TEMA 13. FUNCIONES REALES

1. CONCEPTO DE FUNCIÓN

Una función entre dos conjuntos X e Y es una relación definida de tal manera que a cada elemento de X le corresponde exactamente otro elemento (uno y solo uno) de Y.
Esto es, a cada elemento x_i de X le corresponde un único elemento y_i de Y. Esto genera un conjunto de pares de la forma $(x_i,\ y_i)$, lo que indica que a x_i le corresponde y_i; si la función se denota mediante la letra *f*, se escribiría $f(x_i)=y_i$. En general, $y=f(x)$.

Ejemplos:
a) La regla: "a cada número real se le asocia su mitad", es clara y unívoca: define una función. Así, a 4 le corresponde 2, y solo el 2. Igualmente, a 7 le corresponde 3,5; a –8, –4; y, en general, a *x* le corresponde *x*/2. Los pares correspondientes son: (4, 2); (7, 3,5); (–8, –4); y, en general (*x*, *x*/2). Suele escribirse $f(x)=\frac{x}{2}$; o $y=\frac{x}{2}$.

b) La regla: "a cada número natural se le asocia uno de sus divisores", es clara, pero no unívoca. Por ejemplo, al número 12, se le podría asociar el 6, pero también el 4, o el 2, pues los tres números son divisores de 12. Una regla dada de este modo no define una función.

- Una función suele establecerse entre conjuntos numéricos: tanto la *x* como la *y* suelen ser números reales. Esto es, el conjunto inicial (en el que toma valores la variable independiente, *x*) es **R**; y el conjunto final (en el que toma valores la variable dependiente, *y*) también es **R**.

Estas funciones se llaman "reales de variable real".
Esquemáticamente se indican así:
$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, esto es: $x\to\ y=f(x)$
Para determinar qué número, *y*, le corresponde a un *x* dado, hay que calcular el valor numérico de la expresión $y=f(x)$.
Observación: Las letras que designan las funciones o las variables no tienen que ser siempre *f*, *x* e *y*. Con frecuencia la variable independiente se designará por *t*, sobre todo si los fenómenos que se estudian dependen del tiempo. Igualmente, las funciones pueden designarse por letras que recuerden el fenómeno que se está estudiando: *v*, para la velocidad; *C*, para costes; *G*, para ganancia; …

- Las funciones reales suelen darse mediante una fórmula o expresión algebraica.

Ejemplo:
Sean $f(x)=x^2-3x$ y $g(x)=\sqrt{3-x}$. (También se escribe: $y=x^2-3x$; $y=\sqrt{3-x}$).
Los valores correspondientes a *x* = –1, *x* = 1 o *x* = 4, para esas funciones son:

x	–1	1	4
$f(x)=x^2-3x$	$f(-1)=(-1)^2-3\cdot(-1)=4$	$f(1)=(1)^2-3\cdot(1)=-2$	$f(4)=(4)^2-3\cdot(4)=4$
$g(x)=\sqrt{3-x}$	$g(-1)=\sqrt{3-(-1)}=2$	$g(1)=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$	$g(4)=\sqrt{3-4}=\sqrt{-1}$ (?)

Los pares correspondientes a la función *f* son: (–1, 4); (1, –2); (4, 4).
Los pares correspondientes a la función *g* son: (–1, 2); $(1,\ \sqrt{2})$. Para *x* = 4, la función *g* no está definida. Esto significa que *x* no puede tomar el valor 4; ni ningún valor mayor que 3.

Dominio y recorrido

Como se ha visto en el ejemplo anterior para la función $g(x)=\sqrt{3-x}$, la variable independiente x no siempre puede tomar cualquier número real. (En este caso, como ya se ha indicado, x no puede tomar ningún valor mayor que 3, pues si $x > 3$, $\sqrt{3-x}$ no tiene sentido: no está definida).

Dominio de definición de una función *f* es el conjunto de los x para los cuales existe el valor de $f(x)$. El dominio de una función, $\text{Dom}(f)$, es un subconjunto de **R**: $\text{Dom}(f) \subset \mathbf{R}$.

- Cuando se estudia una función, lo primero que suele hacerse es determinar su dominio. Para ello:

1. Hay que estudiar la expresión algebraica que define la función. Así, hay que tener en cuenta que: no existe la división por 0; no existe la raíz cuadrada de números negativos; tampoco el logaritmo de los números menores o iguales que 0; … En fin, una función no está definida cuando las operaciones algebraicas generen resultados absurdos. (Las calculadoras alertan con mensaje de ERROR).
2. Hay que tener en cuenta el contexto del problema. Así, con frecuencia, la x no puede tomar valores negativos o no puede tomar valores fraccionarios (no puede producirse un número negativo de artículos; una longitud tampoco puede ser negativa; ni venderse medio ordenador; …).

Advertencia: Como las raíces cuadradas tienen dos soluciones, para que la expresión defina una función solo se elegirá el valor que se corresponda con el signo que lleve la raíz: positivo si la raíz lleva signo positivo, $f(x)=+\sqrt{(...)}=\sqrt{(...)}$; negativo, si la raíz lleva signo negativo $f(x)=-\sqrt{(...)}$.

La imagen o recorrido de una función *f*, $\text{Im}(f)$ o $\text{Rec}(f)$, es el conjunto de valores que toma $f(x)$ cuando x pertenece al dominio; es, por tanto, el conjunto de resultados.

El recorrido también puede verse restringido por la naturaleza del problema. Es posible que el resultado no admita respuestas negativas o fraccionarias.

Ejemplos:

a) La función $f(x)=x^2-4$ tiene sentido para todo x. Por tanto, $\text{Dom}(f) = \mathbf{R}$.
Los valores que toma $f(x)$ son siempre mayores o iguales que –4: $\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$.

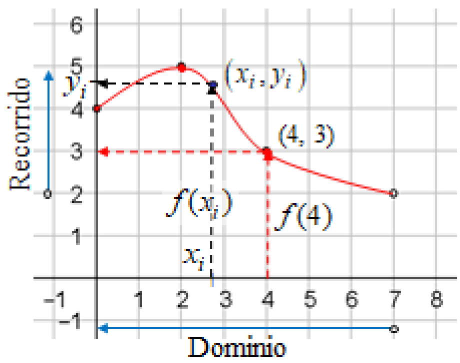
b) $g(x)=\sqrt{x^2-9}$ no está definida en el intervalo (–3, 3), pues si $-3 < x < 3$ el radicando es negativo. Su recorrido serán siempre valores positivos (así lo indica el signo positivo de la raíz).
Por tanto: $\text{Dom}(g) = \mathbf{R} - (-3, 3) = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$; $\text{Im}(g) = [0, +\infty)$.

c) $h(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ no está definida cuando $x = 1$, que es la solución de $x - 1 = 0$: $\text{Dom}(h) = \mathbf{R} - \{1\}$.
Esta función puede tomar valores infinitamente grandes, tanto positivos como negativos, pero nunca el valor 2 (compruébalo). Luego, $\text{Im}(h) = \mathbf{R} - \{2\}$.

d) $j(x)=\dfrac{8}{x^2+1}$ está definida para todo valor de x, pues el denominador nunca se hace 0. Su dominio es **R**.
El resultado de la operación $\dfrac{8}{x^2+1}$ siempre es positivo. El valor máximo que puede tomar es 8, para $x = 0$; en los demás casos el denominador es mayor que 1. Por tanto, $\text{Im}(j) = (0, 8]$.

Nota: La determinación del recorrido puede presentar dificultades; por eso, con frecuencia, no suele preguntarse. No obstante, vale lo dicho arriba, hay que saber descubrir resultados sin sentido.

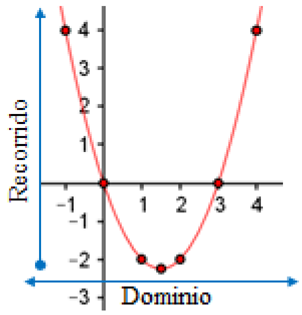
Idea gráfica de una función



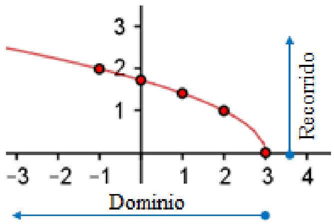
Las funciones de variable real suelen representarse en el plano cartesiano por una línea. Todos los puntos de esa línea corresponden a pares de números relacionados entre sí por la función; cada punto (x_i, y_i) de la gráfica indica que a x_i le corresponde y_i. Esto es, si la función se denota mediante la letra *f*, se cumple que $f(x_i) = y_i$.

- Los valores de *x* del dominio siempre parten del eje horizontal, el eje de abscisas: eje *OX*.
- El recorrido, los valores que toma $f(x)$, se indican en el eje vertical, el eje de ordenadas: eje *OY*.

Ejemplo:



a) La función $f(x) = x^2 - 3x$ determina los siguientes pares:
(–1, 4); (0, 0); (1, –2); (2, –2); (3, 0); (4, 4).
Uniendo esos puntos se obtiene la parábola de la figura adjunta.
Puede observarse que el punto más bajo, el vértice , $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$, tiene ordenada –9/4. Esto indica que el recorrido de la función es el intervalo [–9/4, +∞).



b) Algunos pares de la función $g(x) = \sqrt{3 - x}$ son:
(–1, 2); $(0, \sqrt{3})$; $(1, \sqrt{2})$; (2, 1), (3, 0).
Representando esos puntos y uniéndolos se obtiene la gráfica adjunta (es la rama positiva de otra parábola, pero de eje horizontal).

<u>Funciones dadas por gráficas</u>
Con frecuencia, las relaciones (las funciones) se dan directamente por una gráfica.

Así, en el gráfico adjunto se da la evolución de la cotización (en euros) de las acciones del Banco Santander durante el año 2020, que es el dominio. El recorrido determina el precio de la acción a lo largo de ese año: intervalo [1,54, 3,96]; entre el mínimo (1,54 €, 23/09/2020) y el máximo (3,96 €, 12/02/2020).
La gráfica permite obtener el precio de la acción para cualquier día del año; así, a primeros de marzo, las acciones del Santander cotizaban 3,25 €, aproximadamente.

<u>Algunas sugerencias para dibujar bien la gráfica de una función</u>
Una gráfica debe proporcionar una información visual clara. Para conseguirlo:
1) Traza bien los ejes de coordenadas. El eje horizontal, eje *OX*, es el de la variable independiente ; el eje vertical, eje *OY*, es el de la variable dependiente. (Si las variables *x* e *y* se denominan de otra forma, indícalo). El rango de cada variable (el dominio y recorrido) debe quedar claro.
2) Decide la escala de cada eje (no tienen por qué ser iguales: razón 1 a 1). Marca en cada eje algunos valores, los que necesites, pero mantén en cada eje la proporción en las distancias.
3) Procura que tenga un tamaño adecuado, el necesario que permita indicar algunos elementos de interés. (En los dibujos pequeños se mezcla todo; en los grandes, se derrocha papel). Pueden servirte de referencia los hechos en este tema, así como las sugerencias de carácter informático que se harán.

2. ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES

Al representar o interpretar una función, aparte de considerar las variables que se relacionan y las escalas de los ejes, conviene señalar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus valores máximos y mínimos, la continuidad, las posibles simetrías y periodicidades, las asíntotas…
Estos conceptos pueden definirse como sigue.

Crecimiento y decrecimiento

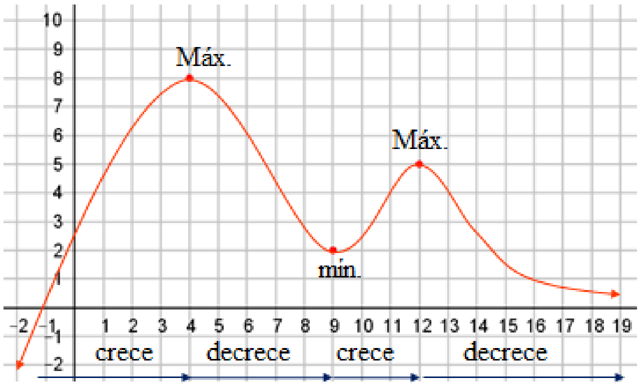
- $f(x)$ es <u>creciente</u> en un punto $x = a$ $\Leftrightarrow$ $f(a-h) \le f(a) \le f(a+h)$, para h pequeño y positivo.
- $f(x)$ es <u>decreciente</u> en un punto $x = a$ $\Leftrightarrow$ $f(a-h) \ge f(a) \ge f(a+h)$.

El crecimiento y decrecimiento son cuestiones puntuales, que pueden extenderse a un intervalo.

Máximos y mínimos

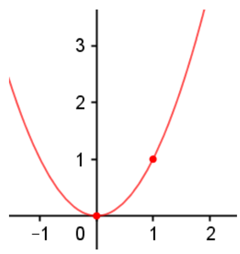
- $f(x)$ tiene un <u>máximo</u> en un punto $x = a$ $\Leftrightarrow$ $f(a-h) \le f(a) \ge f(a+h)$, $h > 0$ y pequeño.
- $f(x)$ tiene un <u>mínimo</u> en un punto $x = a$ $\Leftrightarrow$ $f(a-h) \ge f(a) \le f(a+h)$.

Los máximos y mínimos pueden ser locales (relativos): el valor de la función en ese punto es mayor o menor que en todos los puntos cercanos. El máximo (o mínimo) será absoluto cuando el valor en ese punto sea mayor (o menor) que en los demás puntos del dominio. En la figura adjunta hay dos máximos; el primero es absoluto, punto (4, 8). Hay un mínimo local, punto (9, 2). No hay mínimo absoluto.



Ejemplos:

a) Para ver que la función $f(x) = x^2$ es creciente en $x = 1$, hay que comprobar que
$f(1-h) < f(1) < f(1+h)$.
En efecto, para $h > 0$ y pequeña,
$f(1-h) = (1-h)^2 < 1$, $f(1) = 1^2 = 1$ y $f(1+h) = (1+h)^2 > 1$.



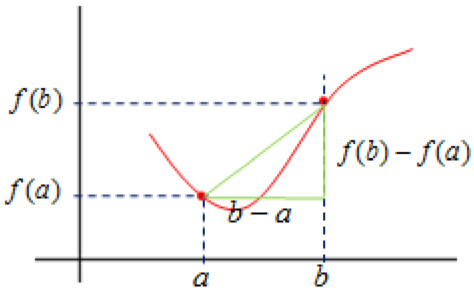
b) Análogamente, la función tiene un mínimo en $x = 0$, pues
$f(-h) = (-h)^2 > f(0) = 0 < f(h) = h^2$.

Tasa de variación media

La tasa de variación media indica el ritmo de crecimiento o de decrecimiento de una función en un intervalo $[a, b]$. Se define como:

$$TVM[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

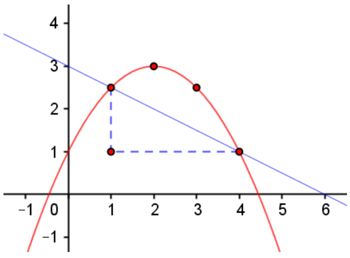
Esta expresión da el aumento o disminución medio (unitario, por unidad) de la función $f(x)$, cuando la x pasa de valer a a valer b.
El valor de la tasa de variación media es el de la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



(La tasa de variación media puede inducir a error, pues supone que la función varía uniformemente, comportándose rectilíneamente en el intervalo de referencia; no obstante, si se conoce esa tasa se tiene un dato de cómo se comporta la función en ese intervalo).

Ejemplo:

La tasa de variación media de la función $f(x) = -0,5x^2 + 2x + 1$ en el intervalo [1, 4] es: $TVM[1,\ 4] = \dfrac{f(4) - f(1)}{4-1}$.



Como $f(1) = 2,5$ y $f(4) = 1$, se tiene: $TVM[1,\ 4] = \dfrac{1-2,5}{3} = -\dfrac{1}{2}$.

Ese valor indica que, en el intervalo [1, 4], la función decrece a un ritmo medio de 0,5 por unidad. (Observa que realmente no es así: la función, al pasar de 1 a 2 crece 0,5; entre 2 y 3, decrece 0,5; y al pasar de 3 a 4, decrece 1,5. Por tanto la media de sus variaciones es $TVM[1,\ 4] = \dfrac{0,5-0,5-1,5}{3} = -0,5$).

Continuidad

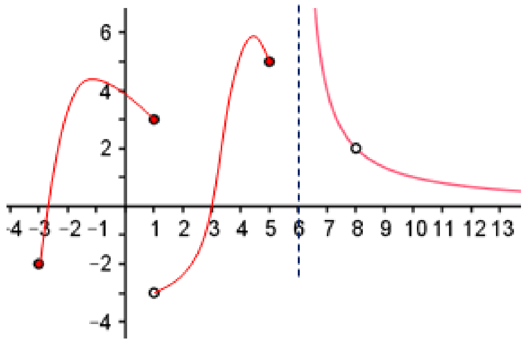
Una función es continua cuando a una variación pequeña de *x* le corresponde una variación pequeña de $f(x)$: una función *f* es continua cuando puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. En todos los puntos en los que *f* no está definida se da una discontinuidad; también hay discontinuidad cuando la gráfica da un salto.

(El concepto de continuidad y todos los que estamos describiendo en este apartado se precisarán matemáticamente en los próximos temas).

→ La función representada a la derecha es continua en los intervalos [–3, 1), (1, 5], (6, 8) y (8, +∞).

En *x* = –3, la continuidad es solo por la derecha; en *x* = 5, solo por la izquierda.

No es continua en el intervalo (–∞, –3) por no estar definida; en *x* = 1, por tener un salto; en el intervalo (5, 6) y en el punto *x* = 8, por no estar definida.



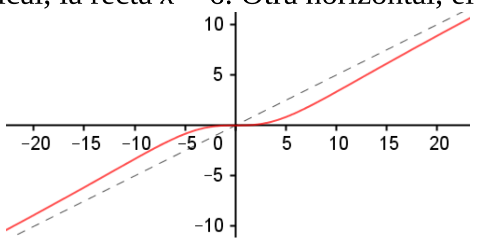
Asíntotas

Las asíntotas de una función son rectas hacia las cuales tiende a *pegarse* la gráfica de esa función. Pueden ser verticales, horizontales y oblicuas.

→ La función representada arriba tiene dos asíntotas. Una vertical, la recta *x* = 6. Otra horizontal, el eje de abscisas, recta *y* = 0.

→ La gráfica de la función representada a la derecha tiene una asíntota oblicua, la recta de ecuación $y = 0,5x$.

La gráfica de una función nunca corta a las asíntotas verticales; sí puede cortar a las horizontales y a las oblicuas.



Simetrías

- Funciones pares: son simétricas respecto del eje OY; cumplen que $f(-x) = f(x)$.

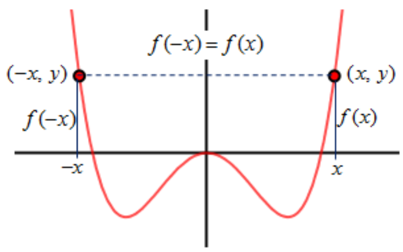
Ejemplos:

Son pares, por ejemplo, las funciones $f(x) = 0,2x^4 - x^2$ y $h(x) = x^2 + 3$.

En efecto: $f(-x) = 0,2(-x)^4 - (-x)^2 = 0,2x^4 - x^2 = f(x)$.

Igualmente: $h(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = h(x)$.

(Observa que la variable *x* va afectada, en ambos casos, por exponentes pares; la gráfica de la derecha es *f*).



- Funciones impares: son simétricas respecto del origen, que es el centro de simetría; cumplen que $f(-x) = -f(x)$.

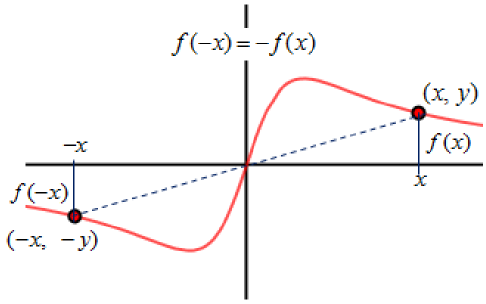
Ejemplos:

Son impares las funciones $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$ y $h(x) = 0,5x$.

En efecto: $f(-x) = \dfrac{3\cdot(-x)}{(-x)^2+1} = \dfrac{-3x}{x^2+1} = -\dfrac{3x}{x^2+1} = -f(x)$.

Igualmente: $h(-x) = 0,5\cdot(-x) = -0,5x = -h(x)$.

(La gráfica de la derecha es la de *f*).



Funciones periódicas

Una función es periódica de periodo *k* si, para todo *x*, se cumple que $f(x+k) = f(x)$; además, *k* es el menor número para el que se cumple dicha propiedad.

La gráfica de la función se repite en cada intervalo de amplitud *k*.

Ejemplo:

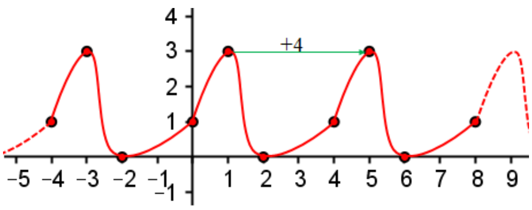
La función adjunta es periódica de periodo 4.

Cumple que $f(x+4) = f(x)$.

En particular:

$f(-3) = f(-3+4) = f(1)$; $f(1) = f(1+4) = f(5)$.

Puedes deducir que $f(x+4n) = f(x)$, para cualquier *n* entero. Así, podrían saberse, por ejemplo, los valores de $f(18)$ y $f(-11)$.



En efecto, como 18 = 2 + 16 = 2 + 4 · 4 $\Rightarrow f(18) = f(2+4\cdot 4) = f(2) = 0$.

Igualmente, como –11 = 1 – 3 · 4 $\Rightarrow f(-11) = f(1-3\cdot 4) = f(1) = 3$.

Funciones definidas a trozos

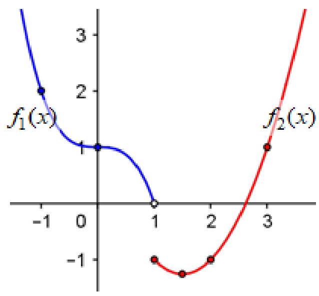
Una función puede venir definida mediante varias expresiones algebraicas, pudiendo determinarse como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } x \le a \\ f_2(x), & \text{si } x > a \end{cases}.$$

Se indica así que la función que actúa para los valores de $x \le a$ es $f_1(x)$, y para los valores de $x > a$ es $f_2(x)$.

Ejemplo:

La función $f(x) = \begin{cases} -x^3+1 & \text{si } x < 1 \\ x^2-3x+1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$, asocia a los números menores que 1, el valor $f_1(x) = -x^3+1$; y a los mayores o iguales que 1, los correspondientes mediante $f_2(x) = x^2-3x+1$.



Algunos pares de valores son:

- Para $x < 1$: (–1, 2), (0, 1), (1^-, 0^+) → 1^- indica un valor muy cerca de 1, pero menor que 1; 0^+ indica un valor muy próximo a 0, pero positivo.
- Para $x \ge 1$: (1, –1), (1,5, –1,25), (2, –1), (3, 1).

Su gráfica es la adjunta.

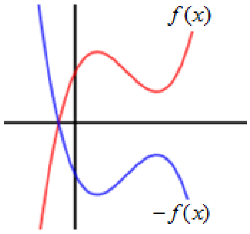
Puede observarse que la función no es continua en *x* = 1.

3. TRANSFORMACIONES DE UNA FUNCIÓN

A partir de la función $f(x)$ pueden deducirse el comportamiento de:

$-f(x)$, $|f(x)|$, $k+f(x)$, $k\cdot f(x)$, $f(x+k)$, $f(k\cdot x)$,

siendo k es un número real.



- La función $-f(x)$ cambia de signo todos los resultados de $f(x)$.

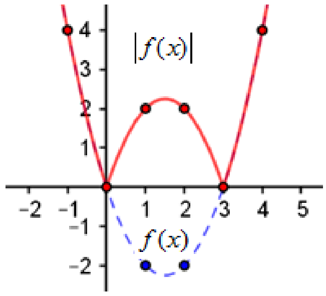
Las gráficas de $f(x)$ y de $-f(x)$ son simétricas respecto del eje *OX*.
Algebraicamente, si, por ejemplo,

$$f(x)=x^3-3x^2+2x+1 \Rightarrow -f(x)=-x^3+3x^2-2x-1.$$

- La función $|f(x)|$ cambia de signo todos los resultados negativos de $f(x)$; los resultados positivos los deja iguales. Su gráfica no puede aparecer por debajo del eje *OX*.

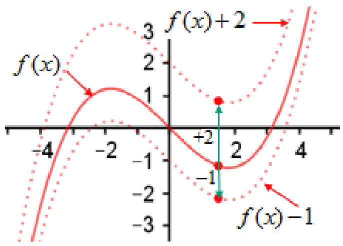
También puede definirse a trozos. Así: $|f(x)|=\begin{cases}-f(x), & \text{si } f(x)<0\\ f(x), & \text{si } f(x)\geq 0\end{cases}$.

Ejemplo:



Si $f(x)=x^2-3x \Rightarrow |f(x)|=\begin{cases}x^2-3x, & \text{si } x\leq 0\\ -x^2+3x, & \text{si } 0<x<3\\ x^2-3x, & \text{si } x\geq 3\end{cases}$.

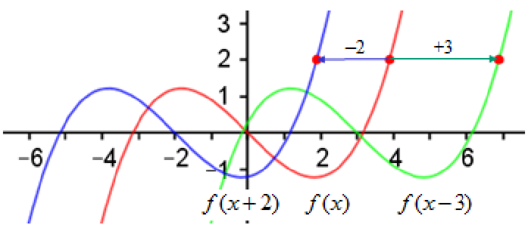
Para obtener esta expresión y su gráfica, lo más sencillo es representar $f(x)=x^2-3x$; y después *voltear* la parte negativa de la gráfica.
Los puntos que determinan los extremos de los intervalos de la función definida a trozos son las soluciones de la ecuación $f(x)=x^2-3x=0$, que dan los cortes con el eje *OX*.

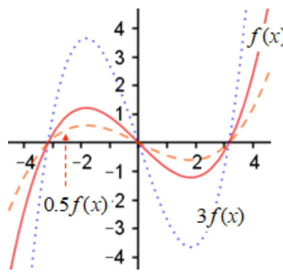


- La función $k+f(x)$ suma el número *k* a los resultados de $f(x)$.

Esto significa que, si *k* es positivo, la gráfica de $f(x)$ se desplaza *k* unidades hacia arriba; si *k* es negativo, se desplaza hacia abajo.

- La función $f(x+k)$ es la misma que $f(x)$ pero trasladada *k* unidades a la izquierda si *k* es positivo, y *k* unidades a la derecha si *k* es negativo.

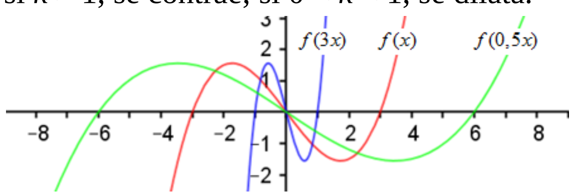




- La función $k\cdot f(x)$ multiplica por *k* todos los resultados de $f(x)$. (Gráfica de arriba).

- La función $f(k\cdot x)$ contrae o dilata la función $f(x)$; si $k > 1$, se contrae; si $0 < k < 1$, se dilata.

En la figura adjunta, puede verse que la función $f(3x)$ se contrae a razón de 3 a 1. Mientras que $f(0,5x)$ se dilata, se ensancha a razón de 1 a 2.



4. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Cuando sobre $f(x)$ actúa otra función g se puede hablar de composición de funciones. Es frecuente la notación $(g \circ f)(x)$, cuyo significado es $g(f(x))$, que se lee f compuesta con g. (Se dice primero la función de *dentro*, que es la que primero actúa). Esquemáticamente es:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) & \longrightarrow & g(f(x)) \end{array}$$

La función $g(f(x))$ estará definida cuando $f(x)$ sea del dominio de g.

Análogamente, g compuesta con f es $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

La composición de funciones no es conmutativa; esto es, en general $g(f(x)) \neq f(g(x))$.

Ejemplo:

Si $f(x) = 5x - 2$ y $g(x) = 3x^2 - 1$, la función $g(f(x)) = 3(f(x))^2 - 1$.

Luego, $g(f(x)) = 3(5x-2)^2 - 1 \Rightarrow g(f(x)) = 3(25x^2 - 20x + 4) - 1 = 75x^2 - 60x + 11$.

De manera sucesiva (primero f y después g), actuaría, por ejemplo, para $x = 0$ y $x = -1$, así:

$0 \to f(0) = -2 \to g(-2) = 11$; $\quad -1 \to f(-1) = -7 \to g(-7) = 3\cdot(-7)^2 - 1 = 146$.

De una vez:

$0 \to g(f(0)) = 75\cdot 0 - 60\cdot 0 + 11 = 11$; $\quad -1 \to g(f(-1)) = 75\cdot(-1)^2 - 60\cdot(-1) + 11 = 146$.

- Análogamente, $f(g(x)) = 5(g(x)) - 2 = 5(3x^2 - 1) - 2 = 15x^2 - 7$.

Como puede observarse, la composición de funciones no es conmutativa, pues:

$g(f(x)) = 75x^2 - 60x + 11$; $f(g(x)) = 15x^2 - 7$.

Funciones inversas (recíprocas)

Dos funciones f y g son inversas cuando se cumple que: $g(f(x)) = x$ y $f(g(x)) = x$.

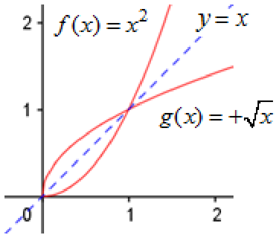
La función inversa de f se designa por f^{-1}. (También se dice que f y g son recíprocas).

- En las calculadoras aparecen varios pares de funciones inversas:
  sin y $\sin^{-1}$; cos y $\cos^{-1}$; $\log x$ y 10^x; $\ln x$ y e^x.

Ejemplo:

Para valores de x positivos son inversas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = +\sqrt{x}$, pues:

$g(f(x)) = +\sqrt{f(x)} = +\sqrt{x^2} = x$.



Igualmente, $f(g(x)) = +(g(x))^2 = (+\sqrt{x})^2 = x$.

Es evidente, por ejemplo, para $x = 2$, que:

$g(f(2)) = g(4) = +\sqrt{4} = 2$; $f(g(2)) = f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$.

Como puede verse, sus gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante, la recta $y = x$.

<u>Observación:</u>

Una cosa es la función inversa de $f(x)$ y otra, la inversa de la función $f(x)$. La inversa de la función $f(x)$ es $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Así, para $f(x) = 5x - 2$, su inversa es $h(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{5x-2}$.

Cómo se halla la función inversa

Conocida la función $f(x)$, su función inversa g se determina resolviendo la ecuación $f(g(x)) = x$.

Ejemplos:

a) Si $f(x) = x^2 + 2$, su función inversa $g(x)$ debe cumplir que

$$f(g(x)) = (g(x))^2 + 2 = x \to \text{(despejando)} \Rightarrow (g(x))^2 = x - 2 \Rightarrow g(x) = +\sqrt{x-2}$$

Como puede verse:

$$f(g(x)) = \left(\sqrt{x-2}\right)^2 + 2 = (x-2) + 2 = x\text{; y } g(f(x)) = +\sqrt{f(x)-2} = +\sqrt{\left(x^2+2\right)-2} = +\sqrt{x^2} = x.$$

Por tanto, $g(x) = f^{-1}(x) = +\sqrt{x-2}$.

→ Un truco eficaz para calcular la función inversa consiste en cambiar las variables: *x* por *y*, e *y* (o $f(x)$) por *x*. A continuación, se despeja la nueva *y*; la expresión obtenida es la función inversa. (Observa: si *y* es la función inversa de inversa de $f(x)$, entonces, por definición, debe cumplirse que $f(y) = x$; esto es lo que justifica el truco).

Así, si $f(x) = 3 - x^2$ $\left(\text{o } y = 3 - x^2\right)$, para hallar su función inversa se cambia *x* por *y*:

$$y = 3 - x^2 \to \text{(cambio)} \to x = 3 - y^2 \Rightarrow x - 3 = -y^2 \Rightarrow y^2 = 3 - x \Rightarrow y = \sqrt{3-x}.$$

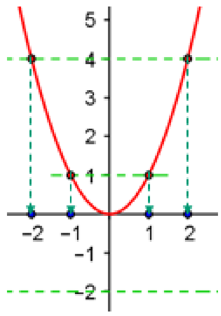
Luego, $f^{-1}(x) = \sqrt{3-x}$.

Imagen inversa de un número

Para todo y_0 del recorrido de la función f, su imagen inversa, $f^{-1}(y_0)$, es el conjunto de los números *x*, del dominio, que se transforman en y_0. Esto es, $f^{-1}(y_0) = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = y_0\}$.

- Para hallar $f^{-1}(y_0)$ se resuelve la ecuación $f(x) = y_0$.
- En particular, $f^{-1}(0)$ da los puntos de corte de la función con el eje de abscisas.
- Gráficamente, para determinar $f^{-1}(y_0)$ se traza la recta horizontal $y = y_0$; las abscisas correspondientes a los puntos de corte de esa recta con la gráfica de $f(x)$ forman la imagen inversa de y_0.

Ejemplos:

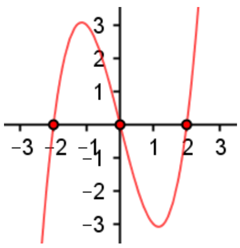


a) Para la función $f(x) = x^2$, las imágenes inversas de 4 son las soluciones de la ecuación $x^2 = 4$, que son $x = –2$ y $x = 2$.

Esto es: $f^{-1}(4) = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = 4\} = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 = 4\}$ = {–2, 2}.

Análogamente, $f^{-1}(1) = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 = 1\}$ = {–1, 1}.

Nota: Si se pretende hallar, por ejemplo, $f^{-1}(-2)$, hay que resolver $x^2 = -2$. Como esa ecuación no tiene solución, se deduce que – 2 no es de la imagen de *f*.

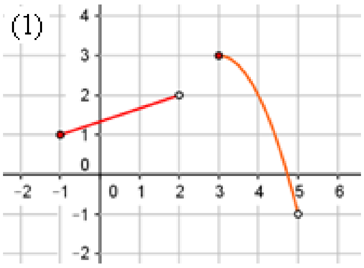


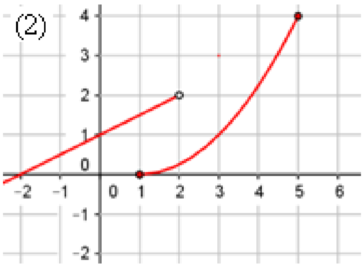
b) Para hallar los puntos de corte de la función $f(x) = x^3 - 4x$ con el eje *OX*, hay que calcular la imagen inversa de $y = 0$, $f^{-1}(0)$.

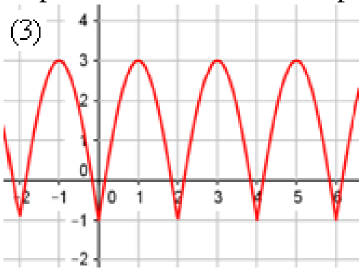
Se obtienen resolviendo la ecuación $x^3 - 4x = 0 \to x\left(x^2 - 4\right) = 0 \Rightarrow$ sus soluciones son $x = –2$, $x = 0$ y $x = 2$. Luego $f^{-1}(0)$ = {–2, 0. 2}.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. ¿Cuál de las siguientes gráficas no puede ser la de una función? Explica brevemente tu respuesta.

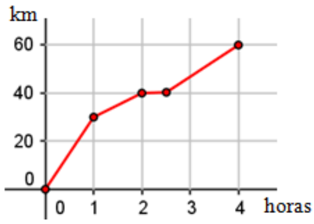






Además, para cada una de las funciones, contesta a las siguientes cuestiones:
a) Determina su dominio y recorrido.
b) ¿Cuánto vale $f(-1)$ y $f(4)$?
c) Indica alguna de sus características: crecimiento o decrecimiento, continuidad, periodicidad…

2. En la gráfica adjunta se muestra la relación entre el tiempo y la distancia recorrida en una marcha ciclista.



a) ¿Qué mide la variable independiente? ¿Y la variable dependiente?
b) ¿Qué distancia aproximada recorren en la segunda hora de carrera?
c) ¿Qué indica la parte plana de la gráfica?
d) ¿Cuál ha sido la velocidad media durante la marcha?

3. Halla el dominio de definición de las funciones:

a) $f(x)=x^2-3x$; b) $f(x)=\dfrac{4}{x^2-3x}$; c) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+3x-4}$; d) $f(x)=\sqrt{3x-9}$.

4. Para cada una de las funciones anteriores, halla:
a) La imagen de los números –1, 0, 2 y 3.
b) Los puntos en los que la imagen vale 0.

5. Halla el dominio de definición de las funciones:

a) $f(x)=-x^3+4x^2+3$; b) $g(x)=\dfrac{4x+3}{5x+3}$; c) $h(x)=\sqrt{16-2x}$; d) $k(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$.

6. Para cada una de las siguientes funciones calcula $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ y $f(4)$. Si en algún caso no puede determinarse su valor, indica el motivo.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{si } x<2 \\ x-1, & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases} 1/x, & \text{si } x<0 \\ 1/(x-2), & \text{si } x>0 \end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases} 2, & \text{si } x<1 \\ 2x+1, & \text{si } 1\leq x\leq 3 \end{cases}$.

7. a) Representa, calculando algunos de sus puntos, la gráfica de la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{si } x<2 \\ x-1, & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$.

b) Observando la gráfica contesta:
b1) ¿Es una función continua?
b2) ¿Para qué valores de x se cumple que $f(x)=2$?

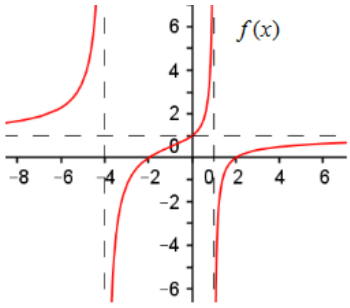
8. Representa dando valores la función $f(x)=\begin{cases} x^2-2, & \text{si } x\le 1 \\ x-1, & \text{si } 1<x\le 4 \\ \dfrac{12}{x}, & \text{si } x>4 \end{cases}$.

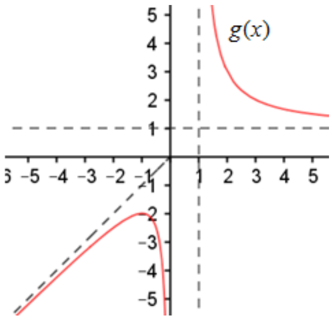
A partir de su gráfica indica sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, y sus máximos y mínimos, si los tiene; sus discontinuidades y sus asíntotas, si las tiene.

9. Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en los intervalos que se dan:

a) $f(x)=2x-1$, en [0, 3]; b) $g(x)=\dfrac{6}{x}$, en [1, 6]; c) $h(x)=-0{,}5x^2+4x+1$, en [2, 4].

10. Para las funciones representadas en las figuras adjuntas, determina:
a) Su dominio y recorrido.
b) La ecuación de sus asíntotas.
c) Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Sus máximos y mínimos, si los tiene, indicando las coordenadas de dichos puntos.





11. Utilizando las definiciones comprueba que la función $f(x)=x^2+2x$:

a) Es creciente en $x = 1$. b) Es decreciente en $x = -2$. c) Tiene un mínimo en $x = -1$.

12. Dibuja una función que cumpla las siguientes condiciones:
1) Está definida para todo número real.
2) Es simétrica respecto del origen de coordenadas.
3) Tiene un máximo absoluto en el punto (1, 2); otro de sus puntos es (3, 1,2).
4) Tiene el eje de abscisas como asíntota horizontal.
Da, al menos, tres puntos más de su gráfica; indica también su recorrido.

13. Dibuja una función *f* sabiendo que:
1) Es simétrica respecto del eje *OY*.
2) Está definida en todo **R**.
3) Cumple que: $f(0)=-1$; $f(1) = 2$; $f(2) = 3$ y $f(3) = 1$.
4) En $x = 0$ y $x = 2$ tiene, respectivamente, sus valores mínimos y máximos.
5) Crece en el intervalo (0, 2); decrece a partir de $x = 2$.
6) Tiene el eje *OX* como asíntota horizontal.

14. Expresa como una función definida a trozos la función $f(x)=|x+1|$. Haz su gráfica.

15. Dada la función $f(x)=x-2$, halla la expresión de las siguientes funciones asociadas a ella:

a) $-f(x)$; b) $f(-x)$; c) $|f(x)|$; d) $f(x-4)$.

A partir de la gráfica de $f(x)$ haz la gráfica de las otras funciones.

16. A partir de la gráfica de $f(x)=x-2$ haz la gráfica de:

a) $-f(x)$; b) $f(-x)$; c) $|f(x)|$; d) $f(x-4)$.

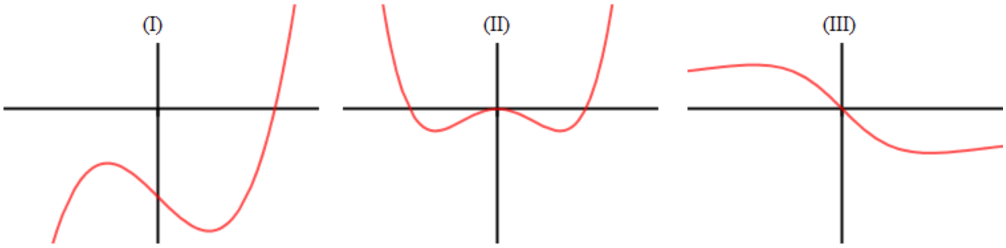
17. Halla la expresión algebraica de cada una de las funciones que se obtienen al trasladar la función $y = f(x) = x^2 - 3x$ según el vector que se indica:

a) $\vec{a} = (0, 3)$; b) $\vec{b} = (-1, 0)$; c) $\vec{c} = (3, 2)$.

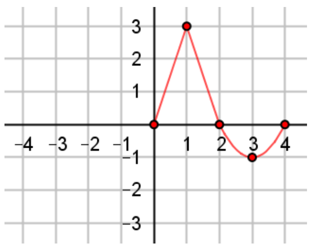
18. Estudia, aplicando la definición, la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - x^2$; b) $g(x) = x^3 - x - 1$; c) $h(x) = -\dfrac{x}{x^2+1}$.

19. Las siguientes gráficas corresponden a las funciones del problema anterior.
a) Atendiendo al estudio realizado sobre su simetría, emparéjalas con su expresión algebraica.
b) Halla los puntos de corte de cada una de las gráficas con los ejes de coordenadas. Marca en cada caso el valor de la función en los puntos $x = -1$
c) ¿Alguna de esas funciones tiene asíntotas?



20. Completa, trazando la parte que falta en cada caso, la gráfica de la función dada para que sea:
a) Simétrica respecto del origen.
b) Simétrica respecto del eje *OY*.
c) Periódica.
d) Si es periódica, ¿cuánto valdrá la función en $x = 5$?; ¿y en $x = 35$?



21. Dadas las funciones $f(x) = 2x$ y $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$. Halla:

a) Las funciones compuestas: $g(f(x))$ y $f(g(x))$. Indica su dominio.

b) $g(f(1))$, $g(f(4))$, $f(g(3))$ y $f(g(1))$.

22. a) Halla la función inversa de $f(x) = -2x + 3$.

b) Comprueba, paso a paso, que $f\left(f^{-1}(4)\right) = 4$. ¿Cuánto vale $f^{-1}\left(f(5)\right)$?

23. Dadas $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$, halla:

a) $f\left(g(2)\right)$ y $g\left(f(-1)\right)$; b) El dominio de $f\left(g(x)\right)$; c) La función inversa de $g(x)$.

24. Dadas $f(x) = x^2 - 3x + 4$ y $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, halla:

a) $f\left(g(0)\right)$ y $g\left(f(-1)\right)$; b) El dominio de $f\left(g(x)\right)$; c) La función inversa de $g(x)$.

25. Para $f(x) = x^2 + 4x$, calcula: $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(-3)$, $f^{-1}(-4)$ y $f^{-1}(-5)$

26. Representa la función $f(x) = x^2 + 4x$ e interpreta gráficamente el resultado del problema anterior.