TEMA 19. PROBABILDAD

1. CUESTIONES BÁSICAS: ESPACIO MUESTRAL, SUCESOS…

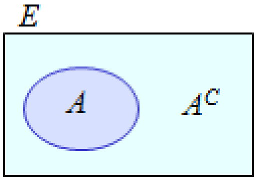
Experimentos aleatorios
Un experimento se llama aleatorio cuando no se puede predecir su resultado; además, si se repitiese el mismo experimento en condiciones análogas, los resultados pueden diferir.
(Los experimentos en los que puede predecirse el resultado se llaman deterministas).
Los experimentos aleatorios pueden ser simples o compuestos. (En este curso se estudiarán fundamentalmente los experimentos simples).

Ejemplos:
a) Es aleatorio cualquier juego de azar: lanzar un dado con las caras numeradas y apuntar el número que se sale; extraer una carta de una baraja; jugar a la lotería …
Estos experimentos pueden considerarse simples.

b) Son experimentos compuestos: lanzar dos monedas a la vez y contar el número de caras que se obtienen; observar el color de dos bolas extraídas de una bolsa en la hay 5 bolas verdes y 3 rojas; extraer 3 cartas consecutivamente de una baraja y observar su número o el palo al que pertenecen…

Espacio muestral
Es el conjunto de sucesos elementales a que da lugar la realización de un experimento aleatorio; suele designarse por la letra *E*.

Un suceso es todo subconjunto de *E*. Si está determinado por un solo resultado se llama elemental; si está formado por varios se llama compuesto. Los sucesos suelen denotarse por letras mayúsculas.
Suceso seguro: es el que ocurre siempre**.** Suele denotarse por *E*, como el espacio muestral.
Suceso imposible, denotado por ∅: no ocurre nunca.
Suceso contrario de *A*, que se denota por A^C o $\bar{A}$, es el suceso que se verifica cuando no se cumple *A*. Está formado por los sucesos elementales que no son de *A*; es el subconjunto complementario de *A*, respecto a *E*. Por tanto, si ocurre A^C no ocurre *A*, y viceversa.



Los diagramas de Venn, como el de la derecha, permiten representar los distintos tipos de sucesos.

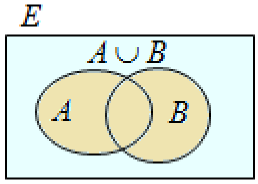
Ejemplos:
a) Los sucesos elementales asociados al lanzamiento de un dado corriente, con las caras numeradas, son {1}, {2}, {3}, {4}, {5} y {6}. Así pues, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Un suceso compuesto puede ser "obtener un número par": $P = \{2, 4, 6\}$. El suceso *P* se cumple cuando el resultado del lanzamiento del dado es 2, 4 o 6.
El suceso contario de "obtener un número par" es "obtener número impar".

b) El espacio muestral asociado al lanzamiento de dos monedas es $E = \{CC, CX, XC, XX\}$.
El suceso obtener una cara (*C*) y una cruz (*X*) es compuesto: $\{CX, XC\}$. Su contrario es obtener dos caras o dos cruces (obtener el mismo resultado), suceso $\{CC, XX\}$.

c) Al extraer una carta de una baraja española, el espacio muestral está formado por 40 sucesos, uno por cada una de las cartas de la baraja: 10 de cada *palo* (oros, copas, espadas y bastos).

Operaciones con sucesos

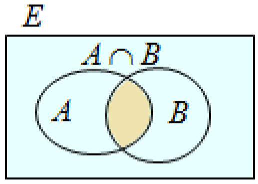
Los sucesos pueden operarse obteniéndose otros nuevos.



- Unión de A y B, $A \cup B$, es un suceso que se verifica cuando lo hace A o B, o ambos.

En notación conjuntista:

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$



- Intersección de A y B, $A \cap B$, es el suceso que se verifica cuando lo hacen A y B a la vez. Está formado por los elementos comunes a A y B.

En notación conjuntista:

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

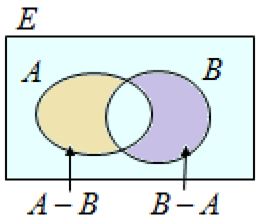
Cuando $A \cap B = \varnothing$, los sucesos A y B se dicen incompatibles.

→ Las operaciones unión e intersección son conmutativas: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

- Diferencia de A y B, $A - B$, es el suceso que se verifica cuando lo hace A pero no B. Está formado por los elementos de A que no son de B.

En notación conjuntista:

$$A - B = \{x \in E \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$



Análogamente, $B - A = \{x \in E \mid x \in B \text{ y } x \notin A\}$.

→ Observando las figuras se comprueba que:

$$A - B = A - (A \cap B) = \overline{B} \cap A \text{ y } B - A = B - (A \cap B) = \overline{A} \cap B.$$

Ejemplos:

En el experimento aleatorio consistente en extraer una carta de una baraja española se consideran los sucesos B = "obtener una carta de bastos" y F = "obtener una figura", se tiene:

→ suceso B: está formado por las 10 cartas de bastos,

$B = \{1_B, 2_B, 3_B, 4_B, 5_B, 6_B, 7_B, S_B, C_B, R_B\}$,

donde S_B, C_B y R_B denotan las figuras sota, caballo y rey de bastos, respectivamente; el subíndice B indica bastos.

→ suceso F: está formado por las 12 cartas que son figuras, 3 de cada uno de los *palos*,

$F = \{S_O, C_O, R_O, S_C, C_C, R_C, S_E, C_E, R_E, S_B, C_B, R_B\}$,

donde los subíndices O, C, E y B indican oros, copas, espadas y bastos, respectivamente.

Con esto, los sucesos unión, intersección, diferencia y complementarios de ellos son:

→ Unión:

$B \cup F = \{1_B, 2_B, 3_B, 4_B, 5_B, 6_B, 7_B, S_O, C_O, R_O, S_C, C_C, R_C, S_E, C_E, R_E, S_B, C_B, R_B\}$, 19 cartas.

→ Intersección:

$B \cap F = \{S_B, C_B, R_B\}$, 3 cartas.

→ Diferencia:

$B - F = \{1_B, 2_B, 3_B, 4_B, 5_B, 6_B, 7_B\}$, son las cartas de bastos que no son figuras;

$F - B = \{S_O, C_O, R_O, S_C, C_C, R_C, S_E, C_E, R_E\}$, son las figuras que no son de bastos.

→ Complementarios:

$B^C = \overline{B}$: son las 30 las cartas que no son de bastos.

$F^C = \overline{F}$: son las 28 las cartas que no son figuras.

2. PROBABILIDAD: DEFINICIONES Y PROPIEDADES

La probabilidad es una medida de la posibilidad de que se cumpla un suceso aleatorio determinado. La probabilidad de un suceso es un número, comprendido entre 0 y 1.

- Si un experimento aleatorio se repite un gran número de veces, la probabilidad de un determinado suceso se identifica con la frecuencia relativa de tal suceso. (Ver ley de los grandes números).

$\to$ La frecuencia relativa de un suceso es el cociente entre el número de veces que se ha cumplido el suceso y el número total de veces que se ha realizado el experimento.

Ejemplo:
a) Si se pregunta a 400 personas, elegidas al azar, sobre su interés por el fútbol y, de ellas, 125 afirman ser aficionadas, se admite que la probabilidad de que una persona de ese grupo sea aficionada al fútbol es de $\frac{125}{400} = 0,3121$.

b) Si una moneda se lanza 1500 veces y en 720 ocasiones ha salido cara, se admitirá que la probabilidad de obtener cara para esa moneda es $P(C) = \frac{720}{1500} = 0,48$ $\to$ (sospecharemos que esa moneda está trucada).

Regla de Laplace
Cuando los sucesos elementales del experimento aleatorio son equiprobables, la probabilidad del suceso *A* se calcula aplicando la regla de Laplace, que dice:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables a } A}{\text{Número total de casos posibles}}$$

Ejemplos:
a) Si en una bolsa hay 5 bolas de color verde (*V*) y 3 de color rojo (*R*), todas de igual peso y tamaño, la probabilidad de extraer al azar una bola verde o una bola roja es:

$$P(V) = \frac{5}{8};\ P(R) = \frac{3}{8}.$$

b) En el experimento de extraer una carta de una baraja española, se tienen las siguientes probabilidades:

$\to$ De obtener una carta de bastos: $P(B) = \frac{10}{40} = 0,25$.

$\to$ De obtener una figura: $P(F) = \frac{12}{40} = 0,3$.

$\to$ De obtener una carta que sea de bastos o figura: $P(B \cup F) = \frac{19}{40} = 0,475$.

$\to$ De obtener una figura de bastos: $P(B \cap F) = \frac{3}{40} = 0,075$.

$\to$ De obtener una carta de bastos que no sea figura: $P(B - F) = \frac{7}{40} = 0,175$.

$\to$ De obtener una figura que no sea de bastos: $P(F - B) = \frac{9}{40} = 0,225$.

$\to$ De NO obtener una carta de bastos: $P(\overline{B}) = \frac{30}{40} = 0,75$.

Definición axiomática de probabilidad
La probabilidad puede definirse afirmando que es una función *P* que asigna a cada suceso de un experimento aleatorio un número real, debiendo cumplir los siguientes axiomas:

1. Para cualquier suceso *A* se cumple que: $0 \le P(A) \le 1$.
2. La probabilidad del suceso seguro *E* es 1: $P(E) = 1$.
3. Si *A* y *B* son sucesos incompatibles, entonces: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

$\to$ De estos axiomas se extraen algunas consecuencias (propiedades) de interés:

- **Probabilidad del suceso contrario**

Conociendo la probabilidad de un suceso *A* puede hallarse la de su contrario A^C, pues, como

$A \cup A^C = E \Rightarrow P(A \cup A^C) = P(E) = 1 \Rightarrow$ (por ser incompatibles *A* y A^C)

$P(A) + P(A^C) = 1 \Rightarrow P(A^C) = 1 - P(A)$.

Por tanto, la probabilidad del suceso imposible es 0: $P(\varnothing) = 0$. (E y $\varnothing$ son contrarios).

Ejemplo:
Al extraer una carta de una baraja española, la probabilidad de los sucesos contrarios de *B* y *F* es:

$\to$ Contrario de obtener bastos (no obtener bastos): $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{10}{40} = \frac{30}{40} = 0,75$.

$\to$ Contrario de obtener figura: $P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 1 - \frac{12}{40} = \frac{28}{40} = 0,7$.

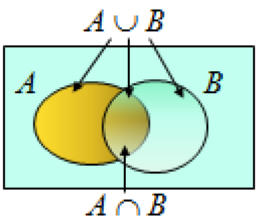
- **Probabilidad de la unión de sucesos**

Para dos sucesos *A* y *B* cualesquiera se cumple:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Se resta $P(A \cap B)$ para evitar contar dos veces el suceso $A \cap B$, que se da tanto en *A* como en *B*.

$\to$ Si los sucesos son incompatibles: $P(A \cap B) = 0$.



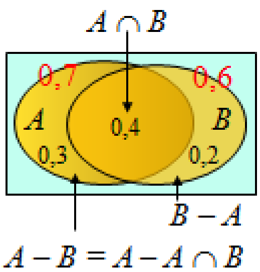
Ejemplos:
a) Si se sabe que las probabilidades de los sucesos *A*, *B* y $A \cap B$ son, respectivamente, $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,6$, $P(A \cap B) = 0,4$, entonces:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7 + 0,6 - 0,4 = 0,9$.

$\to$ Para la diferencia de sucesos:

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,7 - 0,4 = 0,3$.

$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,4 = 0,2$.



b) Observa que en el experimento de extraer una carta de una baraja española, la probabilidad de que sea de bastos o figura, es: $P(B \cup F) = P(B) + P(F) - P(B \cap F)$.

En efecto: $P(B \cup F) = \frac{10}{40} + \frac{12}{40} - \frac{3}{40} = \frac{19}{40}$.

Para la misma baraja, la probabilidad de al extraer una carta sea “un as o una copa”, es:

$$P(as\ o\ copa) = P(as \cup copa) = P(as) + P(copa) - P(as\ de\ copas) = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}.$$

3. TÉCNICAS DE RECUENTO

La asignación de la probabilidad de un suceso, mediante la regla de Laplace, exige conocer el número de casos totales que pueden darse en el experimento y el número de casos favorables a dicho suceso.

Hay determinadas técnicas de recuento que facilitan ese cálculo. Aquí se verán algunas.

Principio multiplicativo
Es el método básico de recuento. Puede formularse como sigue: "Si un suceso puede darse de *m* maneras distintas en primera opción y a continuación puede suceder de *n* modos diferentes, entonces tiene $m \times n$ maneras de suceder".
Por tanto, para contar el número de casos hay que determinar cuántas elecciones hay que hacer y cuántas opciones hay en cada elección sucesiva.

Ejemplos:
a) Si una persona tiene 5 camisas y 4 pantalones, puede vestirse de $5 \times 4 = 20$ formas diferentes.

b) Con los dígitos del 0 al 9 se pueden formar, por ejemplo, números de cuatro cifras, repetidas o no. El número 0005 se considera de 4 cifras; igualmente 0126; y naturalmente, 7603 o 5555.
$\rightarrow$ Si no puede repetirse ningún dígito, en la primera elección hay 10 opciones (los 10 dígitos); en la segunda, 9 opciones (elegido un dígito, el siguiente puede ser cualquiera de los 9 restantes); en la tercera, 8; y en la cuarta 7. En total, los números de 4 cifras no repetidas son $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.
$\rightarrow$ Si pueden repetirse, en la primera elección hay 10 opciones (los 10 dígitos); en la segunda otros 10; y lo mismo en la tercera y cuarta elección. En total, los números de 4 cifras con dígitos repetidos o no son $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10000$.
$\rightarrow$ El recuento anterior permite determinar cuántos números de 4 cifras hay con alguno de sus dígitos repetido. Serán $10000 - 5040 = 4960$.

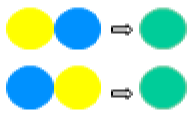
Ejercicio 1
Si se elige un número de cuatro cifras al azar, halla la probabilidad de que dicho número:
a) Tenga alguna cifra repetida $\rightarrow$ suceso *A*.
b) No tenga ninguna cifra de valor 0 $\rightarrow$ suceso *B*.
c) Tenga, al menos, una cifra de valor 7 $\rightarrow$ suceso *C*.
<u>Solución</u>:
a) Como se ha visto, hay un total de 10000 números de 4 cifras; de ellos, 5040 no tienen repetida ninguna cifra, mientras que 4960 tienen repetida alguna de sus cifras, que son los casos favorables a este suceso.
Por tanto: $P(A) = \dfrac{\text{Número de casos favorables a } A}{\text{Número total de casos}} = \dfrac{4960}{10000} = 0,4960$.

b) Si ninguna de las cifras puede ser 0, entonces, cada una de las 4 cifras debe elegirse entre los 9 dígitos restantes. En total, los casos sin la cifra 0, serán $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561$.
Luego: $P(B) = \dfrac{6561}{10000} = 0,6561$.

c) Hay los mismos casos sin la cifra 0 que sin la cifra 7, o sin cualquier cifra que se elija. Esto es, hay 6561 números en los que no aparece el 7, luego, en todos los demás números de 4 cifras sí aparece, al menos, un 7. Los casos favorables serán: $10000 - 6561 = 3439$.
Por tanto: $P(C) = \dfrac{3439}{10000} = 0,3439$.

4. COMBINATORIA

El principio multiplicativo puede concretarse (y ampliarse) cuando se distinguen las sucesivas formas de agrupamiento.
La idea básica de la combinatoria es que en cada experimento hay que conocer cuántos elementos intervienen inicialmente, cuántas elecciones se van a realizar, conocer si la distinta disposición de los elementos cambia el resultado o no y saber si los elementos pueden repetirse o no.
(Así, en las agrupaciones de números el orden es determinante: el par 37 es distinto de 73; pero si se mezclan dos colores en la misma proporción, la mezcla amarillo–azul es idéntica a la azul–amarillo).



Los nombres de las distintas agrupaciones son: variaciones, permutaciones y combinaciones.

Variaciones ordinarias
Variaciones de m elementos tomados n a n. Se dispone de m elementos y se eligen n de ellos para formar un grupo, sin repetir ninguno: $n \le m$.

- Dos de esos grupos son diferentes si contienen algún elemento distinto o sus elementos están en distinto orden.

El número de variaciones de m elementos tomados n a n se representa por $V_{m,n}$, y vale:

$$V_{m,n} = m\cdot(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1).$$ → (El número total de factores es n).

Ejemplo:
Si entre 20 personas (A, B, C, D, …, R, S), se sortean tres objetos de distinto valor, los premios pueden recaer, por orden de importancia, en las ternas ABC, ABD, AMN, …, PRS, … con alguna persona distinta. Como los objetos son distintos, la terna ABC es distinta de la BAC o de la CAB, pues no es lo mismo que el mejor premio recaiga en A, en B o en C. Luego dos de esas ternas son distintas cuando hay algún elemento distinto o sus elementos están en distinto orden.
Por tanto, el número de ternas posibles son las variaciones de 20 personas, tomadas 3 a 3:

$V_{20,3} = 20\cdot19\cdot18 = 6840$ → Calculadoras: $\boxed{nPr}$ (En este caso 20P3).

→ Obsérvese que su número se ajusta al principio de enumeración (principio multiplicativo): el primer premio puede recaer en cualquiera de las 20 personas; el segundo, en alguno de los 19 restantes; el tercero, en uno de los 18 no premiados en 1ª o 2ª opción.

Ejercicio 2
Entre 20 personas (A, B, C, D, …), se sortean tres objetos de distinto valor. Halla la probabilidad de que:
a) Los tres premios les correspondan exclusivamente a los 10 primeros de la lista.
b) Entre los premiados esté siempre A.
Solución:
El número total de posibles ternas premiadas es $V_{20,3} = 20\cdot19\cdot18 = 6840$.

→ Los 10 primeros de la lista pueden distribuirse en ternas de "variaciones de 10 elementos tomados 3 a 3" maneras distintas: $V_{10,3} = 10\cdot9\cdot8 = 720$.

→ Entre los premiados no está A cuando los premios se los llevan las otras 19 personas, cuyo número de ternas es: $V_{19,3} = 19\cdot18\cdot17 = 5814$. Por tanto, A está en 1026 ternas: 6840 – 5814 = 1026.

Luego:

$$P(\text{premios entre los 10 primeros}) = \frac{V_{20,3}}{V_{20,3}} = \frac{720}{6840} \approx 0{,}1053;$$

$$P(\text{A siempre tiene premio}) = \frac{1026}{6840} = 0{,}15.$$

Variaciones con repetición

Se dispone de m elementos y se eligen n de ellos, pudiendo repetirse.

- Como en las variaciones ordinarias, dos de esos grupos son diferentes cuando tienen algún elemento distinto o están colocados en distinto orden.

El número de variaciones con repetición de m elementos tomados n a n se representa por $VR_{m,n}$, y vale:

$$VR_{m,n} = m \cdot m \cdot ... \cdot m = m^n .$$

Ejemplos:

a) Con los dígitos del 0 al 9 se pueden formar números de cinco cifras: 00000, 07201, …, 65656, … Es un caso claro de variaciones con repetición (de 10 elementos tomados 5 a 5). En total hay $VR_{10,5} = 10^5 = 100000$.

→ Si no pueden repetirse los dígitos, se trataría de un problema de variaciones ordinarias. Su número será $V_{10,5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$.

b) En el sistema binario (el usado por los ordenadores), el número de códigos de 10 cifras que se pueden formar son las variaciones con repetición de 2 elementos, {0, 1}, tomados 10 a 10. Su número es $VR_{2,10} = 2^{10} = 1024$. (En informática: 1 kilobyte equivale a 1024 bytes).

c) Si se tiran 4 monedas y se observa el número de caras (C) o cruces (X) que pueden salir, algunas de las secuencias son: *CCCC*, *CXCX*, *CCXC*, …, *XXXX*. Se tienen dos resultados {C, X}, que pueden repetirse 4 veces. Su número es $VR_{2,4} = 2^4 = 16$.

Observación: En algunos problemas se utilizan las expresiones "sin reemplazamiento" o "con reemplazamiento"; o sus análogas, sin o con reposición. Se indica con ello que un mismo elemento no puede repetirse (sin) o sí puede repetirse (con).

Ejercicio 3

Cada billete de la lotería nacional se designa mediante un número de cinco cifras. Si una persona compra un número al azar, halla la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) El número termina en 56.

b) El número es capicúa.

Solución:

El número total de billetes de lotería son $VR_{10,5} = 10^5 = 100000$.

a) Algunos números que terminan en 56 son: 000<u>56</u>, 245<u>56</u>, …, 999<u>56</u>. Lo único que cambia en ellos son las 3 primeras cifras, formadas tres dígitos del 0 al 9, repetidos o no. En total hay $VR_{10,3} = 10^3 = 1000$.

Por tanto, $P(nnn56) = \dfrac{1000}{100000} = \dfrac{1}{100} = 0,01$. (Las dos últimas cifras de cualquier billete de lotería van desde 00 a 99: 100 terminaciones posibles; una de ellas es 56).

b) Un número es capicúa cuando se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Así, son capicúas, de cinco cifras, los números 11111, 13031, 65656. ¿Pero cuántos hay?

Observa: fijadas las 3 primeras cifras del número, por ejemplo 123 – – o 730 – – , solo hay un capicúa posible: 123<u>21</u> y 730<u>37</u>. Como las 3 primeras cifras pueden elegirse de $VR_{10,3} = 10^3 = 1000$ maneras distintas, se tiene que $P(capicúa) = \dfrac{1000}{100000} = 0,01$.

Permutaciones de *m* elementos

Son las variaciones (ordinarias) en las que intervienen los *m* elementos considerados, esto es $V_{m,m}$.

Por tanto, dos permutaciones son diferentes solo cuando los elementos están colocados en distinto orden, pues en todos los casos intervienen todos los que hay.

Las permutaciones de *m* se escriben P_m; su número es:

$P_m = m\cdot(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = m!$ → Calculadoras: $\boxed{x!}$

Ejemplos:

a) Algunas permutaciones de las letras T, O, R, A son: TORA, OTRA, ROTA, TROA, ... En total hay factorial de 4 permutaciones: $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$.

b) Diez libros pueden colocarse en una estantería de permutaciones de 10 maneras distintas.

$P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$.

Ejercicio 4

Un grupo de 6 personas se sientan al azar en una fila de 6 butacas.

Calcula la probabilidad de que las dos mayores estén sentadas consecutivamente.

Solución:

El número total de posibles disposiciones es "permutaciones de 6": $P_6 = 6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$.

Las dos personas mayores, M1 y M2, están juntas en las siguientes disposiciones (– indica que la butaca es ocupada por otra de las 4 personas restantes):

M1M2 – – – –; – M1M2 – – –; – – M1M2 – –; – – – M1M2 –; – – – – M1M2;
M2M1 – – – –; – M2M1 – – –; – – M2M1 – –; – – – M2M1 –; – – – – M2M1.

En cada disposición de las dos personas mayores juntas, las 4 personas restantes pueden sentarse de permutaciones de 4 formas distintas: $P_4 = 4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$.

Por ejemplo, si las 4 personas más jóvenes son A, B, C y D, con M1 y M2 sentadas, en ese orden, en las dos butacas de la izquierda, se pueden dar las disposiciones:

M1M2 ABCD; M1M2 ABDC; M1M2 ACBD; M1M2 ADBC; M1M2 ACBD; M1M2 ACDB;
M1M2 BACD; M1M2 BADC; M1M2 BCAD; M1M2 BCDA; M1M2 BDAC; M1M2 BCDA;
M1M2 CABD; M1M2 CADB; M1M2 CBAD; M1M2 CBDA; M1M2 CDAB; M1M2 CDBA;
M1M2 DABC; M1M2 DACB; M1M2 DBAC; M1M2 DBCA; M1M2 DCAB; M1M2 DCBA;

Por tanto, las dos personas mayores pueden estar juntas de 10 formas distintas, y por cada una de esas disposiciones las, 4 restantes pueden sentarse de 24 maneras diferentes; por tanto, hay 10 · 24 = 240 disposiciones favorables a las dos personas mayores están sentadas juntas. Luego, la probabilidad de que estén sentadas juntas será: $P(\text{Mayores juntos}) = \dfrac{240}{720} = \dfrac{1}{3}$.

Ejercicio 5

Cada uno de los 5 grupos de 1º de Bachillerato de un instituto ha preparado una actuación para la fiesta de fin de curso. Si el orden de actuación se decide por sorteo, ¿de cuántas formas distintas pueden actuar? Si el grupo de 1º C prefiere actuar en primer lugar, ¿cuál es la probabilidad de que el sorteo le favorezca?

Solución:

El orden de actuación puede darse de $P_5 = 5! = 120$ maneras distintas.

La quinta parte de esas actuaciones las comenzaría el grupo A, y la misma cantidad de veces actuarían en primer lugar los demás grupos. Por tanto, $P(\text{comience 1º C}) = \dfrac{24}{120} = \dfrac{1}{5}$.

Combinaciones ordinarias
Se dispone de *m* elementos y se eligen *n* de ellos, todos distintos. Si el orden en que están dispuestos esos elementos no distingue un grupo de otro, cada uno de esos grupos en una combinación de *n* elementos.

El número de combinaciones que pueden formarse con *m* elementos tomados n a *n* viene dado por la fórmula:

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}. \qquad \to \text{Observa que esa expresión es equivalente a } C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n}$$

Ejemplo:
Si se tienen 7 botes de pinturas de distintos colores y se mezclan de tres en tres, en la misma proporción, cada uno de los nuevos colores obtenidos es una de las combinaciones de 7 (colores) tomados 3 a 3, pues el orden en que los colores se incorporan a la mezcla no cambia el resultado. Así, por ejemplo, al mezclar los colores amarillo (*A*), verde (*V*) y rojo (*R*), el color resultante será idéntico, independientemente del orden de mezcla: *AVR*, *ARV*, *VAR*, *VRA*, *RAV* o *RVA*.

Para calcular cuántas combinaciones diferentes pueden formarse, se observa:
→ Si se toman 3 botes distintos entre los 7 que hay, el primer bote puede ser cualquiera de los 7, por ejemplo, amarillo (*A*); el segundo, cualquiera de los 6 botes restantes, por ejemplo, verde (*V*); el tercero, cualquier otro de los 5 que quedan, por ejemplo, rojo (*R*). En total esas elecciones pueden hacerse de 7 · 6 · 5 formas diferentes ($V_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$); pero como cada mezcla de tres colores genera $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ variaciones idénticas, el número 210 habrá que dividirlo entre 6. Por tanto,

$$C_{7,3} = \frac{V_{7,3}}{P_3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35.$$

Ejercicio 5
Se toman, al azar tres cartas de una baraja española de 40 cartas. Halla la probabilidad de que:

a) La tres sean reyes;
b) Exactamente una sea rey.
<u>Solución</u>:
El orden en recibir las tres cartas no altera la jugada en cuestión. Da lo mismo recibir el rey de copas, el 4 de oros y la sota de bastos, en ese orden que en cualquier otro.
Por tanto, el número de jugadas diferentes es:

$$C_{40,3} = \binom{40}{3} = \frac{40\cdot 39\cdot 38}{3\cdot 2\cdot 1} = 9880. \qquad (\text{Con la calculadora } \boxed{40C3}\ \boxed{=}\ 9880).$$

a) Como hay 4 reyes, se pueden recibir 3 de ellos de $C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 1} = 4$ maneras diferentes.

Luego, $P(3 \text{ reyes}) = \frac{4}{9880} \approx 0{,}0004$.

b) El rey puede ser cualquiera de los 4 de la baraja; las otras 2 cartas del trio deben ser de las 36 que no son reyes, que pueden recibirse de $C_{36,2} = \binom{36}{2} = \frac{36\cdot 35}{2\cdot 1} = 630$ maneras distintas.

Así pues, hay 4 · 630 = 2520 jugadas posibles con exactamente un rey.

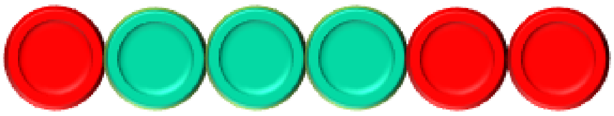
Luego, $P(\text{exactamente 1 rey}) = \frac{2520}{9880} \approx 0{,}2551$.

Permutaciones con repetición (Optativo)
Cuando en una permutación puede repetirse alguno de los elementos que intervienen se habla de permutaciones con repetición. En cada caso hay que indicar el número de veces que puede repetirse el elemento en cuestión.
→ La definición de permutaciones con repetición es la siguiente: Una permutación con repetición de *m* elementos, en los que un elemento *A* se repite *a* veces, otro *B* se repite *b* veces y otro *C* se repite *c* veces, con *a* + *b* + *c* = *m*, es cada uno de los grupos diferente que pueden formarse de *m* elementos cada grupo, donde *A*, *B* y *C* están repetidos *a*, *b y c* veces, respectivamente.
Dos de esas permutaciones son diferentes cuando los elementos están colocados en distinto orden.
Su número se denota por $P_m^{a,b,c}$ y vale: $P_m^{a,b,c} = \dfrac{m!}{a!\cdot b!\cdot c!}$.

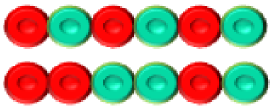
Ejemplos:
a) Permutando las letras de la palabra OSA pueden formarse 6 "palabras": OSA, OAS, SOA, SAO, AOS, ASO, todas distintas.
En cambio, con las letras de ASA, solo hay 3 permutaciones (ASA, AAS y SAA), pues al aparecer la letra A dos veces, al intercambiarse entre ellas resulta indistinguible.
Su número es $P_3^{2,1} = \dfrac{3!}{2!\cdot 1!} = \dfrac{6}{2} = 3$

b) Los números de cinco cifras en los que aparecen 2 cuatros y 3 cincos son:
44555, 45455, 45545, 45554, 54455, 54545, 54554, 55445, 55454 y 55544
Estos grupos son las permutaciones con repetición de 5 números donde el 4 se repite 2 veces y el 5 se repite 3 veces. Esto es $P_5^{2,3}$.
Su número es $P_5^{2,3} = \dfrac{P_5}{P_2\cdot P_3} = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!} = \dfrac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$.

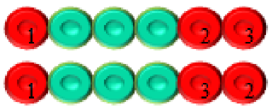
Ejercicio 6
De cuántas maneras distintas pueden colocarse en fila tres fichas rojas y tres verdes, todas del mismo tamaño.



¿Cuál es la probabilidad de que queden ordenadas consecutivamente por colores?
Solución:
Una fila de 6 fichas se distingue de otra cuando los colores están en distinto orden.

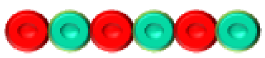


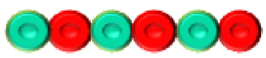
Dos filas no se distinguen cuando las fichas del mismo color se intercambian entre ellas. (Aquí se han intercambiado las dos fichas rojas de la derecha, pero el resultado es el mismo. Observa que las 3 fichas rojas se pueden intercambiar de P_3 maneras distintas: 123, 132, 213, 231, 312, 321; y lo mismo pasa con las fichas verdes).



Por tanto, las filas distintas son las permutaciones con repetición de 6 fichas en las que cada ficha (roja o verde) se repite 3 veces: $P_6^{3,3} = \dfrac{P_6}{P_3\cdot P_3} = \dfrac{6!}{3!\cdot 3!} = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 5\cdot 4 = 20$.

Solo hay dos filas con las fichas alternadas por colores:





Por tanto, $P(\text{colores alternados}) = \dfrac{2}{20} = 0,1$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Al extraer una carta de una baraja de 40 cartas calcula la probabilidad de que sea
a) Un rey. b) El rey de copas. c) No sea una figura.

2. Si se consideran familias con tres hijos, ¿cuál es la probabilidad de que una de esas familias, elegida al azar, tenga al menos una niña?

3. Al lanzar cinco monedas iguales pueden obtenerse 0, 1, 2, 3, 4 o 5 caras. ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de esos sucesos?

4. Calcula la probabilidad de que al lanzar dos veces un dado (con las caras numeradas del 1 al 6) se obtenga:
a) Al menos un as: {1}. b) Dos ases. c) Dos números distintos

5. Se lanzan dos dados con las caras numeradas del 1 al 6. Halla la probabilidad de que:
a) Su suma sea 4 o 5.
b) Uno a de los resultados sea par y el otro impar.
c) Uno de los resultados sea par sabiendo que la suma de los dos es 7.
d) Uno de los resultados sea 4 sabiendo que la suma de los dos es mayor que 7.

6. Pedro y Pablo idean el siguiente juego: cada uno lanza un dado, si la suma de los dados es mayor que 7, gana Pedro; si la diferencia de ambos es menor que 2, gana Pablo; y en cualquier otro caso hay empate. ¿Es un juego equitativo?

7. De una urna que contiene 10 bolas blancas y 8 negras, todas de igual peso y tamaño, se hacen dos extracciones al azar y sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de sacar:
a) Dos bolas blancas. b) Sólo una negra. c) Del mismo color.
Halla las mismas probabilidades si las extracciones se hicieran con reemplazamiento.

8. En una bolsa hay diez bolas iguales numeradas del 0 al 9 cada una. Si se extraen dos bolas de forma consecutiva y se anotan sus números:
a) Escribe todos los sucesos elementales que forman el suceso "la primera bola extraída es un 5".
b) ¿Cuántos números de dos cifras pueden formarse colocando las bolas por orden de extracción?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el número formado sea mayor que 59?
d) ¿Y la probabilidad de que termine en 3?

9. En un juego se sortea cada día un premio utilizando papeletas con tres cifras, numeradas del 000 al 999.
a) Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 5.
b) Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 55.
c) Sabiendo que ayer salió premiado un número terminado en 5, calcula la probabilidad de que el número premiado hoy termine también en 5.

10. Se tienen dos sucesos aleatorios A y B y se conocen las probabilidades: $P(A)=0,4$; $P(B)=0,5$ y $P(A\cup B)=0,7$. Halla la probabilidad de que:
a) Se cumplan los dos sucesos a la vez: $P(A\cap B)$.
b) Solo se cumpla A: $P(A-B)$. c) No se cumpla B: $P\left(\overline{B}\right)$.
d) No se cumpla ninguno de los dos: $P\left(\overline{A\cup B}\right)$.

11. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A \cup B) = 0{,}9$, $P(A \cap B) = 0{,}2$ y $P(\overline{A}) = 0{,}4$, donde $\overline{A}$ es el suceso contrario de A. Calcula las siguientes probabilidades:

a) $P(B)$; b) $P(A \cap \overline{B})$; c) $P(\overline{A \cap B})$; d) $P(\overline{A \cup B})$.

12. A un congreso asisten 120 personas, de las que 70 hablan castellano, otro conjunto inglés y 30 ambos idiomas. Si se escogen 2 personas al azar, ¿qué probabilidad hay de que se entiendan sin traductor?

13. Se tienen dos sucesos aleatorios A y B y se conocen las probabilidades $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}6$ y $P(A \cup B) = 0{,}85$. Calcula:

a) $P(A \cap B)$ b) $P\left((A \cap B)^C\right)$

c) La probabilidad de que se cumpla solo uno de los dos sucesos.

14. Un examen de respuesta múltiple consta de 100 preguntas, cada una con 4 opciones, una de ellas correcta y erróneas las otras tres. Cada respuesta acertada suma un punto, la respuesta en blanco suma 0; pero las respuestas erróneas restan.

a) ¿Cuánto debe restarse por cada uno de los fallos para que el examen sea equitativo?

b) ¿Qué calificación obtendrá un alumno que acierta 67 peguntas, falla 21 y deja 12 en blanco?

15. a) En un grupo de 20 personas, ¿de cuántas maneras puede seleccionarse a 3 de ellas?

b) ¿De cuántas maneras distintas pueden seleccionarse 6 preguntas de examen entre 10 propuestas?

c) ¿De cuántas maneras distintas pueden repartirse las 40 cartas de una baraja entre 4 jugadores?

16. De una baraja española de 40 cartas se eligen al azar, simultáneamente, cuatro cartas. Halla la probabilidad:

a) De que se hayan elegido al menos tres reyes.

b) De que tres de las cuatro cartas sean del mismo palo.

17. En una carrera participan 20 atletas:

a) ¿De cuántas maneras se pueden otorgar las medallas de oro, plata y bronce?

b) Si entre los 20 participantes hay 5 de categoría senior, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de los atletas senior obtenga medalla?

18. En una mesa circular con 6 sillas se sientan a comer los padres y 4 hijos, si se sientan al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los padres estén uno frente a otro?

19. En una clase infantil hay 6 niñas y 10 niños. Si se escoge a 2 escolares al azar, halla la probabilidad de que:

a) Sean 2 niños $\to$ suceso *A*. b) Sean 2 niñas $\to$ suceso *B*.

c) Sean una niña y un niño $\to$ suceso *C*.

20. Resuelve el problema anterior con la ayuda de un diagrama de árbol.

21. Al hacer tres lanzamientos de un dado, con las caras numeradas del 1 al 6, y sumar sus resultados se alcanzó una puntuación total de 12.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer lanzamiento se obtuviera un 6?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en alguno de los lanzamientos se obtuviera un 6?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que en ninguno de los lanzamientos se obtuviera un 6?

22. Se hacen tres lanzamientos de un dado con las caras numeradas del 1 al 6. Si en el primer lanzamiento sale un 3, ¿qué es más probable, que la suma de las puntuaciones sea un número par o que tal suma sea impar?

23. En una empresa trabajan 7 mujeres y 12 hombres. Si se seleccionan 3 personas al azar, halla la probabilidad de que se seleccionen 2 mujeres y un hombre.

24. En una bolsa hay 7 bolas blancas y 9 negras. Si se extraen a la vez 3 bolas al azar, calcula la probabilidad de que:
a) Las 3 bolas sean negras.
b) Una sea negra y las otras 2 blancas.
c) Dos sean negras y 1 blanca.
d) Al menos 1 sea blanca.

25. Un opositor se sabe la mitad de los temas de que consta una oposición. La prueba consiste en responder a 2 temas elegidos al azar de entre los 48 que contiene el temario. Calcula la probabilidad que tiene de aprobar si para ello debe contestar bien a los 2 temas.

26. Un opositor se sabe la mitad de los temas de que consta una oposición. La prueba consiste en responder a 3 temas, elegidos al azar, de entre los 48 que contiene el temario. Calcula la probabilidad que tiene de aprobar si para ello debe contestar bien, al menos, a los 2 temas.

27. Un examen de oposición consiste en desarrollar por escrito un tema de un total de 50. El tribunal elige al azar 2 temas y cada candidato debe contestar correctamente uno de los dos.
a) Halla la probabilidad de que un candidato apruebe la oposición si se sabe solo 35 temas.
b) Si los opositores tienen que contestar correctamente a los dos temas elegidos, ¿cuál será la probabilidad de aprobar que tiene otro candidato que se sabe 40 de los 50 temas?

28. En un grupo de 12 cartas de la baraja española hay 5 oros, 4 espadas y 3 copas. Si se barajan las 12 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que las tres de copas queden juntas?

29. Cuatro personas suben a un autobús cuando sólo quedan cinco paradas más para el final de la línea. Suponiendo que todos tienen igual probabilidad de bajarse en cualquier parada, halla las probabilidades siguientes:
a) Que esas cuatro personas se bajen en la misma parada.
b) Que no baje ninguna de ellas en las primeras tres paradas.
c) Que en las primeras cuatro paradas baje una de esas personas en cada parada.

30. Si se lanzan al azar 6 monedas equilibradas, calcula la probabilidad de obtener:
a) Al menos una cara. b) Dos caras y cuatro cruces. c) Tres caras y tres cruces.