TEMA 8. NÚMEROS COMPLEJOS

1. DEFINICIÓN DE NÚMERO COMPLEJO

El conjunto de los números complejos, que se designa por $\mathbb{C}$, es una ampliación de los números reales. Esta ampliación permite asegurar que cualquier ecuación polinómica tiene tantas raíces, reales o complejas, como indica su grado (teorema fundamental del álgebra). Para lograr esa ampliación hay que definir el concepto de raíz cuadrada de un número negativo.
Con esto, por ejemplo, en el conjunto de los números complejos puede asegurarse que:
→ el polinomio $P(x)=x^3-1$ tiene 3 raíces, aunque en **R** solo puede encontrarse $x = 1$.
→ la ecuación $x^2+1=0$ tiene dos soluciones, aunque ninguna es real, pues
$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\sqrt{-1}$, que no existe, ¡hasta ahora!

Definición de la unidad imaginaria
La unidad imaginaria se denota con la letra *i*, y se define como la raíz cuadrada positiva de –1.
Esto es: $i=+\sqrt{-1}$.
Por tanto, $i^2=\left(+\sqrt{-1}\right)^2 \Rightarrow i^2=-1$.
Atendiendo a la propiedad $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, puede deducirse, por ejemplo, que:
$\sqrt{-4}=\sqrt{4\cdot(-1)}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=\pm 2\cdot i$; $\sqrt{-25}=\sqrt{25\cdot(-1)}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{-1}=\pm 5i$, …

→ Esta definición permite dar la solución de cualquier tipo de ecuación de segundo grado.

Ejemplo:
a) $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}=\pm i$. Sus soluciones son $x=i$ y $x=-i$.

b) La ecuación $x^2-6x-10=0$, cuya solución es: $x=\dfrac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 10}}{2}=\dfrac{6\pm\sqrt{-4}}{2}=\dfrac{6\pm 2i}{2}=3\pm i$.

Definición de número complejo
Los números complejos son expresiones de la forma $a+bi$, siendo *a* y *b* números reales e *i* la unidad imaginaria.
Por tanto, el conjunto $\mathbb{C}=\left\{a+bi \mid a,\ b\in\mathbb{R}\right\}$.
Para indicar un número complejo genérico suele utilizarse la letra *z*. Así: $z=a+bi$. En esta expresión binómica del número complejo, *a* es la parte real y *b* la parte imaginaria.
→ Son números complejos, por ejemplo: $z_1=3-4i$, $z_2=-3+2i$, $z_3=0+6i=6i$ o $z_4=2+0i=2$.

- Si *a* = 0, el número complejo $0+bi$ se llama imaginario puro. Es el caso de $z_3=0+6i=6i$.
- Si *b* = 0, el número complejo $a+0i=a$ resulta ser un número real. Es el caso de $z_4=2+0i=2$.

Esto confirma que el conjunto de los números reales está contenido en el de los complejos: $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

Igualdad de números complejos
Dos números complejos son iguales cuando son iguales sus partes reales e imaginarias.
Es decir, si $z_1=a+bi$ y $z_2=c+di$ son iguales: $z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$.

Opuestos y conjugados

Dos números complejos son opuestos cuando son opuestas su parte real y su parte imaginaria.
El opuesto de $z = a + bi$ es $-z = -a - bi$.
La suma de dos números complejos opuestos vale 0.

Dos números complejos son conjugados cuando tienen la misma parte real y sus partes imaginarias son opuestas. El conjugado de $z = a + bi$ es $\bar{z} = a - bi$.
La suma de dos números complejos conjugados es un número real. Más adelante se verá que su producto también es un número real.

Ejemplos:

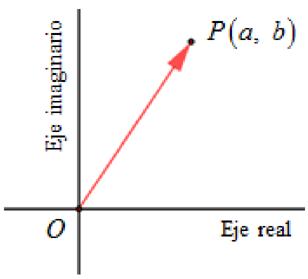
a) Para que $2a + 12i = 5 - 3bi$ debe cumplirse que $2a = 5$ y $12 = -3b$; esto es: $a = \frac{5}{2}$ y $b = -4$.

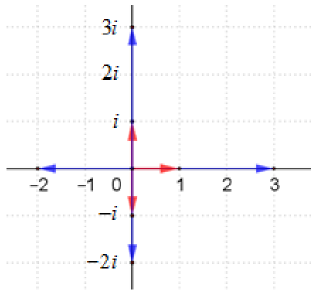
b) El opuesto de $z = 5 - 12i$ es $-z = -5 + 12i$; su conjugado, $\bar{z} = 5 + 12i$.

Nota: El alumno interesado puede saciar parte de su curiosidad enlazando con estas dos referencias: 1. Números complejos; 2. Leonhard Euler.

Representación gráfica

Los números complejos se representan en el plano cartesiano mediante un vector. Así, $z = a + bi$, se representa por el vector OP, donde O es el origen y P el punto de coordenadas (a, b).
En este caso puede hablarse de plano complejo: al eje de abscisas se le llama eje real; el eje vertical se llama eje imaginario; al punto $P(a, b)$ se le llama afijo del número complejo.



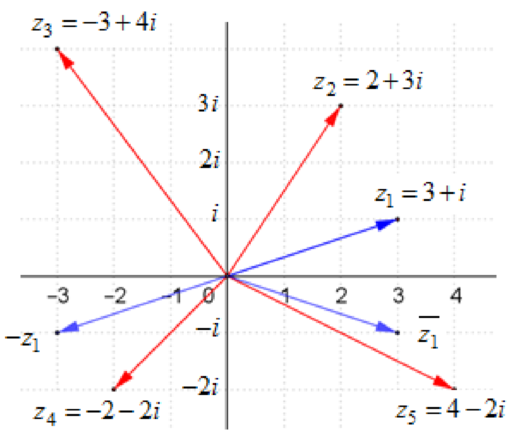


→ Los números reales se representarán en el eje de abscisas, como un vector horizontal.
→ Los números imaginarios puros se representarán en el eje de ordenadas, también como un vector.
En el dibujo de la derecha se han representado los números complejos: 1, -2, 3, i, $3i$, $-i$ y $-2i$
El módulo (la longitud) de los vectores asociados a 1, i, -1 y $-i$ vale 1.

Ejemplo:

En el gráfico adjunto se representan los números complejos que se indican.

En el caso de $z_1 = 3 + i$ se han representado su opuesto y su conjugado, $-z_1 = -3 - i$ y $\overline{z_1} = 3 - i$, respectivamente.
Puede observarse que los conjugados, z_1 y $\overline{z_1}$, son simétricos respecto del eje real; y que los opuestos, z_1 y $-z_1$, son simétricos respecto del origen de coordenadas.



2. OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA

Los números complejos dados en forma binómica se operan de la misma manera que se haría con binomios en x (del tipo $p(x)=a+bx$ y $q(x)=c+dx$): agrupando términos semejantes; teniendo en cuenta la prioridad de operaciones; las reglas de los signos; … Por tanto, estas operaciones cumplirán las mismas propiedades que cumplen las operaciones con números reales.

Suma y diferencia

Dados $z_1=a+bi$ y $z_2=c+di$ se define:

$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$. $\rightarrow$ Se suman sus partes reales e imaginarias, respectivamente.

La suma cumple las propiedades conmutativa, asociativa, existencia de neutro (que es $0+0i=0$) y de opuesto (el opuesto de $z=a+bi$ es $-z=-(a+bi)=-a-bi$).

- La resta se hace como sigue:
  $z_1-z_2=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.

Ejemplos:

a) $(5+3i)+(2-6i)=(5+2)+(3-6)i=7-3i$. b) $(5+3i)-(2-6i)=(5-2)+(3+6)i=3+9i$.

También podría hacerse paso a paso. Así: $(5+3i)-(2-6i)=5+3i-2+6i=3+9i$.

Multiplicación y división

El producto de números complejos en forma binómica se realiza como el producto de binomios, de manera ordenada y agrupando; y teniendo en cuenta que $i^2=-1$. Esto es:

$z_1\cdot z_2=(a+bi)\cdot(c+di)=a\cdot c+a\cdot di+bi\cdot c+bi\cdot di=ac+adi+bci+bd\cdot i^2 \Rightarrow$

$z_1\cdot z_2=ac+adi+bci+bd\cdot(-1)=ac-bd+(ad+bc)i$.

El producto cumple las propiedades conmutativa, asociativa, existencia de unidad (que es $1+0i=1$; cumple que $1\cdot z=z$) y de inverso. (El inverso de z es z^{-1}; cumple que $z\cdot z^{-1}=1$).

También se cumplen la propiedad distributiva: $z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$.

Observación: La multiplicación de un número complejo por su conjugado es un número real.

$z\cdot\bar{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-b^2i^2=a^2-b^2\cdot(-1)=a^2+b^2$.

Ejemplos:

a) $(2+7i)\cdot(4+3i)=8+6i+28i+21i^2=8+34i+21\cdot(-1)=8+34i-21=-13+34i$.

b) $(5+3i)\cdot(2-6i)=10-30i+6i-18i^2=10-24i-18\cdot(-1)=28-24i$.

c) $4\cdot(2-6i)=8-24i$.

d) $2i\cdot(5-6i)=10i-12i^2=10i-12\cdot(-1)=12+10i$.

e) Producto de conjugados: $(2+6i)\cdot(2-6i)=4-12i+12i-36i^2=4-36\cdot(-1)=40$.

$\rightarrow$ Aplicando la regla “suma por diferencia”: $(2+6i)\cdot(2-6i)=2^2-(6i)^2=4-36i^2=4+36=40$.

f) $(2+7i)^2=2^2+2\cdot2\cdot7i+(7i)^2=4+28i+49i^2=4+28i-49=-45+28i$.

g) $(4-3i)^2=4^2-2\cdot4\cdot3i+(3i)^2=16-24i+9i^2=16-24i-9=7-24i$.

$\rightarrow$ Estos dos últimos casos pueden hallarse multiplicando paso a paso. Así:

$(2+7i)^2=(2+7i)\cdot(2+7i)$; $(4-3i)^2=(4-3i)\cdot(4-3i)$.

División
Para dividir dos números complejos se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador; el proceso es similar al utilizado para la racionalización de expresiones radicales. Así:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{(ac+bd)-(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

→ La división de un número complejo entre un número real se hace descomponiendo, como sigue: $\frac{a+bi}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}i$.

Con **Mathway** se pueden realizar la mayoría de las operaciones que se estudian aquí. Su uso debe reservarse exclusivamente para comprobar los resultados, pues tanto los procedimientos como el significado de las operaciones son importantes.

Ejemplos:

a) $\frac{8-4i}{2}=\frac{8}{2}-\frac{4i}{2}=4-2i$; $\frac{7-5i}{-1}=-7+5i$; $\frac{9+5i}{2}=\frac{9}{2}+\frac{5}{2}i$.

b) $\frac{3+2i}{5+2i}=\frac{(3+2i)\cdot(5-2i)}{(5+2i)\cdot(5-2i)}=\frac{15-6i+10i-4i^2}{5^2-(2i)^2}=\frac{19+4i}{29}=\frac{19}{29}+\frac{4}{29}i$.

c) $\frac{3+4i}{3-4i}=\frac{(3+4i)\cdot(3+4i)}{(3-4i)\cdot(3+4i)}=\frac{9+24i+16i^2}{9-(4i)^2}=\frac{9+24i-16}{9-16i^2}=\frac{-7+24i}{25}=-\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i$.

d) El inverso de $z=a+bi$ es $z^{-1}=\frac{1}{a+bi}=\frac{1\cdot(a-bi)}{(a+bi)\cdot(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$.

En particular:

d1) $\frac{1}{2-2i}=\frac{2}{2^2+2^2}-\frac{-2}{2^2+2^2}i=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$ → Comprueba que $(2-2i)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)=1$.

d2) $\frac{1}{i}=\frac{1\cdot i}{i\cdot i}=\frac{i}{-1}=-i$.

Algunos ejercicios de multiplicación y división
Para afianzar los conceptos pueden proponerse algunos ejercicios como los que siguen:

Ejercicio 1
Dados los complejos $z_1=3+5i$ y $z_2=c+3i$ halla el valor de *c* para que su producto sea:
a) Un número real; b) un número imaginario puro.
Solución:
Multiplicando $z_1\cdot z_2$ se obtiene: $(3+5i)\cdot(c+3i)=3c-15+(9+5c)i$.

a) El producto es un número real si la parte imaginaria vale 0: $9+5c=0 \Rightarrow c=-\frac{9}{5}$.

b) El producto es un número imaginario puro si la parte real vale 0: $3c-15=0 \Rightarrow c=5$.

Ejercicio 2
Halla el valor de *k* para que $\frac{1-2i}{k+i}$ sea: a) un número real; b) un número imaginario puro.
Solución:
Dividiendo: $\frac{1-2i}{k+i}=\frac{(1-2i)\cdot(k-i)}{(k+i)\cdot(k-i)}=\frac{k-i-2ki+2i^2}{k^2+1}=\frac{k-2-(1+2k)i}{k^2+1}=\frac{k-2}{k^2+1}-\frac{1+2k}{k^2+1}i$.

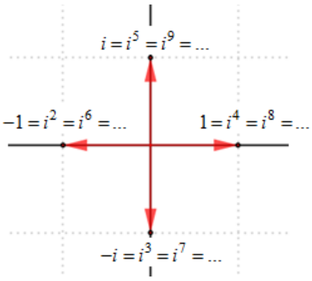
a) El producto es un número real si la parte imaginaria vale 0: $1+2k=0 \Rightarrow k=-\frac{1}{2}$.

b) El producto es un número imaginario puro si la parte real vale 0: $k-2=0 \Rightarrow k=2$.

Potencia de un número complejo

La potencia de un número complejo se hace lo mismo que la potencia de un binomio. Esto es:

$$(a+bi)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}(bi) + \binom{n}{2}a^{n-2}(bi)^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a(bi)^{n-1} + \binom{n}{n}(bi)^n$$



Para agrupar los números reales y las partes imaginarias se tendrá en cuenta el valor de las sucesivas potencias de *i*:

$i^0 = i^4 = i^8 = \ldots = i^{4n} = 1$; $i^1 = i^5 = i^9 = \ldots = i^{4n+1} = i$;

$i^2 = i^6 = i^{10} = \ldots = i^{4n+2} = -1$; $i^3 = i^7 = i^{11} = \ldots = i^{4n+3} = -i$.

Puede verse, por ejemplo, que:

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -1$; $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$; $i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$.

→ Las potencias de *i* se repiten cada cuatro unidades. Por tanto, para hallar una potencia de *i* se divide el exponente por 4 y se calcula la potencia de *i* elevada al resto de dicha división. Esto es:

$i^{4n} = i^0 = 1$; $i^{4n+1} = i^1 = i$; $i^{4n+2} = i^2 = -1$; $i^{4n+3} = i^3 = -i$.

Ejemplos:

a) $i^{33} = i^{4\cdot 8+1} = \left(i^4\right)^8 \cdot i^1 = 1 \cdot i = i$; $i^{47} = i^{4\cdot 11+3} = \left(i^4\right)^{11} \cdot i^3 = 1\cdot(-i) = -i$.

b) Para calcular $(3+2i)^4$, aplicando el desarrollo de un binomio se tiene:

$$(3+2i)^4 = \binom{4}{0}\cdot 3^4 + \binom{4}{1}\cdot 3^3 \cdot (2i) + \binom{4}{2}\cdot 3^2 \cdot (2i)^2 + \binom{4}{3}\cdot 3 \cdot (2i)^3 + \binom{4}{4}\cdot (2i)^4 =$$

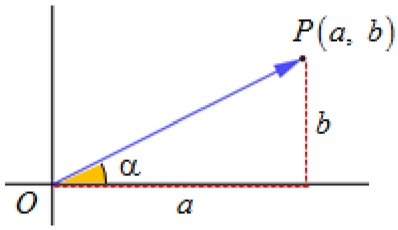
$$= 81 + 4\cdot 27\cdot 2i + 6\cdot 9\cdot 4i^2 + 4\cdot 3\cdot 8i^3 + 16i^4 = 81 + 216\cdot i + 216\cdot(-1) + 96(-i) + 16\cdot 1 = -119 + 120i.$$

c) Igualmente:

$$(2-i)^3 = \binom{3}{0}\cdot 2^3 - \binom{3}{1}\cdot 2^2 \cdot i + \binom{3}{2}\cdot 2 \cdot i^2 - \binom{3}{3}\cdot i^3 = 8 - 3\cdot 4i + 3\cdot 2\cdot i^2 - i^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i.$$

3. FORMA POLAR Y TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

Como se ha indicado anteriormente, los números complejos se representan en el plano cartesiano mediante un vector. Así, $z = a + bi$, se representa por el vector $\overrightarrow{OP}$, donde *O* es el origen y *P* el punto de coordenadas (*a*, *b*), el afijo de *z*.



Se llama <u>módulo</u> de $z = a + bi$, y se representa por $m = |z|$, a la longitud del vector $\overrightarrow{OP}$, que se calcula aplicando Pitágoras.

Es decir, $m = |z| = \left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Se llama <u>argumento</u> de $z = a + bi$, y se representa α, al ángulo que forma el vector $\overrightarrow{OP}$ con la dirección positiva del eje real (medido en sentido contrario al del movimiento de las agujas de un reloj). Se calcula aplicando la fórmula

$\tan\alpha = \dfrac{b}{a} \rightarrow \alpha = \arctan\dfrac{b}{a}$, con $0 \le \alpha < 360^{\circ}$.

(Como en la primera vuelta hay dos soluciones para α, se elegirá el ángulo que esté en el mismo cuadrante que el afijo del número complejo).

Con esto, el número complejo z se puede escribir como $z = a + bi = m_\alpha$.

- La expresión $z = m_\alpha$ es la <u>forma polar</u> (o módulo argumental) del número complejo.

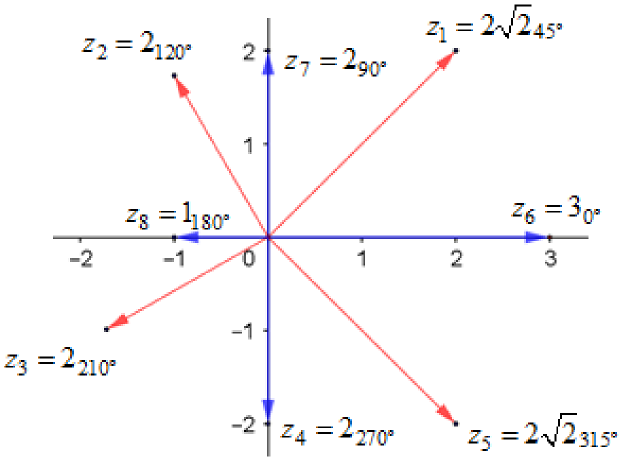
Ejemplos:

a) Para $z_1 = 2 + 2i$ se tiene:

$$m_1 = |z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\,;\ \alpha_1 = \arctan\frac{2}{2} = 45^{\circ}.$$

Por tanto, $z_1 = 2 + 2i = 2\sqrt{2}_{45^{\circ}}$.

b) Si $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$:



$$m_2 = |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2\,;$$

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = 120^{\circ}$$, pues el punto $P\left(-1,\ \sqrt{3}\right)$ está en el segundo cuadrante.

Por tanto, $z_2 = -1 + \sqrt{3}i = 2_{120^{\circ}}$.

c) Para $z_3 = -\sqrt{3} - i$:

$$m_3 = |z_3| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2\,;$$

$$\alpha_3 = \arctan\left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right) = 210^{\circ}$$, pues el punto $P\left(-\sqrt{3},\ -1\right)$ está en el tercer cuadrante.

Por tanto, $z_3 = -\sqrt{3} - i = 2_{210^{\circ}}$.

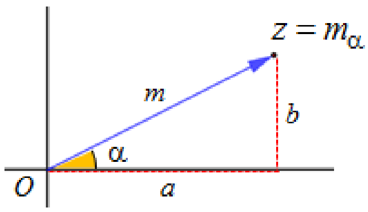
d) Análogamente, para los complejos que siguen:

$$z_4 = -2i = -2_{270^{\circ}}\,;\ z_5 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}_{315^{\circ}}\,;\ z_6 = 3 = 3_{0^{\circ}}\,;\ z_7 = 2i = 2_{90^{\circ}}\,;\ z_8 = -1 = 1_{180^{\circ}}.$$

Forma trigonométrica de un número complejo

Para $z = a + bi = m_{\alpha}$, si se tiene en cuenta que:

$$\cos\alpha = \frac{a}{m} \to a = m\cdot\cos\alpha\,;\ \sin\alpha = \frac{b}{m} \to b = m\cdot\sin\alpha\,;$$



entonces:

$$z = a + bi = m\cdot\cos\alpha + (m\cdot\sin\alpha)\cdot i \;\Rightarrow\; z = m\cdot(\cos\alpha + i\cdot\sin\alpha),$$

que es la expresión en forma trigonométrica de un número complejo.

Ejemplos:

La forma trigonométrica de algunos de los números complejos del ejemplo anterior es:

a) $z_1 = 2 + 2i = 2\sqrt{2}_{45^{\circ}} \to z_1 = 2\sqrt{2}\cdot(\cos 45^{\circ} + i\cdot\sin 45^{\circ})$.

b) $z_2 = -1 + \sqrt{3}i = 2_{120^{\circ}} \to z_2 = 2\cdot(\cos 120^{\circ} + i\cdot\sin 120^{\circ})$.

c) El paso de un número complejo dado en forma polar o trigonométrica a binómica se hace sustituyendo los valores del coseno y del seno de α. Así:

$$z = 3\cdot(\cos 315^{\circ} + i\cdot\sin 315^{\circ}) = 3\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i.$$

Observación: El ángulo α puede ser mayor de 360º, o negativo. En su caso debe tenerse en cuenta la periodicidad del seno y del coseno.

→ $z_5 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}_{315^{\circ}}$ se puede escribir como: $z_5 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}_{(-45^{\circ})}$; → $z_7 = 2i = 2_{90^{\circ}} = 2_{450^{\circ}}$.

→ En general, $z = m_{\alpha} = m_{(\alpha + k\cdot 360^{\circ})} = m\cdot\left(\cos(\alpha + k\cdot 360^{\circ}) + i\cdot\sin(\alpha + k\cdot 360^{\circ})\right)$.

4. OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR

La multiplicación y división de números complejos se realizan con gran facilidad si los números vienen expresados en forma polar.

Multiplicación
El producto de dos números complejos en forma polar es otro número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos.
Esto es:

$$m_\alpha \cdot n_\beta = (m \cdot n)_{(\alpha+\beta)}$$

Para demostrarlo hay que recurrir a las fórmulas trigonométricas. (Se hace en el Problema 10).

Ejemplos:

a) $3_{100^\circ} \cdot 4_{140^\circ} = (3 \cdot 4)_{(100^\circ+140^\circ)} = 12_{240^\circ} \to$

$$12_{240^\circ} = 12 \cdot (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = 12 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = -6 - 6\sqrt{3}i \,.$$

b) $2_{60^\circ} \cdot 5_{120^\circ} = (2 \cdot 5)_{(60^\circ+120^\circ)} = 10_{180^\circ} = 10 \cdot (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 10 \cdot (-1 + 0i) = -10$.

c) $1_{300^\circ} \cdot 5_{120^\circ} = (1 \cdot 5)_{(300^\circ+120^\circ)} = 5_{420^\circ} = 5_{60^\circ+360^\circ} = 5_{60^\circ}$.

d) $2_{300^\circ} \cdot 3_{(-90^\circ)^\circ} = (2 \cdot 3)_{(300^\circ-90^\circ)} = 6_{210^\circ} \to 6 \cdot (\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = 6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right) = -3\sqrt{3} - 3i$.

División
El cociente de dos números complejos en forma polar es otro número complejo, cuyo módulo es el cociente de los módulos y cuyo argumento es la diferencia de los argumentos.
Esto es:

$$\frac{m_\alpha}{n_\beta} = \left(\frac{m}{n} \right)_{(\alpha-\beta)}$$

La demostración de esta fórmula se hace en el Problema 11.

Ejemplos:

a) $4_{100^\circ} \cdot 2_{40^\circ} = \left(\frac{4}{2} \right)_{(100^\circ-40^\circ)} = 2_{60^\circ} \to 2_{60^\circ} = 2 \cdot (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + \sqrt{3}i$.

b) $12_{60^\circ} : 4_{120^\circ} = \left(\frac{12}{4} \right)_{(60^\circ-120^\circ)} = 3_{(-60^\circ)} = 3 \cdot (\cos(-60^\circ) + i \sin(-60^\circ)) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i$.

c) $\frac{1_{270^\circ}}{2_{90^\circ}} = \left(\frac{1}{2} \right)_{(270^\circ-90^\circ)} = \left(\frac{1}{2} \right)_{180^\circ} = -\frac{1}{2}$.

d) $\frac{1-\sqrt{3}i}{2+2i} = \frac{2_{120^\circ}}{2\sqrt{2}_{45^\circ}} = \left(\frac{2}{2\sqrt{2}} \right)_{(120^\circ-45^\circ)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)_{75^\circ}$ → En este caso puede resultar más rápido y claro hacer la división mediante el conjugado.

Potenciación

Para el caso del cuadrado: $(m_\alpha)^2 = (m_\alpha)\cdot(m_\alpha) = (m\cdot m)_{(\alpha+\alpha)} = (m^2)_{2\alpha}$.

Para el cubo: $(m_\alpha)^3 = (m_\alpha)^2\cdot(m_\alpha) = (m^2)_{2\alpha}\cdot(m_\alpha) = (m^2\cdot m)_{(2\alpha+\alpha)} = (m^3)_{3\alpha}$.

En general: $(m_\alpha)^n = (m^n)_{(n\cdot\alpha)}$.

→ Para módulo 1 y argumento α, resulta $(1_\alpha)^n = (1^n)_{(n\cdot\alpha)} = 1_{(n\alpha)}$.

Como $1_\alpha = 1\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow (1_\alpha)^n = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = 1_{(n\alpha)} = (\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$.

Esto significa que: $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$; expresión que se conoce con el nombre de fórmula de Moivre.

Ejemplos:

a) $(3_{225^\circ})^4 = (3^4)_{(4\cdot 225^\circ)} = 81_{900^\circ} = 81_{180^\circ} \to -81$.

b) $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^5 = (2_{120^\circ})^5 = (2^5)_{(5\cdot 120^\circ)} = 32_{600^\circ} = 32_{240^\circ} \to 32\cdot(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ) = -16-16\sqrt{3}i$.

c) $8\cdot(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)^7 = 8\cdot(\cos(210^\circ) + i\sin(210^\circ)) = 8\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -4\sqrt{3} - 4i$.

Observación: Las potencias sucesivas de un número complejo generan interesantes resultados geométricos. Si te interesa esto, puedes ir a https://www.geogebra.org/m/dS7PaSx3.

Radicación

Si z un número complejo, se dice que:

$\sqrt{z} = z'$ si $(z')^2 = z$; $\sqrt[3]{z} = z'$ si $(z')^3 = z$; … ; $\sqrt[n]{z} = z'$ si $(z')^n = z$, $n \in \mathbb{N}$.

La radicación se puede hacer siempre que el número complejo esté en forma polar. Con esto, para la raíz n–ésima, si se expresan z y z' en forma polar, suponiendo que $z = m_\alpha$ y $z' = r_\beta$, entonces:

$$\sqrt[n]{z} = z' \Leftrightarrow \sqrt[n]{m_\alpha} = r_\beta \Rightarrow m_\alpha = (r_\beta)^n \Rightarrow m_\alpha = (r^n)_{(n\cdot\beta)} \Rightarrow \begin{cases} m = r^n \\ \alpha + k\cdot 360^\circ = n\cdot\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{m} \\ \beta = \dfrac{\alpha + k\cdot 360^\circ}{n} \end{cases}.$$

Recuerda que $z = m_\alpha = m_{(\alpha+k\cdot 360^\circ)} = m\cdot(\cos(\alpha + k360^\circ) + i\cdot\sin(\alpha + k360^\circ))$.

→ También puede verse expresando la raíz como potencia de exponente fraccionario:

$$\sqrt[n]{a+bi} = (a+bi)^{\frac{1}{n}} = (m_\alpha)^{\frac{1}{n}} = (m_{\alpha+k\cdot 360^\circ})^{\frac{1}{n}} = \left(m^{\frac{1}{n}}\right)_{\left(\frac{\alpha+k\cdot 360^\circ}{n}\right)} = \left(\sqrt[n]{m}\right)_{\left(\frac{\alpha+k\cdot 360^\circ}{n}\right)}.$$

Puede observarse que:

1. Un número complejo, $z = m_\alpha$, tiene n raíces n–ésimas: 2 raíces cuadradas; 3 raíces cúbicas; 4 raíces cuartas; … Algunas de esas raíces pueden ser reales.

2. Todas las raíces n–ésimas tienen el mismo módulo: $r = \sqrt[n]{m}$. Dando valores a k en la expresión $\frac{\alpha + k\cdot 360^\circ}{n}$, ($k$ = 0, 1, 2, …, n – 1), se obtienen los diferentes argumentos de esas n raíces.

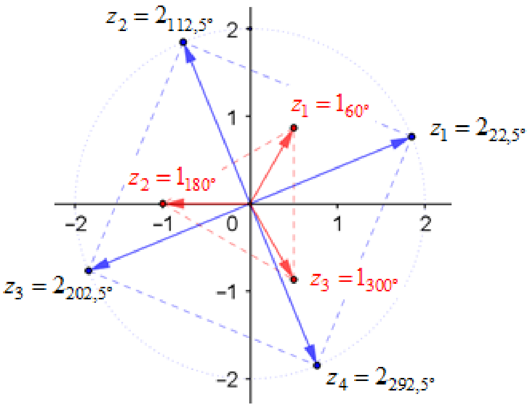
3. Para n > 2, los afijos de dichas raíces son los vértices de un polígono regular de n lados, inscrito en una circunferencia de radio el módulo común. Se verá en los ejemplos que siguen.

Ejemplos:

a) $\sqrt[4]{16i}=\sqrt[4]{16_{90^\circ}}=\left(\sqrt[4]{16}\right)_{\frac{90^\circ+k\cdot 360^\circ}{4}}\to$

$\to z_1=2_{22,5^\circ},\ z_2=2_{112,5^\circ},\ z_3=2_{202,5^\circ}$ y $z_4=2_{292,5^\circ}$.

Sus afijos son vértices de un cuadrado.



b) $\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{1_{180^\circ}}=\left(\sqrt[3]{1}\right)_{\frac{180+k\cdot 360^\circ}{3}}=1_{(60^\circ+k\cdot 120^\circ)}\to$

$\to z_1=1_{60^\circ}$; $z_2=1_{180^\circ}$ y $z_3=1_{300^\circ}$.

Sus afijos son vértices de un triángulo equilátero.

Aplicación a la resolución de ecuaciones

Las operaciones con números complejos permiten ampliar la resolución de ecuaciones con coeficientes reales o complejos. A continuación se proponen algunos ejercicios.

Ejercicio 3

Halla las soluciones de las ecuaciones: a) $x^2-4x+29=0$; b) $x^4+3x^2+2=0$.

<u>Solución</u>:

a) $x^2-4x+29=0\Rightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-116}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{-100}}{2}=\dfrac{4\pm 10i}{2}=\begin{cases}2+5i\\2-5i\end{cases}$.

Puede verse que el resultado es correcto sustituyendo:

$x^2-4x+29=0\to$ (para $z_1=2+5i$) $\to (2+5i)^2-4(2+5i)+29=0\Rightarrow$

$\Rightarrow 4+20i+25i^2-8-20i+29=4+20i-25-8-20i+29=0$.

<u>Nota</u>: Las raíces complejas de una ecuación de segundo grado siempre son conjugadas. (En general, si una ecuación tiene una raíz compleja, también tiene como raíz a su conjugada).

b) $x^4+3x^2+2=0\to$ es una ecuación bicuadrada.

Haciendo $x^2=z\ \to z^2+3z+2=0\Rightarrow z=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\dfrac{-3\pm 1}{2}=\begin{cases}-2\\-1\end{cases}$.

Para $z=-2\Rightarrow x=\sqrt{-2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1}=\pm\sqrt{2}\cdot i$; para $z=-1\Rightarrow x=\sqrt{-1}=\pm i$.

Ejercicio 4

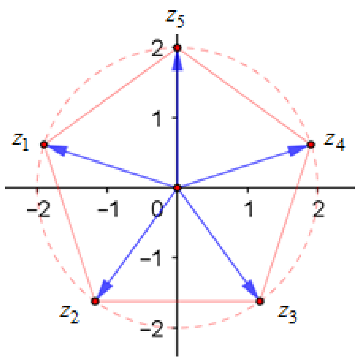
Una de las soluciones de las raíces quintas de un número complejo es $z_1=2_{162^\circ}$: $\sqrt[5]{z}=z_1=2_{162^\circ}$.

Halla z y las demás raíces quintas de z.

<u>Solución</u>:

Si $\sqrt[5]{z}=z_1=2_{162^\circ}\Rightarrow z=(z_1)^5\to$

$\to z=\left(2_{162^\circ}\right)^5=\left(2^5\right)_{(5\cdot 162^\circ)}=32_{810^\circ}=32_{90^\circ}=32i$.



Todas las raíces tienen el mismo módulo, 2.

Los argumentos de las raíces quintas se diferencian en 72º, pues $\dfrac{360^\circ}{5}=72^\circ$.

Por tanto, otros argumentos serán:

162º + 72º = 234º; (+72º) → 306º; (+72º) → 378º ≡ 18º; (+72º) → 90º.

Las cinco raíces son:

$z_1=2_{162^\circ}$, $z_2=2_{234^\circ}$, $z_3=2_{306^\circ}$, $z_4=2_{18^\circ}$ y $z_5=2_{90^\circ}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Dados los números complejos $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -3 + i$, $z_3 = 2$ y $z_4 = 3i$.
a) Para cada uno de ellos halla su conjugado y su opuesto.
b) Represéntalos (complejos, conjugados y opuestos) en el plano polar.

2. Para los mismos números complejos $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -3 + i$, $z_3 = 2$ y $z_4 = 3i$, halla sus módulos y argumentos, para ellos y para sus respectivos conjugados y opuestos.

3. Calcula:
a) $(2+3i)-(3-i)$; b) $3\cdot(4-3i)-5i$;
c) $4-2i-3\cdot(2-i)$; d) $2\cdot(4-5i)-5\cdot(2-2i)$.

4. Calcula:
a) $(2+3i)\cdot(3-2i)$; b) $(-3+i)\cdot(-5+2i)$;
c) $(2-3i)^2$; d) $(4+5i)^2$.

5. Calcula:
a) $\dfrac{1-2i}{2-2i}$; b) $\dfrac{3+2i}{5-3i}$;
c) $\dfrac{4}{12-2i}$; d) $\dfrac{4-2i}{2i}$;
e) $\dfrac{5i}{4+3i}$; f) $\dfrac{12+2i}{1+6i}$.

6. Calcula simplificando el resultado:
a) $\dfrac{2-4i}{1+3i}+\dfrac{4}{i}$; b) $\dfrac{1-2i}{2-2i}\cdot\dfrac{2-i}{3i}$;
c) $\dfrac{2i}{1-i}\cdot\dfrac{2-i}{3i}$; d) $\dfrac{(2+6i)^2}{2i}$.

7. Teniendo en cuenta el valor de las potencias de i simplifica la expresión:
a) $\dfrac{-2\cdot i^{18}+i^{99}}{2+i^{40}}$; b) $\dfrac{3\cdot i^{50}+i^{239}}{1+i^{193}}$.

8. Expresa en sus otras formas los siguientes números complejos:
a) $3\cdot(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$; b) $3\cdot(\cos 60^\circ - i\sin 60^\circ)$; c) $2\cdot(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)$.
Haz su representación gráfica.

9. Indica tres números complejos que cumplan la siguiente condición:
a) Su argumento es 45º; b) Su módulo es 5; c) Su argumento es 270º.
Represéntalos gráficamente.

10. Demuestra la fórmula del producto de números complejos en forma polar: $m_\alpha \cdot n_\beta = (m\cdot n)_{(\alpha+\beta)}$.

11. Demuestra la fórmula de la división de números complejos en forma polar: $\dfrac{m_\alpha}{n_\beta} = \left(\dfrac{m}{n}\right)_{(\alpha-\beta)}$.

12. Aplicando la fórmula de Moivre para *n* = 2 obtén las razones trigonométricas del ángulo doble: $\sin(2\alpha)$ y $\cos(2\alpha)$.

13. Calcula y expresa el resultado final en forma binómica:

a) $2_{15^\circ} \cdot 5_{45^\circ}$; b) $5_{40^\circ} \cdot 4_{50^\circ}$;

c) $8_{90^\circ} : 2_{120^\circ}$; d) $\dfrac{10_{300^\circ}}{2_{60^\circ}}$.

14. Teniendo en cuenta que $1_{45^\circ} \cdot 1_{30^\circ} = 1_{75^\circ}$ y que $1_{45^\circ} : 1_{30^\circ} = 1_{15^\circ}$ halla los valores de:

a) sen 75º y cos 75º; b) sen 15º y cos 15º.

15. Cuando se multiplica un número complejo $z = m_\alpha$ por $i = 1_{90^\circ}$, $m_\alpha \cdot 1_{90^\circ} = m_{(\alpha+90^\circ)}$, se produce un giro de 90º, con centro en *O*, del vector representante de *z*. Si el triángulo de vértices *A*(2, 1), *B*(1, 3) y *C*(–2, –2) se gira 90º con centro en *O*, ¿cuáles serían sus vértices?

16. Aplicando el desarrollo de un binomio y el valor de las sucesivas potencias de *i*, calcula:

a) $(3+2i)^3$; b) $(1+i)^4$;

c) $(3-2i)^5$; d) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^6$.

17. Expresa en forma polar los números complejos $z_1 = 1+i$ y $z_2 = 1+\sqrt{3}i$. Calcula nuevamente las potencias $(1+i)^4$ y $\left(1+\sqrt{3}i\right)^6$ del problema anterior.

18. Calcula y expresa el resultado final en forma binómica:

a) $\left(2_{30^\circ}\right)^4$; b) $\left(1-\sqrt{3}i\right)^5$;

c) $\left(2\sqrt{3}+2i\right)^7$; d) $\left(\sqrt{5}i\right)^4$.

19. Calcula:

a) $\sqrt[3]{64}$; b) $\sqrt[3]{2-2i}$;

c) $\sqrt[4]{i}$; d) $\sqrt[4]{-8\sqrt{3}+8i}$;

e) $\sqrt[6]{-1}$; f) $\sqrt{2\sqrt{3}+2i}$.

Representa gráficamente las soluciones de los casos b) y e).

20. Calcula las soluciones complejas de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2+9=0$; b) $x^2-2x+5=0$;

c) $x^2+2x+10=0$; d) $x^2-4x+13=0$.

21. Resuelve las ecuaciones:

a) $\dfrac{-z+3iz-12}{z} = 3z+3i-1$; b) $2z^2+3iz+2=0$.

22. Halla una ecuación de segundo grado que tenga por raíces $z_1 = 2-i$ y $z_2 = 2+i$.

23. Encuentra una ecuación que tenga por raíces $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 1 - 2i$, $z_3 = -1$ y $z_4 = 2$.

24. Halla las soluciones reales y complejas de las ecuaciones:
a) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$; b) $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$.
En cada caso, comprueba el resultado para una de las soluciones.

25. Halla las soluciones reales y complejas de las ecuaciones:
a) $x^3 + 4x = 0$; b) $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$.
En cada caso, comprueba el resultado para una de las soluciones complejas.