Solución de los Problemas Propuestos

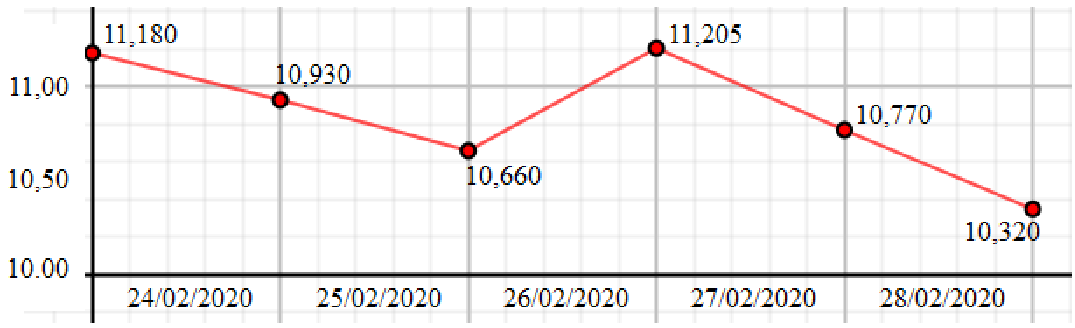
1. La valoración (en euros) de las acciones en bolsa (IBEX 35) de Iberdrola en la semana del 24 al 28 de marzo de 2020 se indican en la tabla:

Fecha	24/02/2020	25/02/2020	26/02/2020	27/02/2020	28/02/2020
Apertura	11,180	10,930	10,660	11,205	10,770
Cierre	10,930 ↓	10,660 ↓	11,205 ↑	10,770 ↓	10,320 ↓

Fuente: www.expansion.com

a) Haz un esquema gráfico de la variación diaria en el periodo considerado.
b) Halla la tasa de variación diaria (en porcentajes) y la variación media en esa semana.
Solución:
La bolsa de Madrid abre cada día a las 9:00 h y cierra, aproximadamente, a las 17:30 h.
El día 24/02/2020 una acción de Iberdrola valía a las 9:00 h 11,180 €; su valor al final de ese día fue de 10,930 €. Tuvo una bajada de 0,25 €.

a) El gráfico puede ser el siguiente.



b) La tasa de variación diaria se calcula haciendo el cociente entre la diferencia (valor de cierre – valor de apertura) y el valor de apertura; si se multiplica por 100 se obtiene el porcentaje de variación. Así:

$$TV[24/02] = \frac{10,930 - 11,180}{11,180} \cdot 100 = -2,236\ \%;$$

$$TV[25/02] = \frac{10,660 - 10,930}{10,930} \cdot 100 = -2,470\ \%;$$

$$TV[26/02] = \frac{11,205 - 10,660}{10,660} \cdot 100 = +5,113\ \%$$

$$TV[27/02] = \frac{10,770 - 11,205}{11,205} \cdot 100 = -3,882\ \%$$

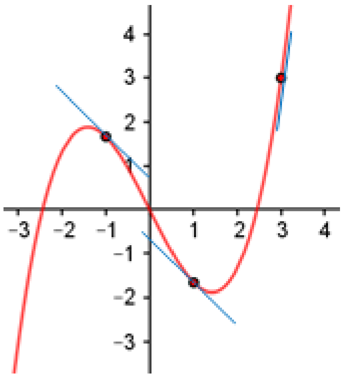
$$TV[28/02] = \frac{10,320 - 10,770}{10,770} \cdot 100 = -4,178\ \%$$

La tasa de variación en esos 5 días fue: $TV[24-28] = \frac{10,320 - 11,180}{11,180} \cdot 100 = -7,692\ \%$.

La pérdida media diaria fue de –1,538 %.
La tasa de variación media de los 5 días es:

$$TVM[24-28] = \frac{10,320 - 11,180}{5} = -0,172\ \text{€/día} \to \frac{-0,172}{11,180} \cdot 100 = -1,538\ \%.$$

2. Halla la tasa de variación media de la función $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$ en los intervalos [−1, 0], [−1, 1] y [0, 3].
Utilizando la derivada, halla la tasa de variación instantánea de esa función en los puntos −1, 1 y 3.
¿Cuál es el significado del valor de la derivada en esos puntos?
Solución:
Intervalo [−1, 0] → $TVM[-1,\ 0]=\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=\frac{0-5/3}{1}=-\frac{5}{3}$.
Intervalo [−1, 1] → $TVM[-1,\ 1]=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{-5/3-5/3}{2}=-\frac{5}{3}$.
Intervalo [0, 3] → $TVM[0,\ 3]=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{3-0}{3}=1$.



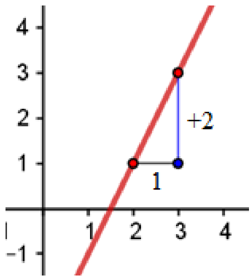
La derivada de $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$ es $f'(x)=\frac{1}{3}3x^2-2=x^2-2$.
Por tanto:

$TVI(-1)=f'(-1)=(-1)^2-2=-1$;
$TVI(1)=f'(1)=1^2-2=-1$;
$TVI(3)=f'(3)=3^2-2=7$.

La derivada en un punto indica la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función.
En este caso, las pendientes de esas rectas, en los puntos −1, 1 y 3 son, respectivamente, −1, −1 y 7.
En el dibujo (que no se pide) se ha trazado la función y las rectas tangentes.

3. Comprueba que la tasa de variación media de la función $f(x)=2x-3$ en los intervalos [−1, 0], [−1, 1] y [0, 3] siempre vale 2. ¿Es una coincidencia dicho resultado? Justifica tu respuesta.
Solución:
Efectivamente:

$TVM[-1,\ 0]=\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=\frac{-3-(-5)}{1}=2$.
$TVM[-1,\ 1]=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{-1-(-5)}{2}=2$.
$TVM[0,\ 3]=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{3-(-3)}{3}=2$.



No es una coincidencia, ya que la función es una recta de pendiente 2: la pendiente de una recta indica el crecimiento unitario, la tasa de variación.
También coincide con la variación instantánea en cualquier punto, ya que $f'(x)=2$.

4. Dada la función $f(x)=-x^2+4x$, se pide:
a) Utilizando la definición de derivada de una función en un punto, calcula el valor de $f'(3)$.
b) Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$.
Solución:
a) Por definición, $f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$.
Como $f(3+h)=-(3+h)^2+4(3+h)=-h^2-2h+3$ y $f(3)=3$, se tendrá:

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2-2h+3-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2-2h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(-h-2)}{h}=\lim_{h\to 0}(-h-2)=-2.$$

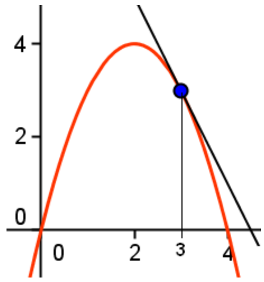
Luego, $f'(3)=-2$.

b) La recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 3$, es:

$$y-f(3)=f'(3)(x-3).$$

Como $f(3)=3$ y $f'(3)=-2$, se obtiene:

$$y-3=-2(x-3)\Rightarrow y=-2x+9.$$



En la figura adjunta (que no se pide) se representan la curva y la recta.

5. (Optativo). Utilizando la definición de derivada demuestra que la función derivada de $y=f(x)=x^n$ es $f'(x)=nx^{n-1}$.

Solución:

Hay que calcular el límite: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Se procede como sigue.

1) $f(x+h)=(x+h)^n=x^n+nx^{n-1}h+\dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^3+...+nxh^{n-1}+h^n$. (Esta expresión se obtiene utilizando la fórmula de la potencia de un binomio).

$$(x+h)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\binom{n}{3}x^{n-3}h^3+...+\binom{n}{n-1}xh^{n-1}+\binom{n}{n}h^n\to$$

$$(x+h)^n=x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^3+...+nxh^{n-1}+h^n\to$$

2) $f(x+h)-f(x)=(x+h)^n-x^n=$

$$=nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^3+...+nxh^{n-1}+h^n.$$

3) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^3+...+nxh^{n-1}+h^n}{h}=$$

$$=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^2+...+nxh^{n-1}+h^{n-1}.$$

4) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^2+...+nxh^{n-1}+h^{n-1}\right)=nx^{n-1}+0=nx^{n-1}.$$

Por tanto, si:

$$\underline{f(x)=x^n\Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}}.$$

- Esta regla es válida para cualquier valor de n, positivo, negativo, fraccionario…

6. (Optativo). Demuestra que si una función es derivable en $x = a$, entonces es continua en a.

Solución:

Comprobar que este resultado es cierto es relativamente sencillo, pues si $f(x)$ es derivable en $x = a$, entonces existe $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

De la existencia de ese límite puede deducirse que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$; o lo que es lo mismo, que $\lim_{x\to a}\left(f(x) - f(a)\right) = 0$.

Para ello, se hace $x = a + h$, y se observa que si $x \to a$, entonces $h \to 0$; y al revés.
Por tanto:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x) - f(a)\right) \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\left(f(a+h) - f(a)\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\left(f(a+h) - f(a)\right)}{h}\cdot h =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(f(a+h) - f(a)\right)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} h = f'(a)\cdot 0 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\left(f(x) - f(a)\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

En consecuencia, si la función es derivable en $x = a$ se deduce que es continua en $x = a$.

7. Para la función $f(x) = x^2 + 2x$, se pide:

a) Su derivada y el valor de $f'(-2)$, $f'(-1)$ y $f'(0)$.

b) La ecuación de la recta tangente en cada uno de los puntos de abscisa −2, −1, 0.

c) Explica gráficamente el resultado de $f'(-1)$.

Solución:

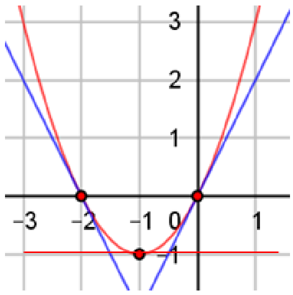
a) La función derivada de $f(x) = x^2 + 2x$ es $f'(x) = 2x + 2$.

Para hallar el valor de la derivada en cualquier punto, basta con sustituir. Así:

$$f'(-2) = 2\cdot(-2) + 2 = -2;\quad f'(-1) = 2\cdot(-1) + 2 = 0;\ f'(0) = 2\cdot 0 + 2 = 2.$$

b) La recta tangente a la curva, en el punto de abscisa $x = a$, es: $y - f(a) = f'(a)\left(x - a\right)$.

- Para $x = -2$, como $f(-2) = 0$ y $f'(-2) = -2$, la ecuación será:
  $y - (-2) = -2\left(x - (-2)\right) \Rightarrow y + 2 = -2\left(x + 2\right) \Rightarrow y = -2x - 6$.
- Para $x = -1$, se tiene $f(-1) = -1$ y $f'(-1) = 0$; luego, la recta tangente será:
  $y - (-1) = 0\cdot\left(x - (-1)\right) \Rightarrow y = -1$.
- Para $x = 0$, como $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$, se tendrá:
  $y - 0 = 2\left(x - 0\right) \Rightarrow y = 2x$.



c) Que $f'(-1) = 0$ indica que la tangente a la curva en ese punto es horizontal. Como la curva es unan parábola, ese punto es su vértice.
Se puede ver gráficamente.

8. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función:

a) $f(x) = -x^2 + 4x$ en el punto $x = 1$.

b) $f(x) = x^2 - x$ en el punto $x = 2$.

Representa gráficamente la curva y la recta tangente.

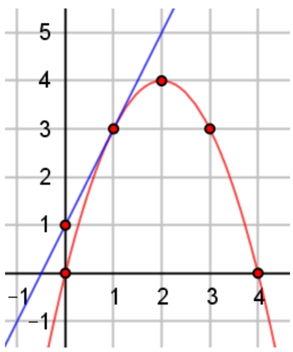
Solución:

a) La ecuación de la recta tangente es $y - f(1) = f'(1)\left(x - 1\right)$.

$$f(x) = -x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = -2x + 4 \Rightarrow f(1) = 3;\ f'(1) = 2.$$

Luego, la recta es:

$$y - 3 = 2\left(x - 1\right) \Rightarrow y = 2x + 1.$$



Dando valores se pueden obtener algunos puntos y representar tanto la curva como la recta.
Para la curva: (0, 0); (1, 3); (2, 4); (3, 3); (4, 0).
Para la recta: (0, 1); (1, 3).

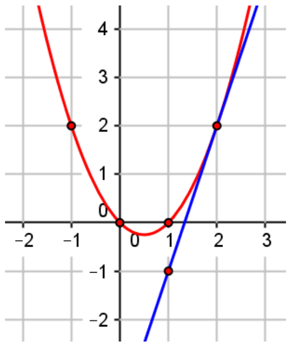
b) La ecuación de la recta tangente es $y - f(2) = f'(2)(x-2)$.

$f(x) = x^2 - x \Rightarrow f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow$

$f(2) = 2$; $f'(2) = 3$.

Luego, la recta es:

$y - 2 = 3(x-2) \Rightarrow y = 3x - 4$.



Dando valores se pueden obtener algunos puntos y representar tanto la curva como la recta.
Para la curva: (0, 0); (1, 0); (2, 2); (3, 6); (–1, 2).
Para la recta: (2, 3); (1, –1).

9. a) Aplicando la definición de derivada (paso a paso) halla $f'(2)$, siendo $f(x) = \dfrac{4}{x}$.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Haz una representación gráfica de la función y la tangente.

Solución:

a) $$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{4}{2+h} - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{-2h}{2+h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{h(2+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-2}{(2+h)} = \frac{-2}{2} = -1.$$

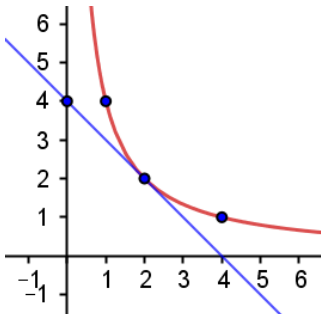
Nota: Aplicando las reglas de derivación:

$$f(x) = \frac{4}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-4}{x^2} \Rightarrow f'(2) = -1.$$

b) La ecuación de la recta tangente es $y - f(2) = f'(2)(x-2)$.

Como $f(2) = 2$ y $f'(2) = -1$, la recta es:

$y - 2 = -1 \cdot (x-2) \Rightarrow y = -x + 4$.

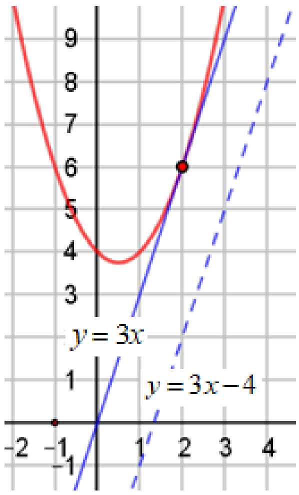


Dando algunos valores se pueden hacer las gráficas correspondientes.
Puntos de la función: (1, 4); (2, 2); (4, 1)… (Esta función, que es una hipérbola equilátera, tiene otra rama en el tercer cuadrante)
Puntos de la recta: (2, 2); (0, 4).

10. Halla el punto en el que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - x + 4$ es paralela a la recta de ecuación $y = 3x - 4$.

Solución:

La pendiente de la recta tangente es el valor de la derivada en el punto de tangencia. Como se desea que la recta tangente sea paralela a la de ecuación $y = 3x - 4 \Rightarrow$ la pendiente (la derivada) debe valer 3.



Por tanto:

$f'(x) = 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2$.

Para $x = 2$, $f(2) = 4 - 2 + 4 = 6$. El punto de tangencia es (2, 6).

Luego, la ecuación de la recta tangente pedida es:

$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y - 6 = 3(x-2) \Rightarrow y = 3x$.

11. Halla las tangentes a la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ que son paralelas a la recta de ecuación $2x+y=3$.

Solución:

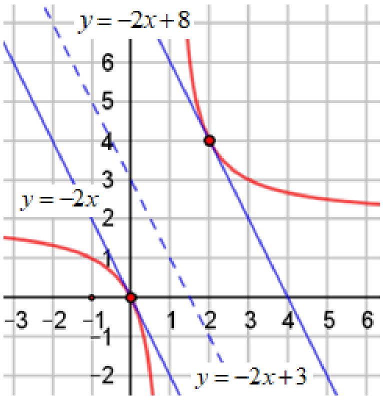
Como $2x+y=3\Rightarrow y=-2x+3$, cuya pendiente es –2, hay que buscar los puntos en los que la derivada de $f(x)$ valga –2.

Por tanto,

$$f´(x)=\frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}=-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=(x-1)^2\Rightarrow x=0;\ x=2.$$

Los puntos de tangencia son (0, 0) y (2, 4).



Las tangentes $\left[y-f(a)=f´(a)(x-a)\right]$ serán:

$y=-2x$;

$y-4=-2(x-2)\Rightarrow y=-2x+8$.

La situación es la que se indica en la figura adjunta.

12. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^5-4x^3+6x-2$; b) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+7x^2-4x+5$; c) $f(x)=\dfrac{2}{5}x^5-4x^2+7$;

Solución:

a) $f(x)=x^5-4x^3+6x-2\Rightarrow f´(x)=\left(x^5\right)'-4\left(x^3\right)'+6(x)'-(2)'\Rightarrow f´(x)=5x^4-12x^2+6$.

b) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+7x^2-4x+5\Rightarrow f´(x)=\dfrac{1}{3}\cdot 3x^2+7\cdot 2x-4\Rightarrow f´(x)=x^2+14x-4$.

c) $f(x)=\dfrac{2}{5}x^5-4x^2+7\Rightarrow f´(x)=\dfrac{2}{5}\cdot 5x^4-4\cdot 2x\Rightarrow f´(x)=2x^4-8x$.

13. Para la función $h(x)=\left(x^2-3x\right)^2\cdot(2x-3)$ halla su derivada:

1.º Aplicando la fórmula de la derivada de un producto.

2.º Multiplicando la expresión y derivando después.

En los dos casos expresa el resultado como un polinomio ordenado.

Solución:

1.º Derivando como un producto:

$$h(x)=\left(x^2-3x\right)^2\cdot(2x-3)\Rightarrow h´(x)=\left(\left(x^2-3x\right)^2\right)'\cdot(2x-3)+\left(x^2-3x\right)^2\cdot(2x-3)'\Rightarrow$$

$$h´(x)=2\left(x^2-3x\right)\cdot(2x-3)\cdot(2x-3)+\left(x^2-3x\right)^2\cdot 2\rightarrow \text{Operando:}$$

$$h´(x)=2\left(x^2-3x\right)\cdot\left(4x^2-12x+9\right)+\left(x^4-6x^3+9x^2\right)\cdot 2\Rightarrow$$

$$h´(x)=2\left(4x^4-12x^3+9x^2-12x^3+36x^2-27x\right)+2x^4-12x^3+18x^2\Rightarrow$$

$$h´(x)=10x^4-60x^3+108x^2-54x.$$

2.º Multiplicando y derivando después.

$$h(x)=\left(x^2-3x\right)^2\cdot(2x-3)\Rightarrow h(x)=\left(x^4-6x^3+9x^2\right)\cdot(2x-3)=2x^5-15x^4+36x^3-27x^2\Rightarrow$$

$h'(x) = 10x^4 - 60x^3 + 108x^2 - 54x$.

Observa que, en este caso, es mejor la opción de operar antes y derivar después.

14. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $g(x) = (4x^2 - 3x)\cdot(7x-2)$; b) $g(x) = (3x^2 - 2x)^3$; c) $g(x) = 4x\cdot(7x-2)^2$.

Solución:

a) $g(x) = (4x^2 - 3x)\cdot(7x-2) \Rightarrow g'(x) = (4x^2-3x)'\cdot(7x-2) + (4x^2-3x)\cdot(7x-2)' \Rightarrow$

$g'(x) = (8x-3)\cdot(7x-2) + (4x^2-3x)\cdot 7 \Rightarrow g'(x) = 56x^2 - 37x + 6 + 28x^2 - 21x \Rightarrow$

$g'(x) = 84x^2 - 58x + 6$.

b) $g(x) = (3x^2-2x)^3 \Rightarrow g'(x) = 3(3x^2-2x)^2\cdot(3x^2-2x)' \Rightarrow g'(x) = 3(3x^2-2x)^2\cdot(6x-2)$.

c) $g(x) = 4x\cdot(7x-2)^2 \Rightarrow g'(x) = (4x)'\cdot(7x-2)^2 + 4x\cdot\left((7x-2)^2\right)' \Rightarrow$

$g'(x) = 4\cdot(7x-2)^2 + 4x\cdot(2\cdot(7x-2)\cdot 7) \Rightarrow g'(x) = 4\cdot(7x-2)^2 + 56x\cdot(7x-2)$.

15. Halla la derivada de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$; b) $f(x) = \dfrac{1-3x}{x-2}$; c) $f(x) = \dfrac{2x-4}{3x-2}$; d) $f(x) = \dfrac{-4}{x}$.

e) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{2x+3}$; f) $f(x) = \dfrac{4x+2}{5x^2-3x}$; g) $f(x) = \dfrac{4x^3}{5x^2-4x}$; h) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-3}$.

Solución:

La derivada de un cociente de funciones es:

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow (F(x))' = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x-3} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(2x)'\cdot(x-3) - (2x)\cdot(x-3)'}{(x-3)^2} = \dfrac{2\cdot(x-3)-(2x)\cdot 1}{(x-3)^2} = \dfrac{-6}{(x-3)^2}$.

b) $f(x) = \dfrac{1-3x}{x-2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(1-3x)'\cdot(x-2) - (1-3x)\cdot(x-2)'}{(x-2)^2} = \dfrac{-3(x-2)-(1-3x)\cdot 1}{(x-2)^2} = \dfrac{5}{(x-2)^2}$.

c) $f(x) = \dfrac{2x-4}{3x-2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2\cdot(3x-2)-(2x-4)\cdot 3}{(3x-2)^2} = \dfrac{6x-4-(6x-12)}{(3x-2)^2} = \dfrac{8}{(3x-2)^2}$.

d) $f(x) = \dfrac{-4}{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(-4)'\cdot x - (-4)\cdot(x)'}{x^2} = \dfrac{0\cdot x - (-4)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{4}{x^2}$.

e) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{2x+3} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x\cdot(2x+3)-\left(x^2-2\right)\cdot 2}{(2x+3)^2}=\dfrac{2x^2+6x+4}{(2x+3)^2}$.

f) $f(x)=\dfrac{4x+2}{5x^2-3x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{4\cdot\left(5x^2-3x\right)-(4x+2)\cdot(10x-3)}{\left(5x^2-3x\right)^2}=\dfrac{-20x^2-20x+6}{\left(5x^2-3x\right)^2}$.

g) $f(x)=\dfrac{4x^3}{5x^2-4x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{12x^2\cdot\left(5x^2-4x\right)-4x^3\cdot(10x-4)}{\left(5x^2-4x\right)^2}=\dfrac{20x^4-32x^3}{\left(5x^2-4x\right)^2}$.

Se podría simplificar algo más: $f'(x)=\dfrac{20x^4-32x^3}{\left(5x^2-4x\right)^2}=\dfrac{20x^4-32x^3}{x^2(5x-4)^2}=\dfrac{20x^2-32x}{(5x-4)^2}$.

h) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-3} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{4x\cdot\left(x^2-3\right)-2x^2\cdot 2x}{\left(x^2-3\right)^2}=\dfrac{-12x}{\left(x^2-3\right)^2}$.

16. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=3\sqrt{x}$; b) $f(x)=\sqrt{5x-3}$; c) $f(x)=\sqrt{x^2+5x}$; d) $f(x)=x\cdot\sqrt{x}$.

<u>Solución</u>:

La derivada de $y=\sqrt{f(x)}$ es $y'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

a) $f(x)=3\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$.

b) $f(x)=\sqrt{5x-3} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(5x-3)'}{2\sqrt{5x-3}}=\dfrac{5}{2\sqrt{5x-3}}$.

c) $f(x)=\sqrt{x^2+5x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\left(x^2+5x\right)'}{2\sqrt{x^2+5x}}=\dfrac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x}}$.

d) $f(x)=x\cdot\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=(x)'\cdot\sqrt{x}+x\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=\sqrt{x}+x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ → Operando: $f'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

17. Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones y simplifica la expresión resultante. Indica los puntos en los que la derivada vale 0.

a) $f(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$ b) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$; c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; d) $f(x)=\sqrt[3]{8-x^2}$.

<u>Solución</u>:

a) $f'(x)=\dfrac{8x-4x^3}{2\sqrt{4x^2-x^4}}=\dfrac{4x-2x^3}{\sqrt{4x^2-x^4}}=\dfrac{2x\left(2-x^2\right)}{x\cdot\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{2\left(2-x^2\right)}{\sqrt{4-x^2}}$.

La derivada se hace 0 cuando $\Rightarrow 2-x^2=0 \Rightarrow x=-\sqrt{2};\ x=\sqrt{2}$.

b) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-(x-1)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\dfrac{\dfrac{2x-x+1}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{x+1}{2x\sqrt{x}}$.

La derivada no se anula en ningún punto, pues, aunque el numerador $x+1=0$ si $x=-1$, en ese punto la función no está definida; luego no es derivable en $x=-1$.

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} \Rightarrow$

$$f'(x)=\frac{\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot x-\sqrt{1-x^2}\cdot 1}{x^2}=\frac{\dfrac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\frac{\dfrac{-x^2-\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}}{x^2}=\frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

No se anula en ningún caso.

d) $f(x)=\sqrt[3]{8-x^2} \Rightarrow f(x)=\left(8-x^2\right)^{1/3} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{3}\left(8-x^2\right)^{-2/3}\cdot(-2x)=\dfrac{-2x}{3\cdot\sqrt[3]{\left(8-x^2\right)^2}}$.

La derivada se anula en $x=0$.

18. a) Aplicando la definición de derivada (paso a paso) halla $f'(3)$, siendo $f(x)=\sqrt{x+1}$.
b) Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x=3$.
Haz una representación gráfica de la función y la tangente.
Solución:

a) $f'(3)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{4+h}-2\right)\left(\sqrt{4+h}+2\right)}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}=$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\left(\sqrt{4+h}+2\right)}=\dfrac{1}{2+2}=\dfrac{1}{4}$.

Nota: Aplicando las reglas de derivación:

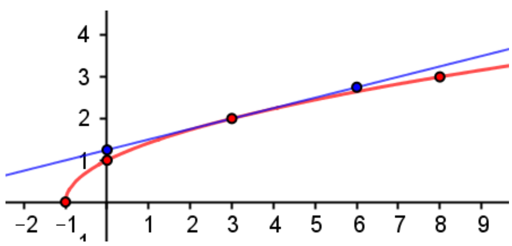
$$f(x)=\sqrt{x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow f'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3+1}}=\frac{1}{4}.$$

b) La ecuación de la recta tangente es $y-f(3)=f'(3)(x-3)$.

Como $f(3)=\sqrt{3+1}=2$ y $f'(3)=\dfrac{1}{4}$, la recta es:

$$y-2=\frac{1}{4}\cdot(x-3)\Rightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}.$$

La gráfica pedida es la adjunta.
Algunos puntos de la función: (–1, 0); (0, 1); (3, 2); (8, 3).
Puntos de la tangente: (0, 5/4); (3, 2); (6, 11/4).



19. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=3^{2x}$; b) $f(x)=e^{5x}$; c) $f(x)=e^{-3x^2+2x}$; d) $f(x)=x\cdot e^x$.

Solución:

Si $F(x)=a^{f(x)}$, $a>0 \Rightarrow F'(x)=f'(x)\cdot a^{f(x)}\ln a$.

Si $F(x)=e^{f(x)} \Rightarrow F'(x)=f'(x)\cdot e^{f(x)}$.

a) $f(x)=3^{2x} \Rightarrow f'(x)=2\cdot 3^{2x}\cdot \ln 3$. (Posible error: *animarse* y operar: $f'(x)=6^{2x}\cdot \ln 3 \leftarrow$ Fatal).

b) $f(x)=e^{5x} \Rightarrow f'(x)=5e^{5x}$.

c) $f(x)=e^{-3x^2+2x} \Rightarrow f(x)=(-6x+2)\cdot e^{-3x^2+2x}$.

d) $f(x)=x\cdot e^x \Rightarrow f(x)=(x)'\cdot e^x+x\cdot\left(e^x\right)'=1\cdot e^x+x\cdot e^x=(1+x)\cdot e^x$.

20. Haz la derivada de las siguientes funciones y simplifica la expresión resultante.

a) $f(x)=e^{4x-5x^2}$; b) $f(x)=xe^{-x^2}$; c) $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x+1}$; d) $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{e^x}$.

Solución:

a) $f(x)=e^{4x-5x^2} \Rightarrow f'(x)=(4-10x)\cdot e^{4x-5x^2}$.

b) $f(x)=xe^{-x^2} \Rightarrow f'(x)=e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2}=\left(1-2x^2\right)e^{-x^2}$.

c) $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x+1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-e^{-x}(x+1)-e^{-x}}{(x+1)^2}=\dfrac{-e^{-x}(x+2)}{(x+1)^2}$.

d) $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{e^x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(2x+2)e^x-\left(x^2+2x\right)e^x}{\left(e^x\right)^2}=\dfrac{\left(2-x^2\right)e^x}{\left(e^x\right)^2}=\dfrac{2-x^2}{e^x}$.

21. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\log(2x)$; b) $f(x)=\log\left(x^3\right)$; c) $f(x)=\ln\left(5x^2+1\right)$; d) $f(x)=x\cdot\ln x$.

Solución:

Si $F(x)=\log_a(f(x)) \Rightarrow F'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\log_a e$.

Si $F(x)=\ln(f(x)) \Rightarrow F'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

a) $f(x)=\log(2x) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(2x)'}{2x}\log e=\dfrac{2}{2x}\log e=\dfrac{1}{x}\log e$.

b) $f(x)=\log\left(x^3\right) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\left(x^3\right)'}{x^3}\log e=\dfrac{3x^2}{x^3}\log e=\dfrac{3}{x}\log e$.

c) $f(x)=\ln\left(5x^2+1\right) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\left(5x^2+1\right)'}{5x^2+1}=\dfrac{10x}{5x^2+1}$.

d) $f(x)=x\cdot\ln x \Rightarrow f'(x)=(x)'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'=1\cdot\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$.

22. Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones y simplifica la expresión resultante:

a) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; b) $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$; c) $f(x)=x(\ln(x))^2$; d) $f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\ln\left(3x^2+1\right)$.

Solución:

a) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \Rightarrow f(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{1/2}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{1}{2}\left(\ln(1-x)-\ln(1+x)\right)$

Derivando:

$$f´(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1+x-(1-x)}{(1-x)(1+x)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-2}{1-x^2}\right)=\frac{-1}{1-x^2}.$$

b) $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x} \Rightarrow f´(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln(x)}{x^2}=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2} \to$ se anula si $1-\ln(x)=0 \Rightarrow x=e$.

c) $f(x)=x(\ln(x))^2 \Rightarrow f´(x)=(\ln(x))^2+2x(\ln(x))\dfrac{1}{x}=\ln(x)\cdot(\ln(x)+2)$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\ln\left(3x^2+1\right) \Rightarrow f´(x)=-\dfrac{1}{x^2}\cdot\ln\left(3x^2+1\right)+\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{6x}{3x^2+1}=-\dfrac{1}{x^2}\cdot\ln\left(3x^2+1\right)+\dfrac{6}{3x^2+1}$.

23. (Optativo). Utilizando la definición de derivada obtén la función derivada de $f(x)=\sin x$.

Solución:

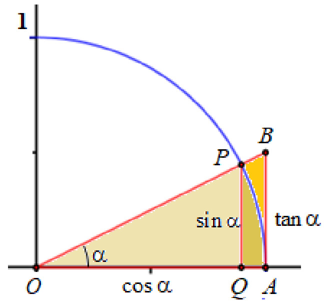
Si $f(x)=\sin x$, entonces:

$$f´(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\overset{(*)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{x+h+x}{2}\cdot\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\frac{h}{2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\overset{(**)}{=}\cos x\cdot 1=\cos x.$$

(*) Se ha aplicado la fórmula de la diferencia de senos: $\sin A-\sin B=2\cdot\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\sin\dfrac{A-B}{2}$.

(**) Que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=1$ se verá a continuación.



Para simplificar la notación se hace $\dfrac{h}{2}=\alpha$, cumpliéndose que si $h\to 0$ también $\alpha\to 0$. Con esto, hay que demostrar que $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$.

Para ello, en el dibujo adjunto, cuyo arco se ha trazado con radio 1, se consideran: (1) el triángulo de vértices *OPQ*; (2) el sector circular *OPA*, de amplitud α > 0, en radianes; (3) el triángulo *OBA*. Sus áreas se relacionan como sigue:

$$S_{OPQ}\le S_{OPA}\le S_{OBA} \to \text{(luego, sus áreas cumplen):}\ \frac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{2}\le\frac{1\cdot\alpha}{2}\le\frac{1\cdot\tan\alpha}{2} \Rightarrow$$

$\cos\alpha\cdot\sin\alpha \le \alpha \le \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ → dividiendo por $\sin\alpha$ → $\cos\alpha \le \dfrac{\alpha}{\sin\alpha} \le \dfrac{1}{\cos\alpha}$ → como los denominadores son menores o iguales que 1 (y positivos), sus recíprocos cumplen:

$$\frac{1}{\cos\alpha} \ge \frac{\sin\alpha}{\alpha} \ge \cos\alpha .$$

Pasando al límite cuando $\alpha \to 0$ se tiene que: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{1}{\cos\alpha} \ge \lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} \ge \lim\limits_{\alpha\to 0}\cos\alpha$.

En esta doble desigualdad, el primer y el tercer límite valen 1: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos 0} = 1$.

Por tanto:

$$1 \ge \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} \ge 1 \Rightarrow \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1 .$$

Nota: Podría estudiarse también el caso del límite cuando $\alpha \to 0^-$. La cuestión se solventa utilizando valores absolutos. (La lectora o el lector interesado podría intentarlo).

24. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sin(3-2x)$; b) $f(x)=\sin\left(x^3\right)$; c) $f(x)=(\sin x)^3$; d) $f(x)=3x\cdot(\sin x)$;

e) $f(x)=\cos(3-2x)$; f) $f(x)=\cos^2 x$; g) $f(x)=\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$; h) $f(x)=\dfrac{\cos x}{2}$.

Solución:

Si $F(x)=\sin(f(x)) \Rightarrow F'(x)=f'(x)\cdot\cos(f(x))$.

Si $F(x)=\cos(f(x)) \Rightarrow F'(x)=-f'(x)\cdot\sin(f(x))$.

a) $f(x)=\sin(3-2x) \Rightarrow f'(x)=-2\cdot\cos(3-2x)$.

b) $f(x)=\sin\left(x^3\right) \Rightarrow f(x)=3x^2\cdot\cos\left(x^3\right)$.

c) $f(x)=(\sin x)^3$ → es una potencia: $f'(x)=3\cdot(\sin x)^{3-1}\cdot(\sin x)' = 3\cdot(\sin x)^2\cdot(\cos x)$.

d) $f(x)=3x\cdot(\sin x) \Rightarrow f'(x)=(3x)'\cdot(\sin x)+3x\cdot(\sin x)' = 3\sin x + 3x\cos x$.

e) $f(x)=\cos(3-2x) \Rightarrow f'(x)=-(3-2x)'\cdot\sin(3-2x) = -(-2)\cdot\sin(3-2x) = 2\sin(3-2x)$.

f) $f(x)=\cos^2 x \to f(x)=\cos^2 x=(\cos x)^2 \Rightarrow$

$$f'(x)=2\cdot(\cos x)^{2-1}(\cos x)' = 2\cdot(\cos x)\cdot(-\sin x) = -2\sin x\cos x .$$

g) $f(x)=\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) \Rightarrow f'(x)=-\left(\dfrac{x}{2}\right)'\cdot\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

h) $f(x)=\dfrac{\cos x}{2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2}(\cos x)' = -\dfrac{1}{2}\sin x$.

25. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\tan\left(x^2\right)$; b) $f(x)=\left(\tan x\right)^2$; c) $f(x)=\dfrac{1}{\tan x}$; d) $f(x)=3x\cdot\left(\tan x\right)$;

<u>Solución</u>:

Recuerda: $f(x)=\tan\left(g(x)\right) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{g'(x)}{\cos^2\left(g(x)\right)}=g'(x)\cdot\left(1+\tan^2\left(g(x)\right)\right)$.

a) $f(x)=\tan\left(x^2\right) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x}{\cos^2\left(x^2\right)}=2x\cdot\left(1+\tan^2\left(x^2\right)\right)$.

b) $f(x)=\left(\tan x\right)^2 \Rightarrow f'(x)=2\tan x\cdot\left(1+\tan^2 x\right)$.

c) (Este apartado ya se hizo en el Ejercicio 23; aquí se completa su estudio).

$$f(x)=\frac{1}{\tan x} \Rightarrow f'(x)=\frac{-\left(\tan x\right)'}{\left(\tan x\right)^2}=-\frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}=-1-\text{cotan}^2 x \rightarrow$$

$$f'(x)=-1-\text{cotan}^2 x=-1-\frac{\left(\cos x\right)^2}{\left(\sin x\right)^2}=\frac{-\left(\sin x\right)^2-\left(\cos x\right)^2}{\left(\sin x\right)^2}=-\frac{1}{\left(\sin x\right)^2}.$$

De otra forma:

$$f(x)=\frac{1}{\tan x}=\frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow f'(x)=\frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\left(\sin x\right)^2}=\frac{-\left(\left(\sin x\right)^2+\left(\cos x\right)^2\right)}{\left(\sin x\right)^2}=-\frac{1}{\left(\sin x\right)^2}.$$

d) $f(x)=3x\cdot\left(\tan x\right) \Rightarrow f'(x)=3\left(\tan x\right)+3x\cdot\left(1+\tan^2 x\right)$.

26. Comprueba si las siguientes funciones son derivables en los puntos *x* = 0, *x* = 1 y *x* = 2. Si no lo son, indica el motivo. A partir de la función derivada, halla, si existe, el valor de la derivada en los puntos de abscisa *x* = –1, 0, 1, 2 y 3.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{si } x\le 0 \\ x & \text{si } x>0 \end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases} -x+2 & \text{si } x<1 \\ x^2 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x\le 2 \\ x-1 & \text{si } x>2 \end{cases}$.

Haz la representación gráfica de cada función y confirma el resultado.

<u>Solución</u>:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{si } x\le 0 \\ x & \text{si } x>0 \end{cases}$.

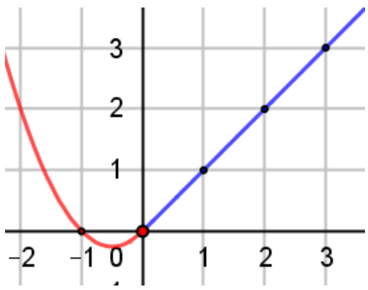
Las funciones polinómicas (parábola y recta) que intervienen en la definición son continuas y derivables. El único punto que presenta dificultades es *x* = 0. En ese punto hay que estudiar la continuidad y derivabilidad.

<u>Continuidad</u>.

La función será continua en *x* = 0 cuando los límites laterales en ese punto sean iguales:

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2+x\right)=0$;

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$.



La función es continua.

<u>Derivabilidad</u>.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x>0 \end{cases}.$$

Las derivadas laterales en *x* = 0, son iguales: $f'(0^-)=2\cdot 0+1=1$; $f'(0^+)=1$.

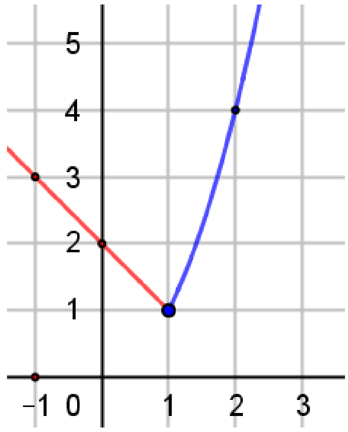
La función es derivable en $x = 0$; y en todo **R**.
El valor de la derivada en los puntos de abscisa $x = -1, 0, 1, 2$ y 3 es:

$$f'(-1)=2\cdot(-1)+1=-1;\ f'(0)=1;\ f'(1)=1;\ f'(2)=1;\ f'(3)=1.$$

Como puede observarse, su gráfica es continua y no tiene *picos*; el cambio de la curva a la recta se da sin cambios bruscos, con suavidad.

b) $f(x)=\begin{cases} -x+2 & \text{si } x<1 \\ x^2 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}.$

Las funciones (recta y parábola) que intervienen en la definición son continuas y derivables. El único punto que presenta dificultades es $x = 1$. En ese punto hay que estudiar la continuidad y derivabilidad.



Continuidad.
La función será continua en $x = 1$ cuando los límites laterales en ese punto sean iguales:
Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(-x+2)=-1+2=1;$
Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^2=1.$
La función es continua.
Derivabilidad.

$$f'(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x<1 \\ 2x & \text{si } x>1 \end{cases}.$$

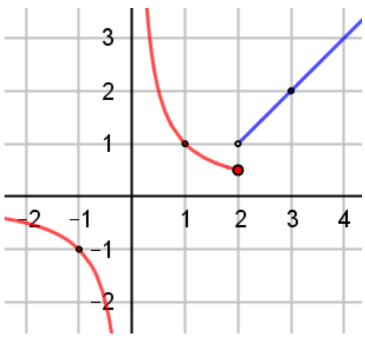
No es derivable en $x = 1$. Las derivadas laterales no son iguales: $f'(1^-)=-1;\ f'(1^+)=2\cdot 1=2.$
Para cualquier otro valor de $x \in$ **R** la función es derivable.
El valor de la derivada en los puntos de abscisa $x = -1, 0, 1, 2$ y 3 es:

$$f'(-1)=-1;\ f'(0)=-1;\ f'(1) \text{ no existe};\ f'(2)=2\cdot 2=4;\ f'(3)=6.$$

Como puede observarse, su gráfica es continua, pero tiene un *pico* en $x = 1$, en donde no es derivable.

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x\leq 2 \\ x-1 & \text{si } x>2 \end{cases}.$

La función $f_1(x)=\dfrac{1}{x}$ no está definida en $x = 0$. Por tanto, en ese punto no es continua ni derivable.
En los demás puntos de su dominio es continua y derivable.
La función $f_2(x)=x-1$ es continua y derivable siempre.
Por tanto, el único punto que hay que estudiar es $x = 2$.
Continuidad.
La función será continua en $x = 2$ cuando los límites laterales en ese punto sean iguales:
Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2};$
Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x-1)=2-1=1.$



La función no es continua en ese punto. Por tanto, tampoco es derivable.
Su derivada es:

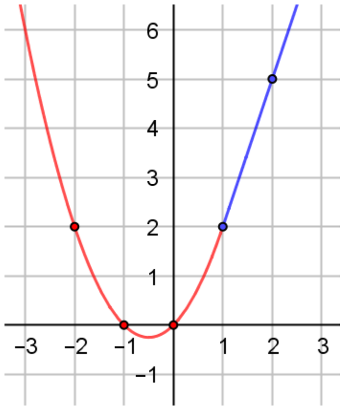
$$f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x<2 \\ 1 & \text{si } x>2 \end{cases}.$$

El valor de la derivada en los puntos de abscisa $x = -1$, 0, 1, 2 y 3 es:
$f'(-1)=-1$; $f'(0)$ no existe; $f'(1)=-1$; $f'(2)$ no existe; $f'(3)=1$.

Como puede observarse, su gráfica no está definida en $x = 0$ y no es continua en $x = 2$. En esos puntos no es derivable.

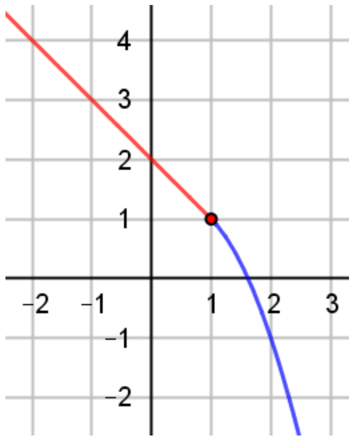
27. Halla el valor que debe tomar a para que sea continua la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x<1 \\ 3x-a & x\ge 1 \end{cases}$.

Justifica tu resultado haciendo una representación gráfica de $f(x)$.
¿La función obtenida será derivable en $x = 1$?
Solución:
Como las funciones (parábola y recta) que intervienen en la definición son continuas y derivables, el único punto que presenta dificultades es $x = 1$, donde se unen, o no, sus gráficas.
Será continua en $x = 1$ cuando los límites laterales en ese punto sean iguales:
Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+x\right)=1+1=2$;
Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(3x-a\right)=3-a$.
Como deben ser iguales: $2=3-a \Rightarrow a = 1$.
Su gráfica es la adjunta.



Derivada. Salvo en $x = 1$:
$$f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & x<1 \\ 3 & x>1 \end{cases}$$
Como $f'(1^-)=3=f'(1^+)$, la función obtenida es derivable en $x = 1$.

28. ¿Existe algún valor del parámetro a que haga que la función $f(x)=\begin{cases} -x+2 & \text{si } x\le 1 \\ ax^2+x+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$ sea derivable en $x = 1$?
Solución:
Hay que exigir la continuidad en $x = 1$. Para ello sus límites laterales deben ser iguales.
Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-x+2\right)=-1+2=1$;
Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(ax^2+x+1\right)=a+2$.
Serán iguales si $1=a+2 \Rightarrow a=-1$
Luego, la función continua es, $f(x)=\begin{cases} -x+2 & \text{si } x\le 1 \\ -x^2+x+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$.
Derivando:
$$f'(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x<1 \\ -2x+1 & \text{si } x>1 \end{cases}.$$
Como $f'(1^-)=-1$ y $f'(1^+)=-2\cdot 1+1=-1 \Rightarrow$ para $a = -1$, la función dada es derivable.
Su gráfica, para $a = -1$, es la adjunta.



29. ¿Existe algún valor del parámetro *a* que haga que la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le 1 \\ ax+2 & \text{si } x>1 \end{cases}$ sea derivable en *x* = 1?

<u>Solución</u>:

Como condición necesaria, la función debe ser continua en *x* = 1. Para ello, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

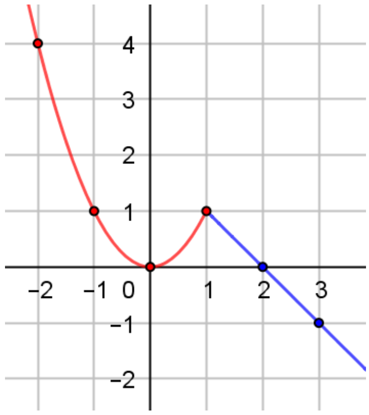
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2=1;\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(ax+2\right)=a+2$$

Por tanto, $1=a+2\Rightarrow a=-1$.

Para *a* = –1, $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le 1 \\ -x+2 & \text{si } x>1 \end{cases}$.

Su derivada es: $f(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x<1 \\ -1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

Como $f'(1^-)=2$ y $f'(1^+)=-1$ no son iguales $\Rightarrow$ la función dada no es derivable en *x* = 1 para ningún valor de *a*.



La gráfica de la función, para *a* = 1, es la adjunta.
Aunque es continua, como presenta un pico en *x* = 1, no es derivable

30. Calcula, si existen, los valores de *a* y *b* para que $f(x)=\begin{cases} x^2+a, & \text{si } x\le 2 \\ -x^2+bx-9, & \text{si } x>2 \end{cases}$ sea derivable en todo **R**.

<u>Solución</u>:

Por separado, cada una de las funciones que intervienen son continuas y derivables en todo **R**. (Observa que se trata de dos parábolas).
El único punto que presenta dudas es *x* = 2, donde las funciones se suceden.
<u>Continuidad</u>: los límites laterales deben ser iguales.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(x^2+a\right)=4+a;\qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(-x^2+bx-9\right)=-13+2b.$$

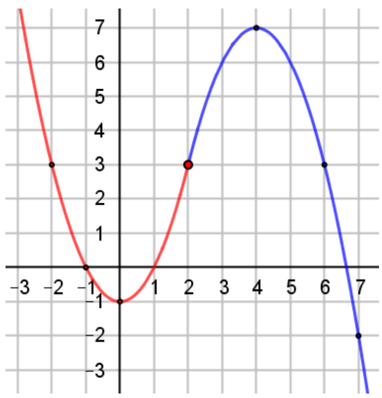
Debe cumplirse que $4+a=-13+2b$.

<u>Derivabilidad</u>: las derivadas laterales deben ser iguales $\to$ $f'(x)=\begin{cases} 2x, & \text{si } x<2 \\ -2x+b, & \text{si } x>2 \end{cases}$ $\to$

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(2x\right)=4;\qquad \lim_{x\to 2^+} f'(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(-2x+b\right)=-4+b.$$

Debe cumplirse que $4=-4+b\Rightarrow b=8$.
Sustituyendo en $4+a=-13+2b\ \Rightarrow\ 4+a=3\Rightarrow a=-1$.

La función derivable es: $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & \text{si } x\le 2 \\ -x^2+8x-9, & \text{si } x>2 \end{cases}$.



Su gráfica es la adjunta. Observa que el tránsito de una curva a otra se da con suavidad.

<u>Observación</u>: Aunque posiblemente ya lo he advertido, desde el punto de vista gráfico puede decirse que:

- La continuidad se caracteriza porque la sucesión de puntos de la curva no se interrumpe: no hay saltos.
- La derivabilidad (que exige la continuidad) se caracteriza porque la línea que describe la curva es suave: no hay picos.