Observación: Esta selección de integrales se puede ampliar con las propuestas en mi libro de Matemáticas II: AQUÍ.

Integrales inmediatas

1. Resolver las siguientes integrales:

a) $\int \frac{5x+\sqrt{3x}}{x^2}dx$ b) $\int \frac{x}{x^2+9}\,dx$ c) $\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3}\,dx$

d) $\int \frac{x}{x^2-4}dx$ e) $\int \left(x^5-2x+3\right)dx$ f) $\int \left(2e^x+5\right)dx$

g) $\int \frac{1+x^2}{x^4}dx$ h) $\int \left(e^{2x}-x^2+\frac{4}{x-2}\right)dx$ i) $\int (2\sin x-\tan x)\,dx$.

Solución:

a) $\int \frac{5x+\sqrt{3x}}{x^2}dx = \int \left(\frac{5}{x}+\sqrt{3}x^{-3/2}\right)dx = 5\ln x+\frac{\sqrt{3}}{-1/2}x^{-1/2}+c = 5\ln x-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x}}+c$.

b) $\int \frac{x}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right)+c$

c) $\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x}+x\right)dx = \int_1^2 \left(3x^{-3}-\frac{1}{x}+x\right)dx =$

$= \left(-\frac{3}{2x^2}-\ln x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \left(-\frac{3}{8}-\ln 2+2\right)-\left(-\frac{3}{2}-\ln 1+\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{8}-\ln 2$

d) $\int \frac{x}{x^2-4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-4}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-4\right)+c$

e) $\int \left(x^5-2x+3\right)dx = \frac{x^6}{6}-x^2+3x+c$

f) $\int \left(2e^x+5\right)dx = 2e^x+5x+c$

g) $\int \frac{1+x^2}{x^4}dx = \int \left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}\right)dx = \int \left(x^{-4}+x^{-2}\right)dx = \frac{x^{-3}}{-3}+\frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}+c$

b) $\int \left(e^{2x}-x^2+\frac{4}{x-2}\right)dx = \frac{1}{2}e^{2x}-\frac{x^3}{3}+4\ln(x-2)+c$

i) $\int (2\sin x-\tan x)\,dx = \int 2\sin x dx-\int \tan x dx = -2\cos x+\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx \to$ (puede observarse que en el numerador está la derivada del denominador) $= -2\cos x+\ln(\cos x)+c$

2. Calcula la siguiente integral indefinida: $\int \frac{x^3}{x^2+1}dx$.

Solución:
Descomponiendo el integrando (dividiendo):

$$\frac{x^3}{x^2+1}=\frac{x^3+x-x}{x^2+1}=\frac{x\left(x^2+1\right)-x}{x^2+1}=x-\frac{x}{x^2+1}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}dx=\int\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+c.$$

3. Halla: $\int x^2\left(x^3+1\right)^{-7}dx$

Solución:
Es prácticamente inmediata. Bastaría con ajustar constantes y recordar que

$$\int f'(x)\cdot\left(f(x)\right)^n dx=\frac{\left(f(x)\right)^{n+1}}{n+1}+c\ .$$

En efecto:

$$\int x^2\left(x^3+1\right)^{-7}dx=\frac{1}{3}\int\left(3x^2\right)\left(x^3+1\right)^{-7}dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(x^3+1\right)^{-7+1}}{-7+1}+c\ =$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(-6)\left(x^3+1\right)^6}+c=-\frac{1}{18\cdot\left(x^3+1\right)^6}+c$$

También puede hacerse el cambio $x^3+1=t\Rightarrow 3x^2dx=dt\Rightarrow x^2dx=\frac{1}{3}dt$.

Luego:

$$\int x^2\left(x^3+1\right)^{-7}dx\ =\int\left(x^3+1\right)^{-7}x^2dx=\int t^{-7}\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-6}}{-6}+c=-\frac{1}{18t^6}+c=-\frac{1}{18\left(x^3+1\right)^6}+c$$

Descomposición en fracciones simples

4. Calcula la siguiente integral: $\int\frac{3x}{x^2+x-2}dx$.

Solución:
Se hace por descomposición en fracciones simples.
Como las raíces del denominador son $x = 1$ y $x = -2$: $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$, puede escribirse la igualdad:

$$\frac{3x}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

Con esto:

$$3x=A(x+2)+B(x-1)\ \Rightarrow\ 3x=2A-B+(A+B)x\ \Rightarrow\ \begin{cases}2A-B=0\\ A+B=3\end{cases}\Rightarrow A=1;\ B=2.$$

Por tanto:

$$\int \frac{3x}{x^2+x-2}dx = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{2}{x+2}dx = \ln(x-1) + 2\ln(x+2) + c$$

5. (PAU, junio 2013) Calcula la integral $\int \frac{ax+b}{x^2-5x+6}dx$, en función de a y de b.

Solución:

Por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{ax+b}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

Luego:

$$ax+b = A(x-3)+B(x-2) \Rightarrow ax+b = (A+B)x - 3A - 2B.$$

Por tanto:

$$\begin{cases} a = A+B \\ b = -3A-2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 3A+3B \\ b = -3A-2B \end{cases} \Rightarrow B = 3a+b\,;\ A = -2a-b$$

Con esto:

$$\int \frac{ax+b}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{-2a-b}{x-2}dx + \int \frac{3a+b}{x-3}dx = (-2a-b)\ln(x-2) + (3a+b)\ln(x-3) + k$$

Integración por partes

6. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int x(\ln x)\,dx$ b) $\int x(\cos 2x)\,dx$ c) $\int e^x \cos x\,dx$ d) $\int (x+1)e^{2x}dx$

Solución:

a) $\int x(\ln x)\,dx \to$ Tomando: $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$; $dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

Se tiene:

$$\int x(\ln x)\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c.$$

b) $\int x(\cos 2x)\,dx \to$ Haciendo: $x = u \Rightarrow dx = du$; $dv = (\cos 2x)\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}\sin 2x$.

Se tiene:

$$\int x(\cos 2x)\,dx = \frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int (\sin 2x)\,dx = \frac{x}{2}(\sin 2x) + \frac{1}{4}(\cos 2x) + c$$

c) $\int e^x \cos x\,dx$.

1) Haciendo: $u = e^x$ y $dv = \cos x dx \Rightarrow du = e^x dx$; $v = \sin x$

Luego:

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx.$$

La segunda integral, $\int e^x \sin x\,dx$, también debe hacerse por el método de partes.

2) Tomando: $u = e^x$ y $dv = \sin x dx \Rightarrow du = e^x dx$; $v = -\cos x$

Luego:

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \left(e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)\, dx \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

Pasando la integral del segundo miembro al primero:

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

Por tanto, $\int e^x \cos x\, dx = \dfrac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c$

d) $\int (x+1) e^{2x} dx = \int x e^{2x} dx + \int e^{2x} dx$

La primera integral, $\int x e^{2x} dx$, debe hacerse por partes; la segunda es inmediata.

Tomando:

$$u = x \text{ y } dv = e^{2x} dx \Rightarrow du = dx \text{ y } v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

Luego,

$$\int x e^{2x} dx = x \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

Como $\int e^{2x} dx = \dfrac{1}{2} e^{2x} + c$, se tendrá que:

$$\int (x+1) e^{2x} dx = \int x e^{2x} dx + \int e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{1}{2} e^{2x} + c = \frac{x}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + c$$

7. Calcula: $\int 2x[\ln(x)]^2\, dx$

<u>Solución</u>:

Se toman las siguientes partes:

$$u = 2x[\ln(x)]^2 \Rightarrow du = \left(2[\ln(x)]^2 + 2x \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} \right) dx\,; \qquad dx = dv \Rightarrow v = x$$

Luego,

$$\int 2x[\ln(x)]^2\, dx = 2x[\ln(x)]^2 \cdot x - \int x \left(2[\ln(x)]^2 + 2x \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} \right) dx =$$

$$= 2x[\ln(x)]^2 \cdot x - \int 2x[\ln(x)]^2 dx - \int 4x \ln(x) dx \Rightarrow \text{(trasponiendo la 1ª integral)}$$

$$\Rightarrow 2\int 2x[\ln(x)]^2 dx = 2x[\ln(x)]^2 \cdot x - \int 4x \ln(x) dx \qquad (1)$$

Ahora se trata de resolver $\int 4x \ln(x) dx$, que también se hace por partes.

Tomando ahora:

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx\,; \qquad dv = 4x dx \Rightarrow v = 2x^2$$

Se tiene que:

$$\int 4x\ln(x)dx = 2x^2\ln x - \int 2x^2\cdot\frac{1}{x}dx = 2x^2\ln x - \int 2xdx = 2x^2\ln x - x^2.$$

Sustituyendo en (1):

$$2\int 2x[\ln(x)]^2dx = 2x[\ln(x)]^2\cdot x - 2x^2\ln(x) + x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int 2x[\ln(x)]^2dx = x^2[\ln(x)]^2 - x^2\ln(x) + \frac{x^2}{2} + c = x^2\left([\ln(x)]^2 - \ln(x) + \frac{1}{2}\right) + c.$$

8. Calcula $F(x) = \int \frac{\ln(x)}{2x}dx$.

Solución:

La primitiva, $F(x) = \int \frac{\ln(x)}{2x}dx$, puede hacerse por partes.

Tomando:

$$u = \ln x \text{ y } dv = \frac{1}{2x}dx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \text{ y } v = \int \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\ln x.$$

Por tanto:

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{2x}dx = \ln x\cdot\frac{1}{2}\ln x - \int \frac{\ln x}{2x}dx \Rightarrow \int \frac{\ln x}{2x}dx + \int \frac{\ln x}{2x}dx = \ln x\cdot\frac{1}{2}\ln x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\int \frac{\ln x}{2x}dx = \ln x\cdot\frac{1}{2}\ln x \Rightarrow \int \frac{\ln x}{2x}dx = \frac{1}{4}(\ln x)^2 + c.$$

Esto es: $F(x) = \frac{1}{4}(\ln x)^2 + c$.

Problemas

9. Halla el valor de las siguientes integrales definidas:

a) $\int_3^4 \frac{x-5}{(x+1)^2}dx$ b) $\int_1^3 (x^2-2)dx$.

Solución:

a) $$\int_3^4 \frac{x-5}{(x+1)^2}dx = \int_3^4 \frac{x+1-6}{(x+1)^2}dx = \int_3^4\left(\frac{1}{x+1} - \frac{6}{(x+1)^2}\right)dx = \left(\ln(x+1) + \frac{6}{x+1}\right)\Bigg|_3^4 =$$

$$= \ln 5 + \frac{6}{5} - \left(\ln 4 + \frac{6}{4}\right) = \ln 5 - \ln 4 - \frac{3}{10} = \ln\frac{5}{4} - \frac{3}{10}.$$

b) $$\int_1^3 (x^2-2)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x\right)\Bigg|_1^3 = (9-6) - \left(\frac{1}{3} - 2\right) = \frac{14}{3}.$$

Observación: El valor de estas integrales no coincide con el área comprendida entre el eje OX y la función dada en el intervalo indicado.

10. Halla el valor de la integral definida: $\int_0^\pi \frac{6\sin x}{5-3\cos x}\,dx$

Solución:

La integral $\int \frac{6\sin x}{5-3\cos x}dx$ es prácticamente inmediata. Hay que observar que en el numerador "está" la derivada del denominador y recordar que $\int \frac{f´(x)}{f(x)}dx = \ln f(x)$.

Por tanto, ajustando constantes, se tiene:

$$\int \frac{6\sin x}{5-3\cos x}dx = 2\int \frac{3\sin x}{5-3\cos x}dx = 2\ln(5-3\cos x)+c$$

También puede recurrirse a un cambio de variable.

Si se hace el cambio $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$.

Además: si $x = \pi$, $\cos\pi = t \Rightarrow t = -1$; si $x = 0$, $\cos 0 = t \Rightarrow t = 1$.

Luego:

$$\int_0^{\pi} \frac{6\sin x}{5-3\cos x}dx = \int_1^{-1} \frac{-6}{5-3t}dt = 2\int_1^{-1} \frac{-3}{5-3t}dt = 2\ln(5-3t)\Big|_1^{-1} = 2(\ln 8 - \ln 2) = 4\ln 2.$$

11. Dada $f(x) = ax^3 + (-3-a)x^2 + 2x + 1$, halla el valor de a para que $\int_0^1 f(x)dx = 3$

<u>Solución</u>:

$$\int_0^1 f(x)dx = 3 \Rightarrow \int_0^1 \left(ax^3 + (-3-a)x^2 + 2x + 1\right)dx = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{4}x^4 + \frac{-3-a}{3}x^3 + x^2 + x\right)\Big|_0^1 = 3 \Rightarrow a = -24.$$

Luego, la función pedida es $f(x) = -24x^3 + 21x^2 + 2x + 1$.

12. Halla la función $f(x)$ cuya derivada es $f´(x) = 2xe^{5x}$ y que, además, cumpla que $f(0) = 2$.

<u>Solución</u>:

La función $f(x)$ es una primitiva de $f´(x) = 2xe^{5x}$: $f(x) = \int 2xe^{5x}dx$.

Esta integral se hace por partes, tomando:

$u = 2x \Rightarrow du = 2dx$; $dv = e^{5x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{5}e^{5x}$

Luego:

$$f(x) = \int 2xe^{5x}dx = 2x\cdot\frac{1}{5}e^{5x} - \int 2\cdot\frac{1}{5}e^{5x}dx = \frac{2}{5}\left(xe^{5x} - \int e^{5x}dx\right) = \frac{2}{5}\left(xe^{5x} - \frac{1}{5}e^{5x}\right) + c$$

Como $f(0) = 2$, entonces: $f(0) = \frac{2}{5}\left(0 - \frac{1}{5}e^0\right) + c = 2 \Rightarrow c = 2 + \frac{2}{25} = \frac{52}{25}$.

Por tanto, $f(x) = \frac{2}{5}\left(xe^{5x} - \frac{1}{5}e^{5x}\right) + \frac{52}{25}$.

13. Halla la función $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 1$ y que su derivada es $f´(x) = (x-1)^3(x-3)$.

<u>Solución</u>:

La función pedida debe ser una primitiva de $(x-1)^3(x-3)$; esto es:

$$f(x)=\int (x-1)^3(x-3)dx$$

Operando:

$$(x-1)^3(x-3) = \left(x^3-3x^2+3x-1\right)\cdot(x-3)=x^4-6x^3+12x^2-10x+3$$

Luego:

$$f(x)=\int\left(x^4-6x^3+12x^2-10x+3\right)dx=\frac{1}{5}x^5-\frac{6}{4}x^4+4x^3-5x^2+3x+c$$

Como $f(0)=1 \Rightarrow c$ = 1; y, por tanto: $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{2}x^4+4x^3-5x^2+3x+1$.

14. Se sabe que la derivada de una función $f(x)$ es $f'(x)=(x+1)\cdot\left(x^2-4\right)$. Determina la función *f* sabiendo que $f(0)=\frac{1}{7}$.

Solución:

La función $f(x)$ será una primitiva de $f'(x)=(x+1)\cdot\left(x^2-4\right)$:

$$f(x)=\int (x+1)\cdot\left(x^2-4\right)dx=\int\left(x^3+x^2-4x-4\right)dx=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-2x^2-4x+c$$

Como se sabe que $f(0)=\frac{1}{7} \Rightarrow c=\frac{1}{7}$. Luego $f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-2x^2-4x+\frac{1}{7}$

15. Haciendo el cambio de variable $e^x=t$, halla las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx$ b) $\displaystyle\int\frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx$ c) $\displaystyle\int\frac{2}{3+3e^x}dx$

Solución:

a) Si $e^x=t \Rightarrow e^x dx=dt$.

Por tanto:

$$\int\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}dx=\int\frac{1}{(1+t)^2}dt=\int(1+t)^{-2}dt=-(1+t)^{-1}+c=\frac{-1}{1+t}+c=\frac{-1}{1+e^x}+c.$$

b) $\displaystyle\int\frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx=\int\frac{1}{t^2+3t+2}dt$.

Por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2+3t+2}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}=\frac{A(t+2)+B(t+1)}{(t+1)(t+2)} \Rightarrow 1=A(t+2)+B(t+1)\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}$$

Por tanto,

$$\int\frac{1}{t^2+3t+2}dx=\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\ln(t+1)-\ln(t+2)+c=\ln\frac{t+1}{t+2}+c$$

Luego: $\displaystyle\int\frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx=\ln\frac{e^x+1}{e^x+2}+c$

c) Si se hace $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{e^x}dt = \frac{1}{t}dt$.

Luego:

$$\int \frac{2}{3+3e^x}dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{t(1+t)}dt.$$

La segunda integral se hace por descomposición en fracciones simples:.

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} = \frac{A(1+t)+Bt}{t(1+t)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow B=-1.$$

Por tanto:

$$\int \frac{2}{3+3e^x}dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{t(1+t)}dt = \frac{2}{3}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)dt = \frac{2}{3}\left(\ln t - \ln(1+t)\right) + c =$$

Luego: $\int \frac{2}{3+3e^x}dx = \frac{2}{3}\left(x - \ln\left(1+e^x\right)\right) + c$

16. Halla el área del recinto limitado por las curvas de las funciones: $f(x) = x^3 - 3x - 2$ y $g(x) = x^2 - x - 2$.

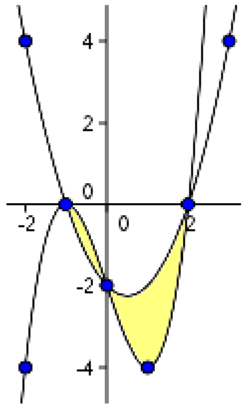
<u>Solución</u>:

→ Puntos de corte de las gráficas

Se resuelve la ecuación $f(x) = g(x)$: $x^3 - 3x - 2 = x^2 - x - 2 \Rightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x\left(x^2 - x - 2\right) = 0 \Rightarrow x = 0; x = -1; x = 2.$

Los puntos de intersección serán: (–1, 0); (0, –2); (2, 0).



→ La representación se puede hacer dando más valores.

También podría verse que $f(x) = x^3 - 3x - 2$ tiene un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$, pues: $f´(x) = 3x^3 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right)$ se anula en esos puntos.

→ El recinto es el sombreado en la figura.

Su área viene dada por:

$$A = \int_{-1}^{0}\left(x^3 - 3x - 2 - \left(x^2 - x - 2\right)\right)dx + \int_{0}^{2}\left(x^2 - x - 2 - \left(x^3 - 3x - 2\right)\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \int_{-1}^{0}\left(x^3 - x^2 - 2x\right)dx + \int_{0}^{2}\left(-x^3 + x^2 + 2x\right)dx =$$

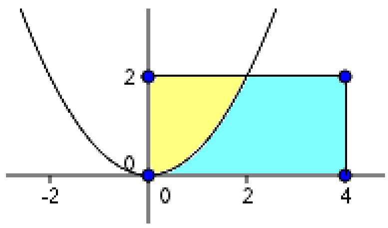
$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2\right]_{0}^{2} = -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) + \left(-4 + \frac{8}{3} + 4\right) = \frac{37}{12}\ \text{u}^2.$$

17. (PAU, junio 2013). La parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ divide al rectángulo de vértices (0, 0), (4, 0), (4, 2) y (0, 2) en dos recintos.

Calcula el área de cada uno de los recintos.

<u>Solución</u>:

La situación es la que se muestra en la figura adjunta.

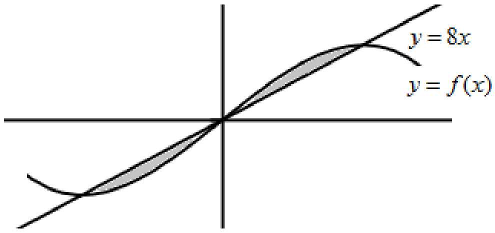


El área del "triángulo" viene dada por la integral,

$$\int_0^2 \left(2-\frac{1}{2}x^2\right)dx = \left[2x-\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{3}\ \text{u}^2.$$

Como el área del rectángulo vale 8 u^2, la del recinto de la derecha será $8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$ u^2.

18. Halla el área sombreada en la siguiente figura. Las curvas son: $y=8x$ y $f(x)=-x^3+12x$.



Solución:

La curva y la recta se cortan en las soluciones de $\begin{cases} y=-x^3+12x \\ y=8x \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 8x=-x^3+12x \Rightarrow x^3-4x=0 \Rightarrow x\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow x=-2;\ x=0;\ x=2.$$

Como el área solicitada aparece sombreada en la figura dada, atendiendo a la simetría, se tiene que:

$$S=2\int_0^2 \left(-x^3+12x-8x\right)dx = 2\int_0^2 \left(-x^3+4x\right)dx = 2\left(-\frac{x^4}{4}+2x^2\right)\Big|_0^2 = 2(-4+8)=8\ \text{u}^2.$$