Definición de derivada

<u>Observación</u>: Algunos de los enunciados de estos problemas se han obtenido de Selectividad.

1. Halla, utilizando la definición, la derivada de la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ en el punto $x = 2$. Comprueba aplicando las reglas de derivación que tu resultado es correcto.

Solución:

La derivada pedida vale: $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$$f(2)=\frac{2}{5};\ \ f(2+h)=\frac{2+h}{(2+h)^2+1}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(2+h)-f(2)=\frac{2+h}{(2+h)^2+1}-\frac{2}{5}=\frac{10+5h-2(h^2+4h+5)}{5(h^2+4h+5)}=\frac{-3h-2h^2}{5h^2+20h+25}$$

Por tanto:

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\ \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{-3h-2h^2}{5h^2+20h+25}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-3h-2h^2}{5h^3+20h^2+25h}=-\frac{3}{25}$$

- Derivando utilizando las reglas se tiene:

$$f'(x)=\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

Si $x = 2$, $f'(2)=\dfrac{1-2^2}{(2^2+1)^2}=\dfrac{-3}{25}$.

Efectivamente, coinciden.

---

2. Aplicando la definición demuestra que la función $f(x)=|x-2|$ no es derivable en $x = 2$. Da también un razonamiento gráfico.

Solución:

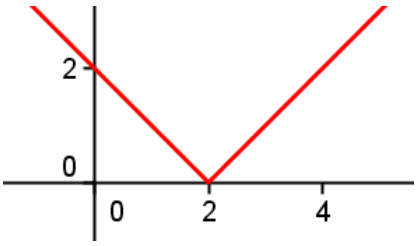
Como se sabe: $f(x)=|x-2|=\begin{cases}-x+2, & x<2\\ x-2, & x\geq 2\end{cases}$

Haciendo las derivadas laterales en x = 2 se tiene:

Por la izquierda: $f'(2^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{|h|}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h}{h}=-1$

Por la derecha: $f'(2^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{|h|}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h}{h}=1$

Como no coinciden, la función no es derivable en $x = 2$. En la representación gráfica puede observarse que la función tiene un *pico* en $x = 2$.



3. Aplicando la definición, determina los valores de *a* y *b* para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & \text{si} \quad x\le 0 \\ ax+b & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ sea derivable en el punto $x = 0$.

Representa gráficamente la función hallada.

Solución:

Continuidad:

$$\text{Si } x \to 0^-, \quad f(x)=x^2+2x \to 0$$
$$\text{Si } x \to 0^+, \quad f(x)=ax+b \to b \qquad \Rightarrow \; b=0$$

Derivabilidad:

Por la izquierda:

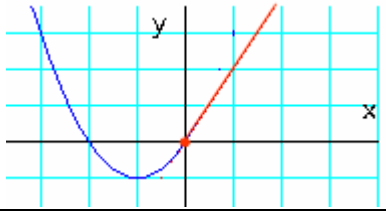
$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+2h}{h}=2$$

Por la derecha:

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{ah+b}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{ah}{h}=a \Rightarrow a=2.$$

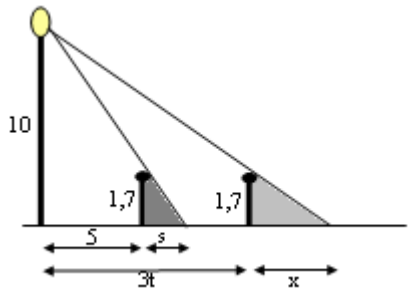
Por tanto, la función pedida es $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & \text{si} \quad x\le 0 \\ 2x & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

Su gráfica, que se obtiene dando valores es la siguiente.



4. Una persona camina a la velocidad constante de 3 m/s alejándose horizontalmente en línea recta desde la base de un farol cuyo foco luminoso está a 10 m de altura. Sabiendo que la persona mide 1,70 m, calcular:
a) La longitud de la sombra cuando la persona está a 5 m de la base del farol.
b) La velocidad de crecimiento de la sombra a los *t* segundos de comenzar a caminar

Solución:
La situación puede esquematizarse en el siguiente dibujo.



a) Si s es la longitud de la sombra cuando está a 5 m, por el teorema de Thales se tiene:

$$\frac{10}{1{,}7}=\frac{5+s}{s} \;\Rightarrow\; 10s=8{,}5+1{,}7s \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; s=\frac{8{,}5}{8{,}3}=1{,}024 \text{ m}$$

b) A los *t* segundos de empezar a caminar la persona está a 3*t* m del farol. Si la longitud de la sombra en ese instante mide x m, se cumple:

$$\frac{10}{1{,}7}=\frac{3t+x}{x} \Rightarrow 10x=5{,}1t+1{,}7x \Rightarrow x=\frac{5{,}1t}{8{,}3} \text{ m}$$

La variación de la sombra (velocidad de crecimiento) en el instante *t* viene dada por la derivada de x con respecto a *t*, $\frac{dx}{dt}=\frac{5{,}1}{8{,}3}$ m/s

---

5. Un incendio se extiende en forma circular uniformemente. El radio del círculo quemado crece a la velocidad constante de 1,8 m/min.
a) Obtener el área quemada en función del tiempo *t* transcurrido desde el comienzo del incendio.
b) Calcular la velocidad de crecimiento del área del círculo quemado en el instante en que el radio alcance 45 m.

Solución:
El radio del círculo quemado crece a la velocidad constante de 1,8 m/min significa que

$$\frac{dr}{dt}=1{,}8 \;\Leftrightarrow\; dr=1{,}8dt \;\Leftrightarrow\; r=1{,}8t$$

Con esto:
a) El área quemada en función de *t* será $S=\pi r^2=\pi\cdot 1{,}8^2t^2=3{,}24\pi t^2$
b) La velocidad de crecimiento del área viene dada por $\frac{dS}{dt}=6{,}48\pi t$.
El radio alcanza los 45 m cuando 45 = 1,8*t* $\Rightarrow$ *t* = 25 minutos.
Por tanto, la velocidad de crecimiento en el instante *t* = 25 será $\frac{dS(25)}{dt}=6{,}48\pi\cdot 25=162\pi$

Práctica de derivadas

6. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\left(3x^5-4x^2+7\right)^4$ b) $f(x)=\left(3x-2x^2\right)\cdot\left(4x^2-1\right)^3$

c) $f(x)=\dfrac{2x^3-1}{x^2-4x}$ d) $f(x)=\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}+\dfrac{4}{x^5}$ e) $y=\dfrac{2x-1}{x^2+3x}$

f) $y=\dfrac{2}{3x^2-5x}$ g) $y=\dfrac{x^2-3x}{x^2+2}$ h) $y=\dfrac{3x}{(x^2-1)^5}$

Solución:

a) $f'(x)=4\left(3x^5-4x^2+7\right)^3\cdot(15x^4-8x)$

b) $f'(x)=(3-4x)\cdot\left(4x^2-1\right)^3+\left(3x-2x^2\right)\cdot 3\left(4x^2-1\right)^2\cdot 8x$

c) $f'(x)=\dfrac{6x^2(x^2-4x)-(2x^3-1)(2x-4)}{(x^2-4x)^2}=\dfrac{2(x^4-8x^3+x-2)}{(x^2-4x)^2}$

d) $f'(x)=-\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{12}{x^5}-\dfrac{20}{x^6}$

e) $y'=\dfrac{2(x^2+3x)-(2x-1)(2x+3)}{(x^2+3x)^2}=\dfrac{-2x^2+2x-3}{(x^2+3x)^2}$

f) $y'=\dfrac{-2\cdot(6x-5)}{(3x^2-5x)^2}=\dfrac{10-12x}{(3x^2-5x)^2}$

g) $y'=\dfrac{(2x-3)(x^2+2)-(x^2-3x)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\dfrac{3x^2+4x-6}{(x^2-1)^2}$

h) $y'=\dfrac{3(x^2-1)^5-3x\cdot 5(x^2-1)^4\cdot 2x}{(x^2-1)^{10}}=\dfrac{3(x^2-1)-3x\cdot 5\cdot 2x}{(x^2-1)^6}=\dfrac{-27x^2-3}{(x^2-1)^6}$

---

7. Para las funciones dadas en el problema anterior, halla el valor de $f'(0)$ en el caso en que esté definida. Si no está definida, indica el motivo

Solución:

En principio, basta con sustituir.

a) $f'(0)=0$

b) $f'(0)=-3$.

c), d) y f) No existe. La función no está definida en ese punto.

g) $f'(0)=-6$

h) $f'(0)=-3$

---

8. Deriva y simplifica:

a) $y=\sqrt{(x^2+5x)^3}$ b) $y=\sqrt[3]{(5x^2-2x)^2}$

Solución:

a) $y'=\dfrac{3(x^2+5x)^2\cdot(2x+5)}{2\sqrt{(x^2+5x)^3}}=\dfrac{3(x^2+5x)(2x+5)}{2\sqrt{x^2+5x}}=\dfrac{3}{2}(2x+5)\sqrt{x^2+5x}$

b) $y=\sqrt[3]{(5x^2-2x)^2}\ =\ (5x^2-2x)^{2/3}\ \Rightarrow\ y'=\dfrac{2}{3}(5x^2-2x)^{-1/3}(10x-2)=\dfrac{2(10x-2)}{3\sqrt[3]{5x^2-2x}}$

---

9. Para las funciones del problema anterior, indica los puntos en los que la derivada vale 0.

Solución:

a) $\dfrac{3}{2}(2x+5)\sqrt{x^2+5x}=0\ \Rightarrow x=-5,\ x=-5/2$ o $x=0$.

En los tres puntos hallados hay dificultades.

En $x=-5/2$ la función no está definida. Por tanto, en ese punto no es derivable.

En $x=-5$ hay problemas, pues la función sólo está definida por la izquierda. Por tanto, en ese punto la función no es derivable.

El razonamiento es análogo para $x=0$, donde sólo esta definida por la derecha.

En consecuencia, la derivada no se anula nunca.

b) $\dfrac{2(10x-2)}{3\sqrt[3]{5x^2-2x}}=0\ \Rightarrow\ x=1/5$

---

10. Deriva y simplifica (piensa si puedes utilizar las propiedades de los logaritmos):

a) $y=\log(4x^2-x+2)$ b) $y=\log(x^3-5x)^7$

c) $f(x)=\log\dfrac{1}{x^2}$ d) $f(x)=\log\left(x-2\sqrt{x}\right)$

Solución:

a) $y'=\dfrac{8x-1}{4x^2-x+2}\log e$

b) $y=\log(x^3-5x)^7\ =7\log(x^3-5x)\ \Rightarrow\ y'=7\cdot\dfrac{3x^2-5}{x^3-5x}=\dfrac{21x^2-35}{x^3-5x}$

c) $f(x)=\log\dfrac{1}{x^2}\ \Rightarrow\ f(x)=-\log x^2\ =-2\log x\ \Rightarrow\ f'(x)=\dfrac{1}{x}\log e$

d) $f'(x)=\dfrac{1}{x-2\sqrt{x}}\cdot\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\log e$

---

11. Deriva y simplifica (piensa si puedes utilizar las propiedades de los logaritmos):

a) $y = \ln\sqrt{3x^6 - 2x}$ b) $y = \sqrt{\ln(3x^6 - 2x)}$

c) $f(x) = \ln\left(\cos^2 x\right)$ d) $f(x) = \ln\left(\cos x^2\right)$

Solución:

a) $y = \ln\sqrt{3x^6 - 2x} = \frac{1}{2}\ln(3x^6 - 2x) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{18x^5 - 2}{3x^6 - 2x} = \frac{9x^5 - 1}{3x^6 - 2x}$

b) $y' = \frac{1}{2\sqrt{\ln(3x^6 - 2x)}}\cdot\frac{18x^5 - 2}{3x^6 - 2x} = \frac{9x^5 - 1}{(3x^6 - 2x)\sqrt{\ln(3x^6 - 2x)}}$

c) $f(x) = \ln\left(\cos^2 x\right) \Rightarrow f(x) = 2\ln\cos x \Rightarrow f'(x) = 2\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = -2\operatorname{tag} x$

d) $f(x) = \ln\left(\cos x^2\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x^2\cdot 2x}{\cos x^2} = -2x\operatorname{tag} x^2$

---

12. Aplicando las fórmulas de derivación y las propiedades de los logaritmos, calcula, simplificando el resultado, las siguientes derivadas:

a) $y = \ln\sqrt{x^3 - 5x}$ b) $y = (1 + x)\cdot\ln(1 + x)$ c) $y = \ln\left(\frac{1}{2x + 3}\right)$ d) $y = 5\log x^2$

Solución:

a) $y = \ln\sqrt{2x^3 - 6x} = \ln(2x^3 - 6x)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln(2x^3 - 6x) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{6x^2 - 6}{2x^3 - 6x} = \frac{3x^2 - 3}{2x^3 - 6x}$

b) $y = (1 + x)\cdot\ln(1 + x) \Rightarrow y' = \ln(1 + x) + (1 + x)\cdot\frac{1}{1 + x} = \ln(1 + x) + 1$

c) $y = \ln\left(\frac{1}{2x + 3}\right) = \ln 1 - \ln(2x + 3) \Rightarrow y' = \frac{2}{2x + 3}$

d) $y = 5\log x^2 = 10\log x \Rightarrow y' = \frac{10}{x}\log e$

---

13. Aplicando logaritmos halla la derivada de:

a) $f(x) = x^{\ln x}$ b) $f(x) = \left(e^x\right)^{e^x}$

Solución:

a) Aplicando logaritmos: $\ln f(x) = \ln x^{\ln x} = \ln x \ln x = (\ln x)^2$.

Derivando: $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x}\ln x \Rightarrow f'(x) = x^{\ln x}\cdot\frac{2}{x}\ln x$

b) Aplicando logaritmos: $\ln f(x) = \ln\left(e^x\right)^{e^x} = e^x \ln e^x = xe^x$.

Derivando: $\frac{f'(x)}{f(x)} = e^x + xe^x \Rightarrow f'(x) = \left(e^x\right)^{e^x}(e^x + xe^x)$

---

14. Deriva:

a) $f(x) = x^2 \ln(3x-4)$ b) $f(x) = (x-1)\ln(x^2-1)$ c) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2-1)}{x^3}$

Solución:

a) $f(x) = x^2 \ln(3x-4) \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x\ln(3x-4) + x^2 \dfrac{3}{3x-4} = 2x\ln(3x-4) + \dfrac{3x^2}{3x-4}$

b) $f(x) = (x-1)\ln(x^2-1) \;\Rightarrow\; f'(x) = \ln(x^2-1) + (x-1)\dfrac{2x}{(x^2-1)} = \ln(x^2-1) + \dfrac{2x}{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2-1)}{x^3} \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{\dfrac{2x}{(x^2-1)}\cdot x^3 - 3x^2\ln(x^2-1)}{x^6} = \dfrac{2x^2 - 3(x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^4(x^2-1)}$

---

15. Deriva:

a) $y = 2^{3x^2-1}$ b) $y = e^{-x^2+3}$ c) $y = x^2 e^{2x+1}$

d) $y = \dfrac{e^x}{x+2}$ e) $y = e^{2\sqrt{x^3-2x}}$ f) $f(x) = (x-3)e^{x^2-3x}$

Solución:

a) $y' = 6x\cdot 2^{3x^2-1}\ln 2$

b) $y' = -2xe^{-x^2+3}$

c) $y' = 2xe^{2x+1} + x^2\cdot 2e^{2x+1} = 2x(1+x)e^{2x+1}$

d) $y' = \dfrac{e^x\cdot(x+2) - e^x}{(x+2)^2} = \dfrac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}$

e) $y' = \dfrac{2(3x^2-2)}{2\sqrt{x^3-2x}}e^{2\sqrt{x^3-2x}} = \dfrac{3x^2-2}{\sqrt{x^3-2x}}e^{2\sqrt{x^3-2x}}$

f) $f'(x) = e^{x^2-3x} + (x-3)\cdot(2x-3)e^{x^2-3x}$

---

16. Deriva:

a) $f(x) = x^2 e^{\cos x}$ b) $f(x) = \cos^2 e^x$ c) $f(x) = \cos^2 x^3$

d) $f(x) = \text{sen}\,(x^3-3x)^2$ e) $f(x) = \left(\text{sen}\,(x^3-3x)\right)^2$ f) $f(x) = \cos\dfrac{1}{x^2}$

g) $f(x) = \dfrac{x}{\text{sen}\,x}$ h) $f(x) = \dfrac{\text{sen}^2 x}{x^2+1}$

Solución:

a) $f'(x) = 2xe^{\cos x} - x^2\text{sen}\,x\cdot e^{\cos x} = xe^{\cos x}\left(2 - x\text{sen}\,x\right)$

b) $f'(x) = 2\cos e^x\cdot(-\text{sen}\,e^x)\cdot e^x = -2e^x\cdot\text{sen}\,e^x\cdot\cos e^x$

c) $f'(x) = 2\cos x^3\cdot(-\text{sen}\,x^3)\cdot 3x^2 = -6x^2\cdot\text{sen}\,x^3\cdot\cos x^3$

d) $f'(x) = 2\,(x^3-3x)(3x^2-3)\cos(x^3-3x)^2$

e) $f'(x) = 2\left(\text{sen}(x^3-3x)\right)\cdot\cos(x^3-3x)\cdot(3x^2-3) = 6(x^2-1)\text{sen}(x^3-3x)\cdot\cos(x^3-3x)$

f) $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}\left(-sen\dfrac{1}{x^2}\right) = 2x^{-3}sen(x^{-2})$

g) $f'(x) = \dfrac{\text{sen}\,x - x\cos x}{\text{sen}^2 x}$

h) $f'(x) = \dfrac{2\text{sen}\,x\cdot\cos x\cdot(x^2+1) - 2x\text{sen}^2 x}{\left(x^2+1\right)^2}$

---

17. Deriva:

a) $y = \text{tag}\,(x^3 + 2)$ b) $y = \text{tag}\,(x+2)^3$ c) $y = \text{tag}^3\,(x+2)$

d) $f(x) = xtag(x-1)$ f) $f(x) = \left(tagx^2\right)^2$

Solución:

a) $y' = 3x^2(1 + \text{tag}^2\,(x^3+2)) = \dfrac{3x^2}{\cos^2(x^3+2)}$

b) $y' = 3(x+2)^2(1 + \text{tag}^2\,(x+2)^3)$

c) $y' = 3\text{tag}^2(x+2)(1 + \text{tag}^2\,(x+2)) = 3\text{tag}^2(x+2) + 3\text{tag}^4\,(x+2))$

d) $f'(x) = tag(x-1) + x(1 + tag^2(x-1))$

f) $f'(x) = 2\left(tagx^2\right)\cdot\left(1 + tag^2x^2\right)\cdot 2x = 4x\left(tagx^2\right)\cdot\left(1 + tag^2x^2\right)$

---

18. A partir de la derivada de la tangente halla la de $f(x) = \text{cotag}\,x$. Halla también la derivada de $y = \text{cotag}\,(3x^2+2)$.

Solución:

Por definición de cosecante: $f(x) = \text{cotag}\,x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x}$.

Derivando: $f'(x) = \dfrac{-\text{sen}\,x\cdot\text{sen}\,x - \cos x\cos x}{(\text{sen}\,x)^2} = \dfrac{-1}{\text{sen}^2\,x} = -\text{cosec}^2\,x$

Para $y = \text{cotag}\,(3x^2 - 5x + 2) \Rightarrow y' = -(6x-5)\cdot\text{cosec}^2\,(3x^2 - 5x + 2)$.

---

19. Deriva:

a) $y = \text{arcsen}\,x^3$ b) $y = \text{arcsen}\,(\cos x)$ c) $y = \arccos(\cos x)$

d) $y = \arccos(1+x)$ e) $y = \text{arctag}\,\sqrt{x}$ f) $y = arctag(e^{x^2})$

Solución:

a) $y' = \dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$

b) $y' = \dfrac{-senx}{\sqrt{1-(\cos x)^2}} = \dfrac{-senx}{\pm senx} = \pm 1$

Nota: Por definición $y = \text{arcsen}\,(\cos x) \Leftrightarrow \text{sen}\,y = \cos x \Leftrightarrow y = \pi/2 - x$ o $y = x - \pi/2$.
Por tanto, $y' = \pm 1$

c) $y' = -\dfrac{-senx}{\sqrt{1-(\cos x)^2}} = \dfrac{senx}{\pm senx} = \pm 1$

Nota: Por definición $y = \text{arcsen}\,(\cos x) \Leftrightarrow \text{sen}\,y = \cos x \Leftrightarrow y = \pi/2 - x$ o $y = x - \pi/2$.
Por tanto, $y' = \pm 1$

d) $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(1+x)^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{x(-x-2)}}$ e) $y' = \dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ f) $y' = \dfrac{2xe^{x^2}}{1+e^{2x^2}}$

---

20. Halla la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado:

a) $y = \ln\sqrt{\sin x^2}$ b) $y = x^{\ln x}$

Solución:

a) $y = \ln\sqrt{\sin x^2} \Leftrightarrow y = \ln(\sin x^2)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln\sin x^2 \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2x = x\text{cotag } x^2$

b) Aplicando logaritmos: $y = x^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln\left(x^{\ln x}\right) \Rightarrow \ln y = \ln x\cdot\ln x = (\ln x)^2$

Derivando: $\frac{y'}{y} = 2(\ln x)\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow y' = y\cdot\frac{2\ln x}{x} \Rightarrow y' = x^{\ln x}\cdot\frac{2\ln x}{x}$

21. Calcula, simplificando el resultado todo lo posible, la derivada de la función:

$$f(x) = \ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

Solución:

Por las propiedades de los logaritmos:

$$f(x) = \ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \Rightarrow f(x) = \ln(1-\cos x) - \ln(1+\cos x)$$

Derivando:

$$f'(x) = \frac{\text{sen } x}{1-\cos x} - \frac{-\text{sen } x}{1+\cos x} = \frac{(1+\cos x)\text{sen } x + (1-\cos x)\text{sen } x}{1-\cos^2 x} = \frac{2\text{sen } x}{\text{sen}^2 x} = \frac{2}{\text{sen } x}$$

---

22. Halla, simplificando el resultado, la función derivada de $f(x) = \text{arctag}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$, para $0 \le x \le \pi$

Solución:

Recordamos que si $y = \text{arctag } f(x) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$.

Por tanto,

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}\cdot\frac{senx(1+\cos x)-(1-\cos x)(-senx)}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{1+\cos x}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}\cdot\frac{2senx}{(1+\cos x)^2} = \frac{\sqrt{1+\cos x}}{4\sqrt{1-\cos x}}\cdot\frac{2senx}{1+\cos x} =$$

$$= \frac{2senx}{4\sqrt{1-\cos x}\sqrt{1+\cos x}} = \frac{senx}{2\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{senx}{2senx} = \frac{1}{2}$$

<u>De otro modo.</u> Una de las fórmulas de trigonometría es: $\text{tag}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

En consecuencia, $f(x) = \text{arctag}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \text{arctag}\left(\text{tag}\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}$

---

23. Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = senx^2$ halla la derivada de las funciones $F(x) = f(g(x))$ y $G(x) = g(f(x))$, aplicando la regla de la cadena.

Solución:
Para $F(x) = f(g(x)) \Rightarrow F'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$
Como $f'(x) = 2x$, se tendrá que $f'(g(x)) = 2g(x) = 2senx^2$.
Por otra parte $g'(x) = 2x\cos x^2$.
Por tanto,

$$F'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x) = 2senx^2 \cdot 2x\cos x^2 = 4xsenx^2 \cos x^2$$

Como $g'(x) = 2x\cos x^2$, se tendrá que $g'(f(x)) = 2f(x)\cos\left(f(x)\right)^2 = 2(x^2+1)\cos(x^2+1)^2$.
Por otra parte $f'(x) = 2x$.
Por tanto,

$$G'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x) = \left[2(x^2+1)\cos(x^2+1)^2\right]\cdot 2x = 4x(x^2+1)\cos(x^2+1)^2$$

---

24. Halla la derivada *n*-ésima de $f(x) = \ln x$.

Solución:
De $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{-1}{x^2} \Rightarrow f'''(x) = \dfrac{+2}{x^3} \Rightarrow f^{4)}(x) = \dfrac{-2\cdot 3}{x^4} \Rightarrow$
$f^{5)}(x) = \dfrac{+2\cdot 3\cdot 4}{x^5} \Rightarrow \ldots\ f^{n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}$

Nota: Si se escribe $f'(x) = x^{-1}$ las sucesivas derivadas se obtienen con mayor facilidad, pues:
$f''(x) = -1\cdot x^{-2} \Rightarrow f'''(x) = -1\cdot(-2)x^{-3} \Rightarrow f^{4)}(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4} \Rightarrow \ldots$

Funciones definidas a trozos

25. a) Calcula los valores de *a* y *b* para que la función

$$f(x)=\begin{cases} 3x+2 & \text{si } x<0 \\ x^2+2a\cos x & \text{si } 0\le x<\pi \\ ax^2+b & \text{si } x\ge\pi \end{cases}$$

sea continua para todo valor de *x*.
b) Estudia la derivabilidad de *f*(*x*) para los valores de *a* y *b* obtenidos en el apartado anterior.

Solución:
a) Hay dos puntos conflictivos: $x = 0$ y $x = \pi$. En ambos casos la función está definida, siendo $f(0) = 2a$ y $f(\pi) = a\pi^2 + b$. Para que sea continua, además, debe tener límite en esos puntos y coincidir con su valor de definición.
En $x = 0$:

Si $x \to 0^-$, $f(x)=3x+2 \to 2$

Si $x \to 0^+$, $f(x)=x^2+2a\cos x \to 2a$.

Ambos límites coinciden cuando $a = 1$.
En $x = \pi$:

Si $x \to \pi^-$, $f(x)=x^2+2a\cos x \to \pi^2-2a=\pi^2-2$

Si $x \to \pi^+$, $f(x)=ax^2+b \to a\pi^2+b=\pi^2+b$.

Ambos límites coinciden cuando $b = -2$
La función continua es:

$$f(x)=\begin{cases} 3x+2 & \text{si } x<0 \\ x^2+2\cos x & \text{si } 0\le x<\pi \\ x^2-2 & \text{si } x\ge\pi \end{cases}$$

b) Salvo en x = 0 y x = π, su derivada es

$$f'(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x<0 \\ 2x-2\sin x & \text{si } 0<x<\pi \\ 2x & \text{si } x>\pi \end{cases}$$

Para $x = 0$:

Si $x \to 0^-$, $f'(x)=3 \to 3$

Si $x \to 0^+$, $f'(x)=2x-2\sin x \to 0$.

Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en x = 0.
Para x = π:

Si $x \to \pi^-$, $f'(x)=2x-2\sin x \to 2\pi$

Si $x \to \pi^+$, $f'(x)=2x \to 2\pi$

Como las derivadas laterales coinciden, la función es derivable en $x = \pi$.

Por tanto, la función obtenida será derivable en $\mathbf{R} - \{0\}$.

26. Dada la función $f(x)=\begin{cases}3-ax^2, & \text{si } x\le 1\\ 2/(ax), & \text{si } x>1\end{cases}$

a) ¿Para qué valores del parámetro *a* es continua?
b) ¿Para qué valores de *a* es derivable?

Solución:
a) El único punto conflictivo es $x = 1$. Para que sea continua en x = 1 los límites laterales deben coincidir con su valor de definición.

$$\text{Si } x\to 1^-,\quad f(x)=3-ax^2\ \to\ 3-a$$
$$\text{Si } x\to 1^+,\quad f(x)=\frac{2}{ax}\ \to\ \frac{2}{a}$$

Como deben ser iguales: $3-a=\dfrac{2}{a}\Rightarrow\ a^2-3a+2=0\ \Rightarrow\ a=1$ o $a=2$

La función es continua cuando $a = 1$ o $a = 2$.

b) Será derivable en $x = 1$ si las derivadas laterales coinciden: $f'(1^-) = f'(1^+)$. Salvo en $x = 1$ la función derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases}-2ax, & \text{si } x<1\\ -2/(ax^2), & \text{si } x>1\end{cases}$$
$$\text{Si } x\to 1^-,\quad f'(x)=-2ax\ \to\ -2a$$
$$\text{Si } x\to 1^+,\quad f'(x)=\frac{-2}{ax^2}\ \to\ \frac{-2}{a}$$

Son iguales cuando $-2a=-\dfrac{2}{a}\Rightarrow\ a^2-1=0\ \Rightarrow\ a=1$ o $a=-1$

Por tanto, la función es derivable sólo para $a = 1$.

Observación: Para $a = 2$ la función es continua pero no derivable. Para $a = -1$ la función no es continua, luego tampoco puede ser derivable.

27. Dada la función $f(x)=\begin{cases} 5+2\,\text{sen}\,x & \text{si } x\le 0 \\ -x^2+ax+b & \text{si } x>0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valores de los parámetros *a* y *b* es continua la función $f(x)$?
b) Determina *a* y *b* para que *f*(*x*) sea derivable en *x* = 0.

Solución:
a) El único punto conflictivo es *x* = 0.
Continuidad en *x* = 0:

Si $x\to 0^-$, $f(x)\to 5$
Si $x\to 0^+$, $f(x)\to b \Rightarrow b=5$

Por tanto, para cualquier valor de *a*, $f(x)=\begin{cases} 5+2\,\text{sen}\,x & \text{si } x\le 0 \\ -x^2+ax+5 & \text{si } x>0 \end{cases}$ es continua.

b) Salvo en *x* = 0, la derivada de la función es:

$$f(x)=\begin{cases} 2\cos x & \text{si } x<0 \\ -2x+a & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Derivabilidad en *x* = 0:

Si $x\to 0^-$, $f'(x)\to 2$
Si $x\to 0^+$, $f'(x)\to a \Rightarrow a=2$

La función $f(x)=\begin{cases} 5+2\,\text{sen}\,x & \text{si } x\le 0 \\ -x^2+2x+5 & \text{si } x>0 \end{cases}$ es continua y derivable en todo **R**.

---

28. Dada la función: $f(x)=\begin{cases} sen(x) & \text{si } x\le 0 \\ x-ax^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$.

¿Existen valores de *a* para los cuales *f* sea derivable en toda la recta real?
En cualquier caso razonar la contestación y si es afirmativa encontrar dichos valores.

Solución:
El único punto que presenta dificultades es *x* = 0. En ese punto hay que estudiar, en primer lugar la continuidad, después la derivabilidad

Continuidad en *x* = 0:

Si $x\to 0^-$, $f(x)=\text{sen}\,x\to 0$
Si $x\to 0^+$, $f(x)=x-ax^2\to 0$

Como los límites laterales coinciden, la función es continua para cualquier valor de *a*.

Derivabilidad.

Salvo para *x* = 0, la función derivada es $f'(x)=\begin{cases} \cos x & \text{si } x<0 \\ 1-2ax & \text{si } x>0 \end{cases}$

Si $x\to 0^-$, $f'(x)=\cos x\to 1$
Si $x\to 0^+$, $f'(x)=1-2ax\to 1$

Como las derivadas laterales son iguales, independientemente del valor de *a*, la función dada es derivable para cualquier valor de *a*.

---

29. En qué puntos no son derivables las funciones:

a) $f(x) = |x^2 + x|$ b) $f(x) = |\cos x|$

En cada caso indica el porqué.

Solución:

a) La función $f(x) = |x^2 + x|$ puede definirse a trozos así: $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \le -1 \\ -x^2 - x & -1 < x < 0 \\ x^2 + x & x \ge 0 \end{cases}$

Su derivada, salvo en $x = -1$ y en $x = 0$, es: $f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < -1 \\ -2x-1 & -1 < x < 0 \\ 2x+1 & x > 0 \end{cases}$

En $x = -1$, $f'(-1^-) = -1 \neq f'(-1^+) = 1 \Rightarrow$ no es derivable en ese punto.

En $x = 0$, $f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 1 \Rightarrow$ no es derivable en $x = 0$.

Nota: Si se hace su gráfica puede observarse que en esos puntos la función presenta sendos *picos*.

b) $f(x) = |\cos x|$, cuya gráfica es

no es derivable en $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Al mismo resultado se llega si definimos $f(x) = |\cos x| = \begin{cases} \cos x & -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ -\cos x & \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$,

Naturalmente la función se repite con período π.

---

30. Se considera la función $f(x)$ = arctag x. Demuestra que existe al menos un número $x \in (0, 1)$ tal que $f'(x) = x$.

Solución:

$$f(x) = \text{arctag } x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Consideramos ahora la función $F(x) = f'(x) - x$. Esto es, $F(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - x$

Esta función cumple las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo [0, 1], pues es continua en él y además, $F(0) = 1$ y $F(1) = -\dfrac{1}{2}$. En consecuencia, existe un punto $x \in (0, 1)$ tal que $F(x) = 0$.

Pero

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) = \frac{1}{1+x^2} - x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} = x \Leftrightarrow f'(x) = x$$

Como se quería demostrar.