Solución de los Problemas Propuestos

1. Al extraer una carta de una baraja de 40 cartas calcula la probabilidad de que sea
a) Un rey. b) El rey de copas. c) No sea una figura.
Solución:
a) Entre las 40 cartas hay 4 reyes ⇒ P(Rey) = 4/40.

b) P(Rey de copas) = 1/40.

c) Las figuras de la baraja son 12: 4 sotas, 4 caballos y 4 reyes. Las 28 cartas restantes no son figuras. Por tanto,
P(No figura) = 28/40.

2. Si se consideran familias con tres hijos, ¿cuál es la probabilidad de que una de esas familias, elegida al azar, tenga al menos una niña?
Solución:
El espacio muestral tiene 8 sucesos elementales:
{*HHH*, *HHM*, *HMH*, *MHH*, *HMM*, *MHM*, *MMH*, *MMM*}, siendo H = hombre y M = mujer.
La probabilidad de que los tres hijos serán varones es: $P(HHH)=\frac{1}{8}$.
Como tener al menos una niña es el suceso contrario de que los tres sean varones, se tendrá:
P(al menos una niña) = $1-P(HHH)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

3. Al lanzar cinco monedas iguales pueden obtenerse 0, 1, 2, 3, 4 o 5 caras. ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de esos sucesos?
Solución:
Al lanzar 5 monedas, como cada moneda presenta 2 resultados (C y X), el total de casos posibles será $VR_{2,5}=2^5=32$.

Con 0 caras, solo se da el suceso {*XXXXX*}: $P(0C)=\frac{1}{32}$.

Con 1 caras, suceso {*CXXXX*, *XCXXX*, *XXCXX*, *XXXCX*, *XXXXC*}: $P(1C)=\frac{5}{32}$.

Con 2 caras, suceso
{*CCXXX*, *CXCXX*, *CXXCX*, *CXXXC*, *XCCXX*, *XCXCX*, *XCXXC*, *XXCCX*, *XXCXC*, *XXXCC*}:
$P(2C)=\frac{10}{32}$.
El suceso 3 caras tiene el mismo número de casos favorables que 2 caras, {*CCCXX*, …, *XXCCC*}:
$P(3C)=\frac{10}{32}$.

Con 4 caras, suceso {*CCCCX*, *CCCXC*, *CCXCC*, *CXCCC*, *XCCCC*}: $P(4C)=\frac{5}{32}$.

Con 5 caras, solo se da el suceso {*CCCCC*}: $P(5C)=\frac{1}{32}$.

4. Calcula la probabilidad de que al lanzar dos veces un dado (con las caras numeradas del 1 al 6) se obtenga:
a) Al menos un as: {1}. b) Dos ases. c) Dos números distintos.
Solución:
Espacio muestral:
E = {(1, 1)..., (1, 6), (2,1)…, (2,6)…, (6,1)…, (6,6)} → 36 sucesos elementales.

a) Los sucesos favorables son 11: {(1, 1)..., (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6,1)}.
Luego, P(al menos un as) = $\frac{11}{36}$.

b) P(2 ases) = $\frac{1}{36}$ → es el suceso (1, 1).

c) Es el suceso contrario de "dos números iguales" = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}.
P(dos números distintos) = 1 – P(dos números iguales) = $1-\frac{6}{36}=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$.

5. Se lanzan dos dados con las caras numeradas del 1 al 6. Halla la probabilidad de que:
a) Su suma sea 4 o 5.
b) Uno a de los resultados sea par y el otro impar.
c) Uno de los resultados sea par sabiendo que la suma de los dos es 7.
d) Uno de los resultados sea 4 sabiendo que la suma de los dos es mayor que 7.
Solución:
El espacio muestral es el indicado en el problema 3: hay 36 resultados posibles; su suma varía desde 2 a 12.
También puede verse la tabla adjunta, en la que se da la suma de los resultados.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

a) Hay 3 resultados en los que las suma es 4: ((1, 3), (2, 2), (3, 1).
Hay 4 resultados con suma 5: (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1).
Por tanto, $P\left(\text{suma 4 o 5}\right)=\frac{3}{36}+\frac{4}{36}=\frac{7}{36}$.

b) Si uno de los resultados es par y el otro impar, su suma siempre será un número impar. hay 18 resultados con suma impar; por tanto, $P\left(\text{par e impar}\right)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$.
De otra manera:
P(par e impar) = P(1º dado par y 2º impar) + P(1º impar y 2º par) = = $\frac{9}{36}+\frac{9}{36}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$.

c) P(par/suma 7) = 1, ya que para sumar 7 un dado debe ser de puntuación par.
Los sucesos de suma 7 son: (1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1). En todos hay un resultado par.

d) Hay 15 sucesos en los que la suma es mayor que 7: (2, 6); (3, 5) y (3, 6); (**4**, **4**), (**4**, 5) y (**4**, 6); (5, 3), (5, **4**), (5, 5) y (5, 6); (6, 2), (6, 3), (6, **4**), (6, 5) y (6, 6). En 5 de esos casos ha salido un 4.
Por tanto:
P(de 4 si la suma es mayor que 7) = $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

6. Pedro y Pablo idean el siguiente juego: cada uno lanza un dado, si la suma de los dados es mayor que 7, gana Pedro; si la diferencia de ambos es menor que 2, gana Pablo; y en cualquier otro caso hay empate. ¿Es un juego equitativo?
Solución:
En las tablas siguientes se indican los casos de sumas y de diferencias.

Sumas						
+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Diferencias						
–	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

La suma es mayor que 7 en 15 de los 36 casos posibles → Gana Pedro.
La diferencia es menor que 2 en 16 de los 36 casos → Gana Pablo.
Por tanto, no es un juego equitativo. Pablo tiene mayor probabilidad de ganar que Pedro.

7. De una urna que contiene 10 bolas blancas y 8 negras, todas de igual peso y tamaño, se hacen dos extracciones al azar y sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de sacar:
a) Dos bolas blancas. b) Dos negras. c) Una de cada color.
Halla las mismas probabilidades si las extracciones se hicieran con reemplazamiento.
Solución:
Sin reemplazamiento: (Se extrae una bola y sin devolverla a la urna se extrae la segunda; o bien, las dos bolas se extraen a la vez).
Sean B y N los sucesos bola blanca y negra, respectivamente.
Si se extraen 2 bolas de la urna, la primera puede ser cualquiera de las 18 existentes; la segunda, cualquiera de las 17 restantes. En total pueden darse 18 · 17 = 306 extracciones posibles.

a) Los sucesos favorables a las 2 blancas son 10 · 9 = 90: 1ª blanca y 2ª blanca.
Por tanto, $P(BB)=\frac{10\cdot 9}{18\cdot 17}=\frac{90}{306}\approx 0,2941$.

b) Los sucesos favorables a las 2 negras son 8 · 7 = 56: 1ª negra y 2ª negra.
Por tanto, $P(NN)=\frac{8\cdot 7}{18\cdot 17}=\frac{56}{306}\approx 0,1830$.

c) Al extraer 2 dos bolas de la urna pueden darse los sucesos: 2 blancas, BB; 2 negras, NN; una blanca y otra negra: BN o NB.
Del total de 306 extracciones posibles, en 90 de ellas se obtienen 2 blancas; en 56, 2 negras; en el resto, que son 306 – 90 – 56 = 160, cada bola será de un color.
Por tanto, $P(NB,BN)=\frac{160}{306}\approx 0,5229$.

Nota: Este problema se puede hacer con mayor agilidad utilizando un diagrama de árbol. Así se hará el curso próximo.

Con reemplazamiento: (Se extrae una bola, se mira su color y se devuelve a la urna; a continuación, se extrae la segunda bola).
En este experimento:

Casos totales = 18 · 18 = 324; las dos blancas = 10 · 10 = 10; las dos negras = 8 · 8 = 64; una de cada color = 324 – 100 – 64 = 160.
Luego:
a) $P(BB) = \dfrac{100}{324}$; b) $P(NN) = \dfrac{64}{324}$; c) $P(NB, BN) = \dfrac{160}{324}$.

8. En una bolsa hay diez bolas iguales numeradas del 0 al 9 cada una. Si se extraen dos bolas de forma consecutiva y se anotan sus números:
a) Escribe todos los sucesos elementales que forman el suceso "la primera bola extraída es un 5".
b) ¿Cuántos números de dos cifras pueden formarse colocando las bolas por orden de extracción?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el número formado sea mayor que 59?
d) ¿Y la probabilidad de que termine en 3?
Solución:
a) Los sucesos elementales son:
50, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59 → En total hay 9 sucesos elementales; el suceso 55 no puede darse.

b) El primer número (cifra de las decenas) puede ser cualquiera de los 10 de partida (bolas del 0 al 9); el segundo número (cifra de las unidades) será cualquiera de los nueve restantes.
En total, 10 × 9 = 90. (Hay 9 números en cada una de las 10 decenas).
Este número se corresponde con las variaciones de 10 elementos tomados 2 a 2:
$V_{10,2} = 10 \cdot 9 = 90$.

c) Hay 36 números mayores que 59: los correspondientes a las "decenas" 6*n*, 7*n*, 8*n* y 9*n*.
Por tanto: $P(nm > 59) = \dfrac{36}{90} = \dfrac{2}{5}$.

d) Uno de cada diez números termina en 3, pues hay 10 terminaciones posibles:
$P(n3) = \dfrac{9}{90} = \dfrac{1}{10}$.

9. En un juego se sortea cada día un premio utilizando papeletas con tres cifras, numeradas del 000 al 999.
a) Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 5.
b) Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 55.
c) Sabiendo que ayer salió premiado un número terminado en 5, calcula la probabilidad de que el número premiado hoy termine también en 5.
Solución:
a) Uno de cada 10 números termina en 5. Por tanto, *P*(termine en 5) = $\dfrac{1}{10}$.

b) Uno de cada 100 números termina en 55. Por tanto, *P*(termine en 55) = $\dfrac{1}{100}$.

c) Cada día el experimento es independiente, pues la probabilidad de una terminación no se ve condicionada por las terminaciones de otros días. En consecuencia,
P(termine hoy en 5/ayer terminó en 5) = $\dfrac{1}{10}$.

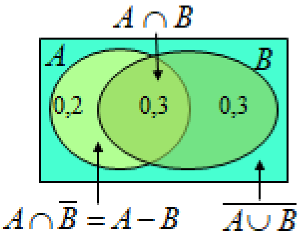
10. Se tienen dos sucesos aleatorios *A* y *B* y se conocen las probabilidades: $P(A)=0,5$; $P(B)=0,6$ y $P(A\cup B)=0,8$. Halla la probabilidad de que:

a) Se cumplan los dos sucesos a la vez: $P(A\cap B)$.

b) Solo se cumpla *A*: $P\left(A-B\right)$. c) No se cumpla *B*: $P\left(\overline{B}\right)$.

d) No se cumpla ninguno de los dos: $P\left(\overline{A\cup B}\right)$.

Solución:



a) Como

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\ \Rightarrow$$
$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B).$$

En este caso: $P(A\cap B)=0,5+0,6-0,8=0,3$.

b) $P\left(A-B\right)=P(A)-P\left(A\cap B\right)$ = 0,5 – 0,3 = 0,2.

c) $P\left(\overline{B}\right)=1-P(B)$ = 1 –0,6 = 0,4.

d) $P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P\left(A\cup B\right)$ = 1 – 0,8 = 0,2.

11. Sean *A* y *B* dos sucesos tales que $P\left(A\cup B\right)=0,9$, $P\left(A\cap B\right)=0,2$ y $P\left(\overline{A}\right)=0,4$, donde $\overline{A}$ es el suceso contrario de *A*. Calcula las siguientes probabilidades:

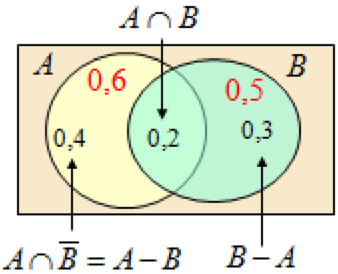
a) $P\left(B\right)$; b) $P\left(A\cap\overline{B}\right)$; c) $P\left(\overline{A\cap B}\right)$; d) $P\left(\overline{A\cup B}\right)$.

Solución:

Si $P\left(\overline{A}\right)=0,4\ \Rightarrow\ P\left(A\right)=0,6$.

a) Aplicando la fórmula de la probabilidad de la unión de sucesos:

$$P\left(A\cup B\right)=P(A)+P(B)-P\left(A\cap B\right)\Rightarrow\ 0,9=0,6+P(B)-0,2\ \Rightarrow\ P\left(B\right)=0,5.$$



b) $P\left(A\cap\overline{B}\right)=P\left(A\right)-P\left(A\cap B\right)$ = 0,6 – 0,2 = 0,4.

c) $P\left(\overline{A\cap B}\right)=1-P\left(A\cap B\right)$ = 1 – 0,2 = 0,8.

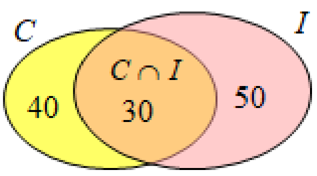
d) $P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P\left(A\cup B\right)$ = 1 – 0,9 = 0,1.

12. A un congreso asisten 120 personas, de las que 70 hablan castellano, otro conjunto inglés y 30 ambos idiomas. Si se escogen 2 personas al azar, ¿qué probabilidad hay de que se entiendan sin traductor?

Solución:

De las 120 personas, el suceso *C*, hablar castellano, está formado por 70 ellas; como 30 hablan ambos idiomas, suceso $C\cap I$, habrá 40 que solo hablen castellano. Por lo tanto, las 80 personas restantes (120 – 40 = 80) hablarán inglés. Y solo hablarán inglés, 80 – 30 = 50.

En el diagrama adjunto se indica la situación.



Dos de esas 120 personas pueden elegirse de 120 · 119 maneras distintas. (Podrían considerarse combinaciones de 120 tomadas 2 a 2, pero es más eficaz distinguir el orden y considerar variaciones, siempre que se haga lo mismo con los casos favorables).

Dos personas se entienden sin traductor en las siguientes circunstancias:
→ cada una de las 40 que hablan solo castellano con las otras 69 que hablan castellano: hay 40 · 69 casos favorables;
→ cada una de las 50 que hablan solo inglés con las otras 79 que hablan inglés: hay 50 · 79 casos favorables;
→ cada una de las 30 que hablan ambos idiomas con las otras 119 restantes: hay 30 · 119 casos favorables.
El total de casos favorables a entenderse es:
40 · 69 + 50 · 79 + 30 · 119 = 10280.
Luego, la probabilidad de que dos personas se entiendan será:

$$P(2 \text{ se entienden}) = \frac{10280}{120 \cdot 119} = \frac{257}{357}.$$

De otra manera, usando el complementario:
→ Dos personas no se entienden sin traductor si la primera es de las 40 que habla solo castellano y la segunda es de las 50 que solo habla inglés: hay 40 · 50 casos favorables; o bien, la primera solo habla inglés y la segunda solo castellano: hay 50 · 40 casos favorables.

$$P(2 \text{ no se entienden}) = \frac{40 \cdot 50}{120 \cdot 119} + \frac{50 \cdot 40}{120 \cdot 119} = \frac{100}{357}.$$

Luego, la probabilidad de que dos personas se entiendan será:

$$P(2 \text{ se entienden}) = 1 - P(2 \text{ no se entienden}) = 1 - \frac{100}{357} = \frac{257}{357}.$$

13. Se tienen dos sucesos aleatorios A y B y se conocen las probabilidades $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}6$ y $P(A \cup B) = 0{,}85$. Calcula:

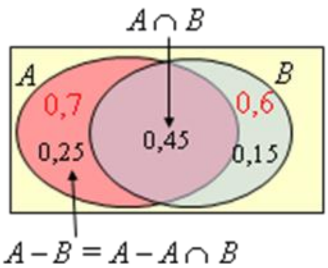
a) $P(A \cap B)$ b) $P\left((A \cap B)^C\right)$

c) La probabilidad de que se cumpla solo uno de los dos sucesos.

Solución:

a) Se sabe que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0,7 + 0,6 - 0,85 = 0,45.$$



b) El suceso $(A \cap B)^C$ es el contrario de $A \cap B \Rightarrow$

$$P\left((A \cap B)^C\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55.$$

a) Que se cumpla solo uno de los dos sucesos significa que se cumple A y no B o que se cumple B, pero no A. Esto es, cualquiera de los dos, pero no los dos a la vez.
Su valor es:

$$P\left((A-B) \cup (B-A)\right) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0{,}85 - 0{,}45 = 0{,}40.$$

En el diagrama adjunto se puede visualizar todo el problema.

14. Un examen de respuesta múltiple consta de 100 preguntas, cada una con 4 opciones, una de ellas correcta y erróneas las otras tres. Cada respuesta acertada suma un punto, la respuesta en blanco suma 0; pero las respuestas erróneas restan.

a) ¿Cuánto debe restarse por cada uno de los fallos para que el examen sea equitativo?
b) ¿Qué calificación obtendrá un alumno que acierta 67 peguntas, falla 21 y deja 12 en blanco?
Solución:
a) La respuesta puede enfocare como sigue:
Si cada pregunta tiene 4 opciones, de las que solo una es verdadera, si se responde al azar, la probabilidad de acertar será $\frac{1}{4}$; y la de fallar, $\frac{3}{4}$.
Por tanto, si una persona responde al azar, cabe esperar que de las 100 preguntas del examen: acertará 25; y fallará, 75.
Su puntuación, que debe ser 0, es el resultado de la suma de $25\cdot 1-75\cdot x$, siendo x lo que hay restar por cada fallo.
Luego:

$$25\cdot 1-75\cdot x=0\Rightarrow x=\frac{1}{3}.$$

Por cada fallo hay que restar 1/3.

Nota: Este problema es un ejemplo de los llamados "juegos de suma 0", en los que todos los jugadores tienen la misma posibilidad de ganar y de perder. Nadie juega con ventaja.
En estos juegos la esperanza matemática vale 0.

b) Si un alumno acierta 67 peguntas, falla 21 y deja 12 en blanco, su calificación será de :

$$67\cdot 1-21\cdot\frac{1}{3}+12\cdot 0=67-7=60 \text{ puntos.}$$

15. a) En un grupo de 20 personas, ¿de cuántas maneras puede seleccionarse a 3 de ellas?
b) ¿De cuántas maneras distintas pueden seleccionarse 6 preguntas de examen entre 10 propuestas?
c) ¿De cuántas maneras distintas pueden repartirse las 40 cartas de una baraja entre 4 jugadores?
Solución:
a) Si las personas son {A, B, C, D, …, M, N, …}, algunas de ternas son ABC, ABD, AMN, …; la terna ABC es la misma que BAC: no cambia si se colocan en distinto orden, pues son las mismas tres personas. Por tanto, se trata de un problema de combinaciones.
En total, el número de ternas es $C_{20,3}$:

$$C_{20,3}=\frac{V_{20,3}}{P_3}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{3\cdot 2\cdot 1}=1140 \to \text{calculadora } \boxed{40C10}\ \boxed{=}.$$

b) Si en un examen hay que contestar 6 preguntas entre 10 propuestas, las respuestas pueden darse de combinaciones de 10 preguntas tomadas 6 a 6 maneras distintas, pues el orden de contestación de las preguntas no cambia el modelo de examen. Dos exámenes son diferentes solo cuando contienen alguna pregunta diferente.
Por tanto, el total de posibles respuestas será,

$$C_{10,6}=\binom{10}{6}=\frac{10!}{6!(10-6)!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=10\cdot 3\cdot 7=210.$$

c) Cada uno de los cuatro jugadores recibirá 10 cartas; como el orden en recibir las cartas no altera la jugada, el reparto se puede hacer de combinaciones de 40 elementos tomados 10 a 10 maneras diferentes. Su número es

$$C_{40,10}=\binom{40}{10}=\frac{40!}{10!\cdot 30!}=847660528. \quad \to \text{Con la calculadora } \boxed{40C10}\ \boxed{=}.$$

16. De una baraja española de 40 cartas se eligen al azar, simultáneamente, cuatro cartas. Halla la probabilidad:
a) De que al menos 3 de ellas sean reyes.
b) De que tres de las cuatro cartas sean del mismo palo.
<u>Solución</u>:
Los casos posibles de seleccionar 4 cartas de 40 son: $C_{40,4}=\binom{40}{4}=\frac{40!}{4!\cdot 36!}=\frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=91390$.

a) El suceso “al menos 3 reyes” es {*RRRX*, *RRRR*}; *R* designa cualquier rey; *X*, cualquier otra carta que no sea rey.
Tres reyes pueden obtenerse de 4 · 36 = 144 maneras distintas.
→ Los 3 reyes pueden obtenerse de 4 maneras distintas: *RRRX*; *RRXR*; *RXRR*; *XRRR*. La cuarta carta puede ser cualquiera de las 36 restantes.
Cuatro reyes solo pueden obtenerse de una sola manera.
En total, el número de casos favorables a “al menos 3 reyes” es 144 + 1 = 145.
Por tanto, $P(\text{al menos 3 reyes})=\frac{145}{91390}=\frac{29}{18278}$.

b) El suceso “3 de las cuatro cartas son del mismo palo” es: {*OOOX*, *CCCX*, *EEEX*, *BBBX*}, donde *O*, *C*, *E* y *B* designan oros, copas, espadas y bastos, respectivamente; *X* es cualquier carta de otro palo: no *O*, *C*, *E* y *B*, respectivamente.

Caso *OOOX*:
Tres cartas de oros pueden obtenerse de $C_{10,3}=\binom{10}{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120$ maneras distintas.
La carta *X* puede ser cualquiera de las 30 que no son de oros.
En total: 120 · 30 = 3600 casos favorables.

Los mismos casos favorables habrá para cada uno de los sucesos *CCCX*, *EEEX*, *BBBX*.
Luego, el total de casos favorables a “3 de las cuatro cartas son del mismo palo” será 3600 · 4 = 14400.
Por tanto, $P(\text{3 cartas del mismo palo})=\frac{14400}{91390}=\frac{2880}{18278}$.

17. En una carrera participan 20 atletas:
a) ¿De cuántas maneras se pueden otorgar las medallas de oro, plata y bronce?
b) Si entre los 20 participantes hay 5 de categoría senior, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de los atletas senior obtenga medalla?
<u>Solución</u>:
a) Las medallas las reciben 3 de los 20 participantes; el orden de asignación de cada premio es importante: no da lo mismo ganar oro que bronce. Por tanto, el número total de ternas premiadas será variaciones de 20 elementos tomados 3 a 3: $V_{20,3}=20\cdot 19\cdot 18=6840$.

b) El suceso “al menos uno de los 5 senior obtenga medalla” es el suceso contrario de “ninguno de los 5 senior obtiene medalla” = “las 3 medallas se las reparten entre los 15 atletas no senior”. Este último suceso puede darse de $V_{15,3}=15\cdot 14\cdot 13=2730$ maneras distintas.
Por tanto,

$$P(\text{al menos un senior con premio})=1-P(\text{ningún senior con premio})=$$
$$=1-\frac{2730}{6840}=\frac{4110}{6840}\approx 0,6009.$$

18. En una mesa circular con 6 sillas se sientan a comer los padres y 4 hijos, si se sientan al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los padres estén uno frente a otro?
Solución:
El número total de posibilidades que tienen 6 personas de sentarse en 6 sillas es

$$P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Si se supone que la primera en sentarse es la madre, ella puede elegir hacerlo en cualquiera de las 6 sillas disponibles; pero, en cada caso, el padre solo puede elegir la silla que está en frente. A continuación, los hijos pueden sentarse de permutaciones de 4 maneras distintas.
Por tanto, el número de casos favorables a "los padres están sentados uno frente al otro" son:

(6 para la madre) · (1 para el padre) · (P_4 para los hijos) = 6 · 1 · 24 = 144.

Por tanto,

$$P(\text{padre enfrente madre}) = \frac{144}{720} = \frac{1}{5}.$$

Nota: La respuesta puede ser más inmediata si se observa que: si la madre se sienta en cualquier silla, al padre le quedan 5 asientos disponibles, de los que solo uno está enfrente del de la madre.

19. En una clase infantil hay 6 niñas y 10 niños. Si se escoge a 2 escolares al azar, halla la probabilidad de que:
a) Sean 2 niños $\to$ suceso *A*. b) Sean 2 niñas $\to$ suceso *B*.
c) Sean una niña y un niño $\to$ suceso *C*.
Solución:
El número de parejas posibles son las combinaciones de 16 elementos (6 + 10) tomados 2 a 2.

$$C_{16,2} = \binom{16}{2} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120.$$

a) Los casos favorables a que los elegidos sean 2 niños son las combinaciones de 10 elementos tomados 2 a 2.

$$C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$$

Por tanto, $P(A) = \dfrac{45}{120} = 0,375$.

b) Los casos favorables a que las elegidas sean 2 niñas (entre las 6 que hay) son las combinaciones de 6 elementos tomados 2 a 2.

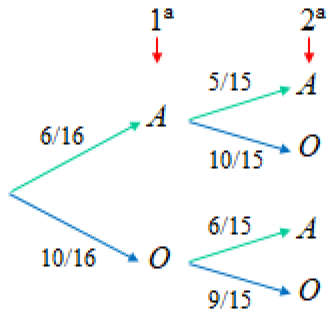
$$C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

Por tanto, $P(B) = \dfrac{15}{120} = 0,125$.

c) La elección de una niña y un niño puede hacerse de 60 maneras distintas: con cada una de las 6 niñas emparejarse cada uno de los 10 niños.

Por tanto, $P(C) = \dfrac{60}{120} = 0,5$.

20. Resuelve el problema anterior con la ayuda de un diagrama de árbol.
Solución:
Si se designa por *A* el suceso elegir una niña y por *O* el suceso niño, se puede confeccionar el diagrama de árbol adjunto. (En cada rama se indica la probabilidad de cada posible suceso).



En la primera elección (1ª) hay 16 alumnos de los que 6 son chicas y 10 son chicos. Luego: $P(A)=\dfrac{6}{16}$ y $P(O)=\dfrac{10}{16}$.
La segunda elección (2ª) se hace entre 15 alumnos: 5 niñas y 10 niños, o 6 niñas y 9 niños, dependiendo de la primera elección.

a) Dos niños es el suceso *OO*. Su probabilidad es $P(OO)=P(1^o O)\cdot P(2^o O)=\dfrac{10}{16}\cdot\dfrac{9}{15}=\dfrac{45}{120}=\dfrac{3}{8}$.

b) Dos niñas es el suceso *AA*. Su probabilidad es $P(AA)=P(1^o A)\cdot P(2^o A)=\dfrac{8}{16}\cdot\dfrac{7}{15}=\dfrac{15}{120}=\dfrac{1}{8}$.

c) Una niña y un niño es el suceso {*AO, OA*}. Su probabilidad es:
$$P(AO)=P(1^o A)\cdot P(2^o O)+P(1^o O)\cdot P(2^o A)=\frac{8}{16}\cdot\frac{10}{15}+\frac{10}{16}\cdot\frac{8}{15}=\frac{60}{120}=\frac{4}{8}=0,5\,.$$

Nota: Este problema se repetirá en Matemáticas II recurriendo a la probabilidad condicionada.

21. Al hacer tres lanzamientos de un dado, con las caras numeradas del 1 al 6, y sumar sus resultados se alcanzó una puntuación total de 12.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer lanzamiento se obtuviera un 6?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que en alguno de los lanzamientos se obtuviera un 6?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que en ninguno de los lanzamientos se obtuviera un 6?
Solución:
Se indica mediante ternas el resultado de cada tres lanzamientos del dado. Así, por ejemplo, la terna (5, 4, 3) significa que en el primer lanzamiento se obtuvo un 5; en el segundo, un 4; y en el tercero, un 3.
Los resultados con suma 12 son los siguientes:

(**6**, 5, 1), (**6**, 1, 5), (5, 6, 1), (5, 1, 6), (1, 6, 5), (1, 5, 6);
(**6**, 4, 2), (**6**, 2, 4), (4, 6, 2), (4, 2, 6), (2, 6, 4), (2, 4, 6);
(**6**, 3, 3), (3, 6, 3), (3, 3, 6);
(5, 5, 2), (5, 2, 5), (2, 5, 5);
(5, 4, 3), (5, 3, 4), (4, 5, 3), (4, 3, 5), (3, 5, 4), (3, 4, 5);
(4, 4, 4).

En total, 25 resultados. De ellos: 5 casos empiezan por 6; y en 15 de ellos hay un 6.
Por tanto:

a) *P*(primer lanzamiento sea 6 si la suma es 12) = $\dfrac{5}{25}=\dfrac{1}{5}$.

b) *P*(un lanzamiento sea 6 si la suma es 12) = $\dfrac{15}{25}=\dfrac{3}{5}$.

c) *P*(ningún lanzamiento sea 6 si la suma es 12) = $\dfrac{10}{25}=\dfrac{2}{5}$.

22. Se hacen tres lanzamientos de un dado con las caras numeradas del 1 al 6. Si en el primer lanzamiento sale un 3, ¿qué es más probable, que la suma de las puntuaciones sea un número par o que tal suma sea impar?
Solución:
Si en el primer lanzamiento sale un 3:
→ La suma total será par cuando la suma de las puntuaciones de los otros dos lanzamientos sea impar. Esto sucede con los siguientes resultados, indicados por orden de aparición en el segundo y tercer dado:
(1, 2), (1, 4), (1, 6); (2, 1), (2, 3), (2, 5); (3, 2), (3, 4), (3, 6);
(4, 1), (4, 3), (4, 5); (5, 2), (5, 4), (5, 6); (6, 1), (6, 3), (6, 5).
→ La suma total será impar cuando la suma de las puntuaciones de los otros dos lanzamientos sea par. Sus resultados son:
(1, 1), (1, 3), (1, 5); (2, 2), (2, 4), (2, 6); (3, 1), (3, 3), (3, 5);
(4, 2), (4, 4), (4, 6); (5, 1), (5, 3), (5, 5); (6, 2), (6, 4), (6, 6).

Como hay el mismo número de casos favorables para cada suceso, su probabilidad será la misma.

23. En una empresa trabajan 7 mujeres y 12 hombres. Si se seleccionan 3 personas al azar, halla la probabilidad de que se seleccionen 2 mujeres y un hombre.
Solución:
Las 2 mujeres se pueden seleccionar de $C_{7,2}$ maneras distintas; el hombre puede ser cualquiera de los 12 que hay.
El número de grupos favorables a 2 mujeres y un hombre es: $\binom{7}{2}\cdot 12 = \frac{7\cdot 6}{2}\cdot 12 = 252$
El número total de grupos de 3 personas seleccionadas entres 19 (7 mujeres + 12 hombres) es
$C_{19,3} = \binom{19}{3} = \frac{19\cdot 18\cdot 17}{3\cdot 2\cdot 1} = 969$.
Por tanto:

$$P(2 \text{ mujeres y } 1 \text{ hombre}) = \frac{252}{969} \approx 0,26 .$$

24. En una bolsa hay 7 bolas blancas y 9 negras. Si se extraen a la vez 3 bolas al azar, calcula la probabilidad de que:
a) Las 3 bolas sean negras.
b) Una sea negra y las otras 2 blancas.
c) Dos sean negras y 1 blanca.
d) Al menos 1 sea blanca.
Solución:
Es independiente que las bolas se extraigan a la vez o una detrás de otra. Lo significativo es que no hay reposición.
Puede resolverse mediante recursos de combinatoria.
El total de opciones de extraer 3 bolas de una bolsa en la que hay 16 bolas (7 blancas y 9 negras) es $C_{16,3} = \frac{16\cdot 15\cdot 14}{3\cdot 2\cdot 1} = 560$.
a) Las 3 bolas serán negras cuando sean de las 9 que hay.
El número de opciones es $C_{9,3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84$.
Por tanto:

$$P(3N) = \frac{84}{560} = 0,15 .$$

b) La bola negra puede ser cualquiera de las 9 que hay. Las 2 blancas pueden elegirse de $C_{7,2}$ maneras posibles. En número de casos favorables es: $9 \cdot C_{7,2} = 9 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 189$.

Por tanto:

$$P(1N, 2B) = \frac{189}{560} = 0,3375.$$

c) La bola blanca puede ser cualquiera de las 7 que hay. Las 2 negras pueden elegirse de $C_{9,2}$ maneras posibles. En número de casos favorables es: $7 \cdot C_{9,2} = 7 \cdot \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 252$.

Por tanto:

$$P(2N, 1B) = \frac{252}{560} = 0,45.$$

d) Al menos 1 sea blanca es el suceso contrario de "las 3 son negras". Luego,
$P(\text{al menos } 1B) = 1 - P(3N) = 1 - 0,15 = 0,85$.

25. Un opositor se sabe la mitad de los temas de que consta una oposición. La prueba consiste en responder a 2 temas elegidos al azar de entre los 48 que contiene el temario. Calcula la probabilidad que tiene de aprobar si para ello debe contestar bien a los 2 temas.

Solución:

Dos temas entre los 48 que hay pueden elegirse de "combinaciones de 48 elegidos 2 a 2" maneras distintas. (Observa que el orden en que salgan los dos temas no cambia la prueba; lo que sí cambia la prueba es que alguno de los temas sea distinto: el examen es el mismo si, por ejemplo, los temas 1 y 6 salen en ese orden o al revés, primero sale el tema 6 y después el tema 1; el examen es distinto si en lugar del tema 6 sale el 17, por ejemplo).

Como sabe 24 de los temas, aprobará la oposición si los 2 temas elegidos están entre esos 24. Hay "combinaciones de 24 elegidos 2 a 2" maneras distintas.
Por tanto, la probabilidad de que ese opositor apruebe será:

$$P(\text{Aprobar}) = \frac{C_{24,2}}{C_{48,2}} = \frac{\binom{24}{2}}{\binom{48}{2}} = \frac{\frac{24 \cdot 23}{2}}{\frac{48 \cdot 47}{2}} = \frac{23}{94} \approx 0,2447.$$

26. Un opositor se sabe la mitad de los temas de que consta una oposición. La prueba consiste en responder a 3 temas, elegidos al azar, de entre los 48 que contiene el temario. Calcula la probabilidad que tiene de aprobar si para ello debe contestar bien, al menos, a los 2 temas.

Solución:

Tres temas entre los 48 que hay pueden elegirse de "combinaciones de 48 elegidos 3 a 3" maneras distintas: $C_{48,3} = \binom{48}{3} = \frac{48 \cdot 47 \cdot 46}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 17296$. (Con la calculadora $\boxed{48C3}$ $\boxed{=}$ 17296).
serva que el orden en que salgan los dos temas no cambia la prueba; lo que sí cambia la prueba es que alguno de los temas se distinto: el examen es el mismo si, por ejemplo, los temas 1 y 6 salen en ese orden o al revés, primero sale el tema 6 y después el tema 1; e examen es distinto si en lugar del tema 6 sale el 17, por ejemplo).

Como sabe 24 de los temas, aprobará la oposición si entre los 3 temas hay, al menos, 2 que se sabe:

→ Se sabe los 3: $C_{24,3} = \binom{24}{3} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2024$. (Con la calculadora $\boxed{24C3}$ $\boxed{=}$ 2024).

→ Se sabe solo 2: 2 temas de los 24 que se sabe; otro de los 24 que no se sabe:

$$C_{24,2} \cdot C_{24,1} = \binom{24}{2} \cdot \binom{24}{1} = \frac{24 \cdot 23}{2} \cdot 24 = 6624.$$

Por tanto, tiene 2024 + 6624 elecciones favorables; luego, la probabilidad de que ese opositor apruebe será:

$$P(\text{Aprobar}) = \frac{2024 + 6624}{17296} = \frac{8648}{17296} = 0,5.$$

27. Un examen de oposición consiste en desarrollar por escrito un tema de un total de 50. El tribunal elige al azar 2 temas y cada candidato debe contestar correctamente uno de los dos.
a) Halla la probabilidad de que un candidato apruebe la oposición si se sabe solo 35 temas.
b) Si los opositores tienen que contestar correctamente a los dos temas elegidos, ¿cuál será la probabilidad de aprobar que tiene otro candidato que se sabe 40 de los 50 temas?
Solución:
a) Hay $C_{50,2}$ maneras distintas de elegir 2 temas entre 50.

El candidato suspende cuando los 2 temas elegidos están entre los 15 que no se sabe. Esto puede suceder de $C_{15,2}$ maneras distintas.

Por tanto, la probabilidad de suspender será: $P(S) = \frac{C_{15,2}}{C_{50,2}} = \frac{\frac{15 \cdot 14}{2}}{\frac{50 \cdot 49}{2}} = \frac{210}{2450} = 0,0857$.

Luego, la probabilidad de tiene de aprobar es: $P(A) = 1 - P(S) = 1 - 0,0857 = 0,9143$.

b) El candidato aprobará cuando los 2 temas elegidos estén entre los 40 que se sabe. Esto sucede de $C_{40,2}$ maneras distintas.

Por tanto, la probabilidad de aprobar será: $P(A) = \frac{C_{40,2}}{C_{50,2}} = \frac{\frac{40 \cdot 39}{2}}{\frac{50 \cdot 49}{2}} = \frac{1560}{2450} = 0,6367$.

28. En un grupo de 12 cartas de la baraja española hay 5 oros, 4 espadas y 3 copas. Si se barajan las 12 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que las tres de copas queden juntas?
Solución:
Sea C el suceso carta de copas; las nueve cartas restantes se numeran del 1 al 9.
Algunas posiciones favorables son:
→ Las tres copas en primer lugar y las otras nueve detrás:
CCC 123456789, que se puede presentar de $P_3 \cdot P_9$ maneras distintas (Conviene distinguir las copas)
→ La primera carta no es de copas, las tres copas y las ocho restantes detrás:
1 CCC 23456789, que se presenta también de $P_3 \cdot P_9$ maneras distintas
…
→ La última de estas disposiciones es:
123456789 CCC, que igualmente se presenta de $P_3 \cdot P_9$ maneras distintas

En total hay:

$P_3 \cdot P_9 \cdot 10$ maneras favorables de que las tres copas queden juntas.

Los casos posibles ordenar las 12 cartas son P_{12}.
Luego,

$$P(\text{tres copas juntas}) = \frac{P_3 \cdot P_9 \cdot 10}{P_{12}} = \frac{3 \cdot 2}{12 \cdot 11} = \frac{1}{22}.$$

29. Cuatro personas suben a un autobús cuando sólo quedan cinco paradas más para el final de la línea. Suponiendo que todos tienen igual probabilidad de bajarse en cualquier parada, halla las probabilidades siguientes:
a) Que esas cuatro personas se bajen en la misma parada.
b) Que no baje ninguna de ellas en las primeras tres paradas.
c) Que en las primeras cuatro paradas baje una de esas personas en cada parada.
Solución:
Asignemos a las personas los nombres A, B, C y D. Cada uno de ellos puede bajarse en la parada 1, 2, 3, 4 o 5.
Indicaremos con la permutación 2335, por ejemplo, que A se baja en 2, B y C en 3 y D en 5. (Nadie se ha bajado en 1 o en 4).

Con esto, los casos posibles que tienen de bajarse son las variaciones con repetición de 5 elementos (paradas) tomados 4 a 4: $VR_{5,4} = 5^4$.

a) Las cuatro personas se bajan en la misma parada en los casos:
1111 2222 3333 4444 5555
en total 5 casos. (3333 significan que las cuatro personas se bajan en la parada 3).
Luego, $P(\text{se bajen en la misma parada}) = \frac{5}{5^4} = \frac{1}{125}$.

b) Las cuatro personas se tendrían que bajar en las paradas 4 o 5. Por ejemplo, algunas de las posibilidades son: 4444 4445 5555
En total, los casos favorables serían variaciones con repetición de 2 elementos (las paradas 4, y 5) tomados 4 a 4: $VR_{2,4} = 2^4$.

Luego, $P(\text{no baje nadie en las tres primeras paradas}) = \frac{2^4}{5^4} = \frac{16}{625}$.

c) Algunas de esas posibilidades son: 1234 1432 2341
En total hay permutaciones de 4 posibilidades: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
Luego, $P(\text{baje una persona en las cinco primeras paradas}) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5^4} = \frac{24}{625}$.

30. Si se lanzan al azar 6 monedas equilibradas, calcula la probabilidad de obtener:
a) Al menos una cara. b) Dos caras y cuatro cruces. c) Tres caras y tres cruces.
Solución:
Lanzar 6 monedas a la vez es el experimento equivalente a lanzar 6 veces consecutivas la misma moneda. Como cada moneda presentas 2 resultados (*C* y *X*), el total de casos posibles será $VR_{2,6} = 2^6 = 64$.

a) "Al menos una cara" es el suceso contrario de "ninguna cara" = "las 6 son cruces". Este suceso solo puede darse de una forma: *XXXXXX*.

Por tanto, $P(\text{al menos 1 cara}) = 1 - P(\text{6 cruces}) = 1 - \dfrac{1}{64} = \dfrac{63}{64}$.

b) Los casos favorables a 2 caras y 4 cruces (*CCXXXX*, *CXCXXX*, …) son las permutaciones con repetición de 6 elementos, en los que el elemento *C* se repite 2 veces y el elemento *X* se repite 4 veces. Su número es $P_6^{2,4} = \dfrac{P_6}{P_2 \cdot P_4} = \dfrac{6!}{2! \cdot 4!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 5 = 15$.

Por tanto, $P(2C,\ 4X) = \dfrac{15}{64}$.

c) Los casos favorables a 3 caras y 3 cruces (*CCCXXX*, *CCXCXX*, …) son las permutaciones con repetición de 6 elementos, en los que cada elemento (*C* y *X*) se repite 3 veces. Su número es

$P_6^{3,3} = \dfrac{P_6}{P_3 \cdot P_3} = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 = 20$.

Por tanto, $P(3C,\ 3X) = \dfrac{20}{64}$.

Nota: Este problema se repetirá en Matemáticas II recurriendo a la distribución binomial.