2−exp(x)), 0, 1), esto es $\int_0^1 \left|2-e^x\right|dx$, obteniéndose a = 0,4909. (Figura derecha).

El punto de corte es c = ln 2; por tanto, el área sombreada podría calcularse, alternativamente, así:

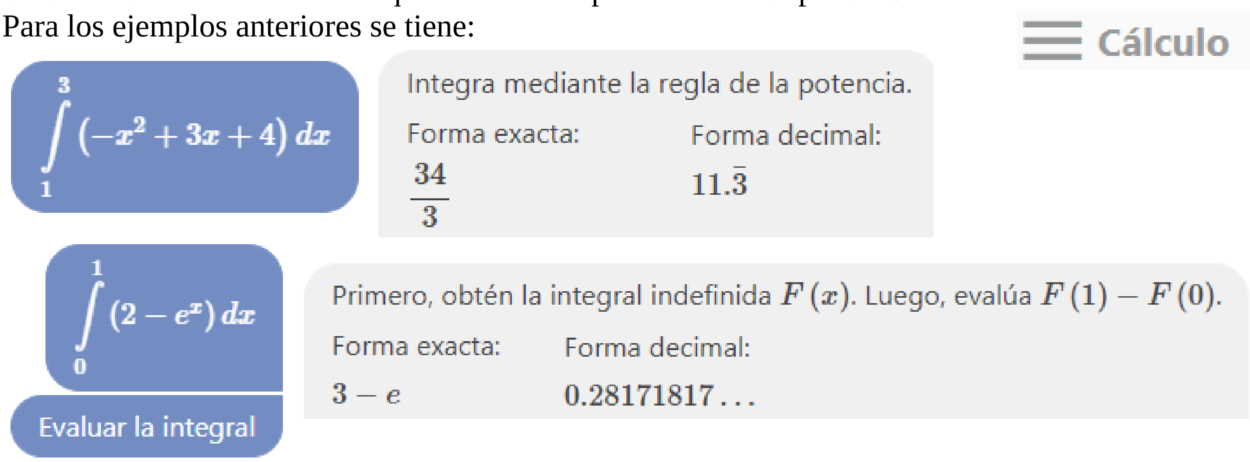
$$a=\int_0^{\ln 2}\left(2-e^x\right)dx-\int_{\ln 2}^{1}\left(2-e^x\right)dx=0,3863-\left(-0,1046\right)=0,4909.$$

→ Por tanto, para calcular un área, hay que determinar la posición del recinto con respecto al eje horizontal; para ello hay que visualizar la curva.

Con **Mathway**:

Se obtienen soluciones en las que se indica el procedimiento aplicado.

Para los ejemplos anteriores se tiene:



12. Distribuciones de probabilidad (normal y binomial)

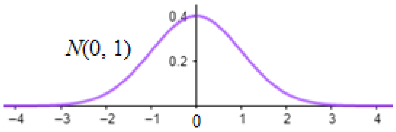
El cálculo de los valores de probabilidad a partir de la Tabla $N(0, 1)$, tal y como se hace en el texto, resulta engorroso (hay que tipificar, redondear el valor de Z, restar…), pero, de momento, hay que seguir estudiándolo así; aunque, como sucedió con las tablas trigonométricas y logarítmicas, la tabla $N(0, 1)$ quedará en desuso, pues ya son muy accesibles las calculadoras y ordenadores que facilitan los cálculos. <u>No obstante, vuelvo a advertir que lo importante son los conceptos; en este caso, el comportamiento de las distribuciones normal y binomial, conocer lo que estás haciendo y saber interpretar los resultados</u>.

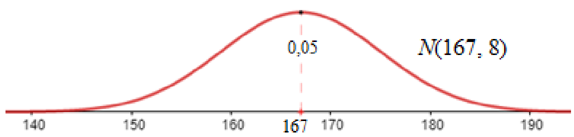
Valores de probabilidad asociados a distribuciones normales

1. Con **[GeoGebra]**:

- Pueden obtenerse la representación gráfica de la $N(\mu, \sigma)$ y el valor de probabilidad para cualquier valor de X.

Para la curva $N(0, 1)$, teclea: Normal(0, 1, x, false). (La escala de ejes EjeX : EjeY puede ser 5 a 1).
Para la curva $N(167, 8)$, teclea: Normal(167, 8, x, false). (EjeX : EjeY $\to$ 300 a 1).
Así, se obtienen las gráficas que siguen:



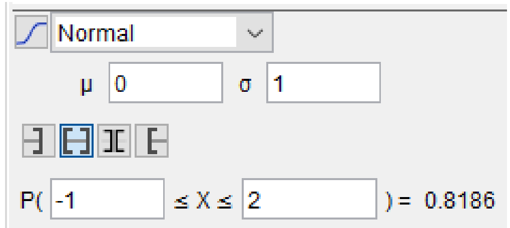


- Los valores de probabilidad se obtienen así:

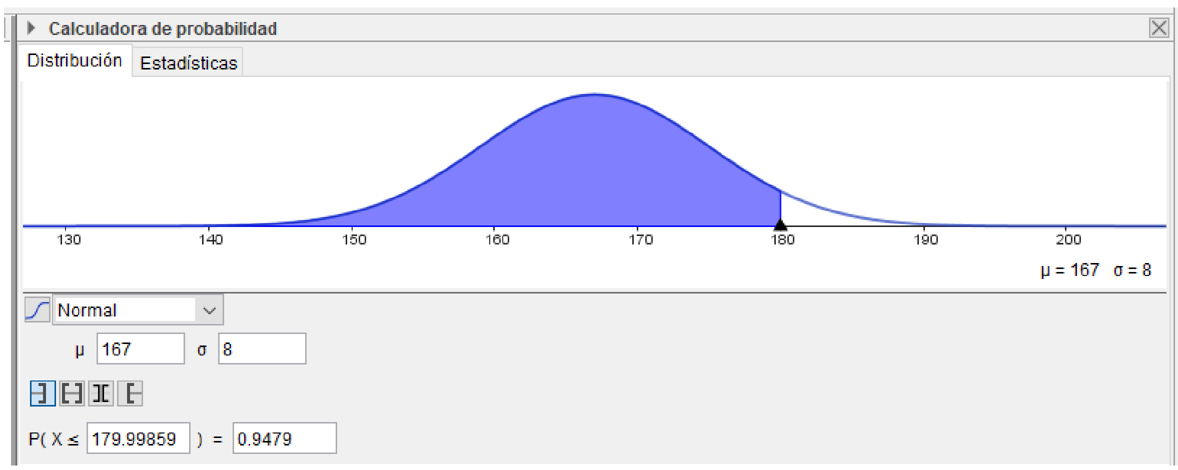
Para la curva $N(0, 1)$, $P(Z < 1{,}7)$: teclear Normal(0, 1, 1.7, true); se obtiene 0,9554.

Para la curva $N(167, 8)$, $P(X < 180)$: teclear Normal(167, 8, 180, true); se obtiene 0,9479.

<u>Más claro</u>:
1) Abrir GeoGebra. En "Vista" elegir "Cálculo simbólico" y "Calculadora de probabilidad".
2) Por defecto aparece la distribución $N(0, 1)$. Para determinar probabilidades aparecen cuatro opciones, que permiten calcular la probabilidad de que la variable tome valores en los intervalos: $(-\infty, a)$, (a, b), $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ y (b, ∞).
Así $P(-1 < Z < 2) = 0{,}8186 \to$ (Imagen derecha).



Para la $N(167, 8)$, se obtiene la gráfica que sigue; el valor de $P(X < 180) = 0{,}9479$.



2. Algunas calculadoras dan los valores de probabilidad requeridos, introduciendo la media, la desviación típica y el valor de x. Por ejemplo, en este enlace puedes obtener esos valores.

Para la $N(0, 1)$, $P(-0,5 < Z < 1,5) = 0,624731553$.

Para la $N(167, 8)$, $P(X < 175) = 0,158447781$.

Para la $N(0, 1)$, $P(Z < z_a) = 0,82 \Rightarrow z_a = 0,9153$.

Para la $N(167, 8)$, $P(X < k) = 0,90 \Rightarrow k = 177,2512$, que da la altura mínima del 10 % de las chicas más altas. El 90 % de esas chicas mide menos de 177,25 cm.

Valores de probabilidad asociados a distribuciones binomiales

Con **Excel** se pueden obtener los valores de probabilidad asociados a cualquier distribución binomial $B(n, p)$; también se pueden elaborar los gráficos correspondientes. En concreto, por ejemplo, para la $B(12, 0,3)$, hay que confeccionar la tabla que sigue. Para ello:

Cálculo de probabilidades

Columna A: número de éxitos, desde 0 a 12. En A3 se escribe 0; en A4 =A3+1; … arrastar hasta A15, en donde aparece 12.

Columna B: probabilidad de n éxitos. En B3 se escribe =DISTR.BINOM(A3;12;0,3;FALSO). Enter y arrastrar el resultado hasta B15.

Así, por ejemplo, la probabilidad de 4 éxitos es: $P(X = 4) = 0,23113970$.

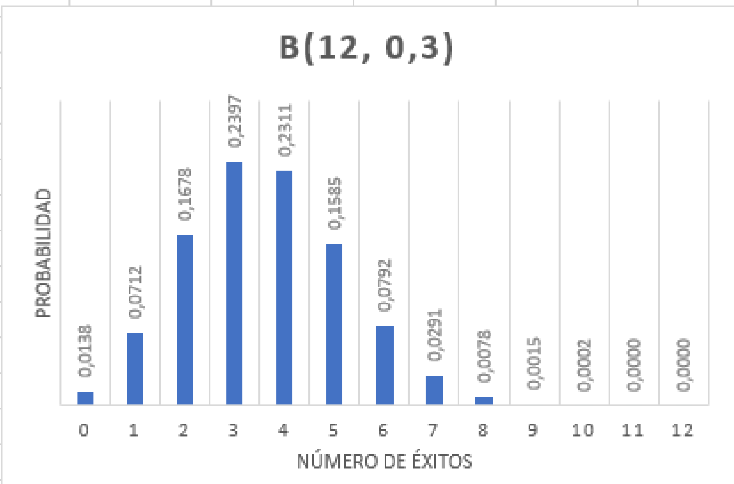
Para trazar el gráfico

1. Abarcar los datos de las dos columnas, desde A3 a A15 y desde B3 a B15;
2. Insertar gráfico: elegir el tipo de gráfico entre los recomendados.
3. Poner títulos al gráfico y a los ejes.

B3 =DISTR.BINOM(A3;12;0,3;FALSO)

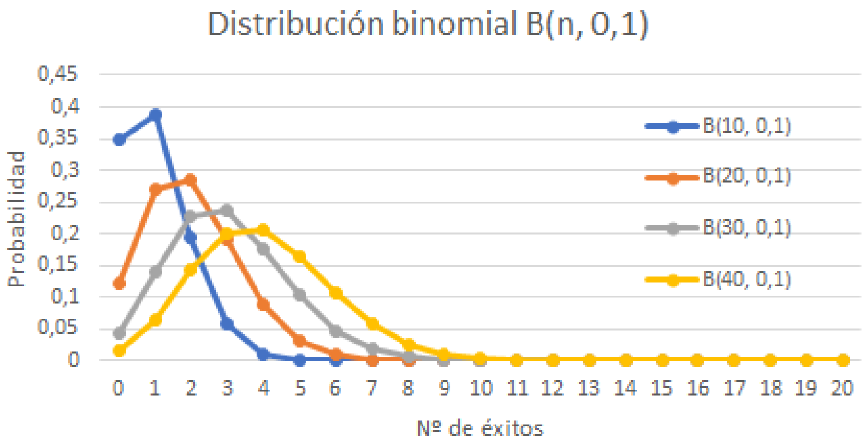
	A	B
1	B(12, 0,3)	
2	éxitos	Probabilidad
3	0	0,01384129
4	1	0,07118376
5	2	0,16779030
6	3	0,23970043
7	4	0,23113970
8	5	0,15849579
9	6	0,07924790
10	7	0,02911147
11	8	0,00779772
12	9	0,00148528
13	10	0,00019096
14	11	0,00001488
15	12	0,00000053

Grafico asociado a la B(12, 0,3)



13. Aproximación de la binomial mediante una normal

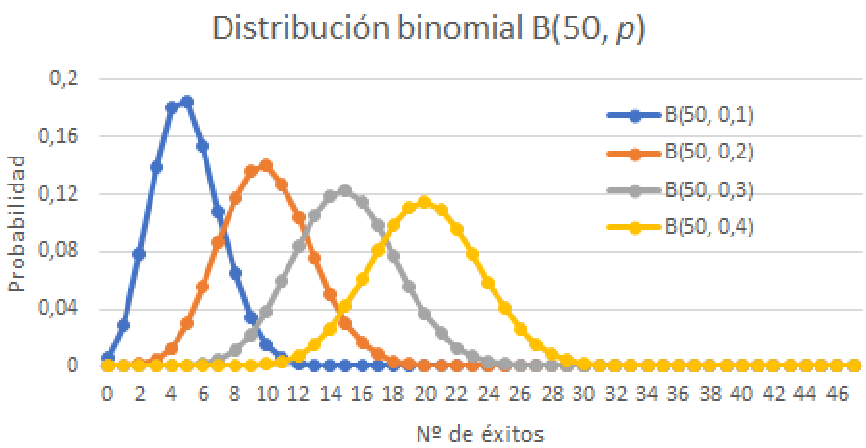
I. Evolución de las poligonales de frecuencias de la distribución binomial $B(n, 0{,}1)$ cuando n aumenta.



Para confeccinar este gráfico se procede como sigue:
Columna A: número de éxitos, desde 0 a 40. En A3 se escribe 0; en A4 =A3+1; … arrastar hasta A43, en donde aparece 40.
Columna B: B(10, 0,1). En B3 se escribe =DISTR.BINOM(A3;10;0,1;FALSO). Arrastar hasta B13.
Columna C: B(20, 0,1). En C3 se escribe =DISTR.BINOM(A3;20;0,1;FALSO). Arrastar hasta C23.
Columna D: B(30, 0,1). En D3 se escribe =DISTR.BINOM(A3;30;0,1;FALSO). Arrastar hasta D33.
Columna E: B(40, 014). En E3 se escribe =DISTR.BINOM(A3;40;0,1;FALSO). Arrastar hasta E43.
En las columnoas B, C, D y E se obtienen los valores de probabilidad para cada número de éxitos.

Para trazar el gráfico:
1. Abarcar los datos de las 5 columnas, desde A3 a A23 (los datos de probabilidad desde A24 a A 40 no setienen en cuenta, con el objetivo de que el gráfico resulte más claro).
2. Insertar gráfico: elegir el tipo de gráfico entre los recomendados.
3. Poner títulos al gráfico y a los ejes.

II. Evolución de las poligonales de frecuencias de la distribución binomial $B(50, p)$ cuando p se acerca a 0,5.



Para confeccinar este gráfico se procede como sigue:
Columna A: número de éxitos, desde 0 a 50. En A3 se escribe 0; en A4 =A3+1; … arrastar hasta A53, en donde aparece 50.
Columna B: B(50, 0,1). En B3 se escribe =DISTR.BINOM(A3;50;0,1;FALSO). Arrastar hasta B53.
Columna C: B(50, 0,2). En C3 se escribe =DISTR.BINOM(A3;50;0,2;FALSO). Arrastar hasta C53.

Columna D: B(50, 0,3). En D3 se escribe =DISTR.BINOM(A3;50;0,3;FALSO). Arrastar hasta D53.
Columna E: B(50, 0,4). En E3 se escribe =DISTR.BINOM(A3;50;0,4;FALSO). Arrastar hasta E53.
Enlas columnoas B, C, D y E se obtienen los valores de probabilidad para cada número de éxitos.

Para trazar el gráfico se procede como en el apartado anterior.

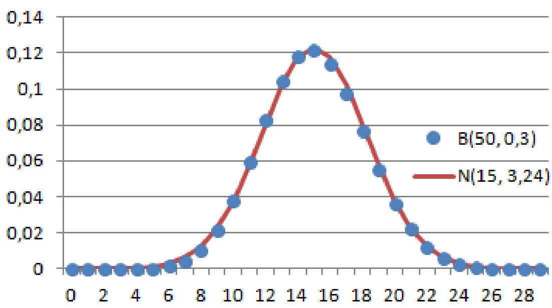
→ Como se dijo más arriba, cuando *n* aumenta la poligonal se parece más a una campana de Gauss; y es mucho más evidente cuando *n* es grande y *p* se acerca más a 0,5.

En general, se admite que la aproximación es buena cuando $n \geq 25$ y el producto $np \geq 5$ (también $nq = n(1-p) \geq 5$). Así, para las poligonales de la primera figura, la única que puede admitirse como aceptable es la *B*(40, 0,1), aunque $np = 4$. En cambio, todas las binomiales representadas en la segunda figura se aproximan bastante bien a campanas de Gauss.

→ Cuando el ajuste sea posible, la distribución normal que mejor se aproxima a la *B*(*n*, *p*) es la que tiene por media y desviación típica la de la distribución binomial. Como la media y desviación típica de la variable $X \approx B(n, p)$ son $\mu = np$ y $\sigma = \sqrt{npq}$, el ajuste se hace por la variable $X' \approx N\left(np, \sqrt{npq}\right)$, que se tipifica haciendo $Z = \dfrac{X'-\mu}{\sigma} = \dfrac{X'-np}{\sqrt{npq}}$.

Con esto, cuando sea preciso calcular probabilidades de una variable *X* binomial *B*(*n*, *p*) puede hacerse recurriendo a la variable normal *X´* asociada. Por tanto:

$$P(X < k) = P(X' < k) = P\left(Z < \frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right).$$



En la figura adjunta se han dibujado la *B*(50, 0,3) y la $N\left(50·0,3,\ \sqrt{50·0,3·0,7}\right) = N(15,\ 3,24)$.

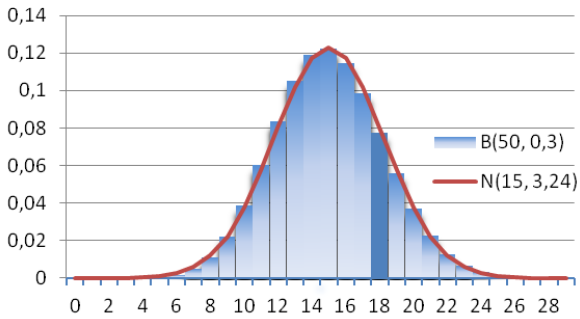
Las probabilidades binomiales se representan por puntos; la normal es la curva continua. Es evidente la gran coincidencia.

Ejemplo:
La variable binomial $X = B(50, 0,3)$ se estudia mediante la variable normal $X' = N(15,\ 3,24)$, entonces:

$$P(X < 18) = P(X' < 18) = P\left(Z < \frac{18-15}{3,24}\right) = P(Z < 0,93) = 0,8238.$$

$$P(15 < X < 18) = P(X' < 18) - P(X' < 15) = P(Z < 0,93) - P(Z < 0) = 0,8238 - 0,5 = 0,3238.$$

Corrección de continuidad



En la distribución normal la probabilidad de que la variable tome un valor concreto es 0, pero en una binomial no es así. Por seguir con el ejemplo anterior:

- Para la normal $X' = N(15,\ 3,24)$,

$P(X' < 18) = P(X' \leq 18)$, pues $P(X' = 18) = 0$.

- Para la binomial $X = B(50, 0,3)$,

$P(X < 18) < P(X \leq 18)$, pues

$P(X = 18) = 0,077247062$, que es el resultado de

$P\left(X=18\right)=\binom{50}{18}\cdot 0,3^{18}\cdot 0,7^{32}$. Este valor coincide con el área de la barra sobre X = 18 (sombreada con mayor intensidad), que se muestra en el gráfico adjunto.

Esta anomalía puede paliarse mediante la llamada <u>corrección de continuidad</u>, por la que probabilidades puntuales (de valor 0 en las distribuciones continuas) son sustituidas por probabilidades de intervalo de la forma siguiente:

$\rightarrow P\left(X=k\right)=P\left(k-0,5<X'<k+0,5\right)$

$\rightarrow P\left(X\le k\right)=P\left(X'<k+0,5\right)$ $\rightarrow P\left(X<k\right)=P\left(X'<k-0,5\right)$

$\rightarrow P\left(X\ge k\right)=P\left(X'>k-0,5\right)$ $\rightarrow P\left(X>k\right)=P\left(X'>k+0,5\right)$

Ejemplos:

Para la binomial $X = B(50,\ 0{,}3) \approx X' = N\left(15,\ 3{,}24\right)$, se tiene:

a) $P\left(X=15\right)=P\left(14,5<X'<15,5\right)=P\left(\dfrac{14,5-15}{3,24}<Z<\dfrac{15,5-15}{3,24}\right)=P\left(-015<Z<0,15\right)=$

$= P\left(Z<0,15\right)-P\left(Z<-0,15\right)=0,5596-\left(1-0,5596\right)=0,1192$.

b) $P\left(X=18\right)=P\left(17,5<X'<18,5\right)=P\left(\dfrac{17,5-15}{3,24}<Z<\dfrac{18,5-15}{3,24}\right)=$

$= P\left(Z<1,08\right)-P\left(Z<0,77\right)=0,8599-0,7794=0,0805$.

c) $P\left(15<X<18\right)=P\left(X'<17,5\right)-P\left(X'<15,5\right)=P\left(Z<1,08\right)-P\left(Z<0,15\right)=$

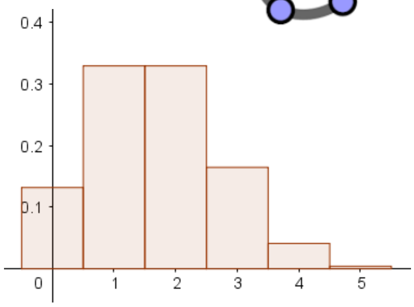
= 0,8599 – 0,5596 = 0,3003.

<u>Observación</u>: En todos los casos, los valores de probabilidad obtenidos mediante la normal son aproximados. El resultado binomial exacto, obtenidos con Excel, es:

$P\left(X=15\right)=0,122346862$; $P\left(X=18\right)=0,077247062$.

Las diferencias son menores de 4 milésimas.

<u>Nota</u>: Utilizando **GeoGebra**, tecleando DistribuciónBinomial(5, 1/3), aparece el gráfico adjunto. (Se ha cambiado la escala de los ejes, EjeX : EjeY → 10 a 1).



Los valores de probabilidad pueden calcularse uno a uno, indicando el número r de éxitos.

El comando para r = 2 es:

DistribuciónBinomial(5, 1/3, **2**, false) → 0,1646.

→ Para la B(10, 0,2) → DistribuciónBinomial(10, 0.2).

Se obtiene el gráfico: