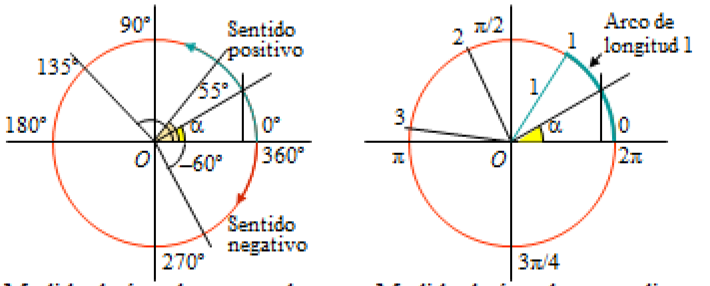
TEMA 6. TRIGONOMETRÍA

1. MEDIDA DE ÁNGULOS: GRADOS Y RADIANES

Un ángulo puede medirse en grados o en radianes.

- El grado es una medida sexagesimal: un ángulo completo (una vuelta completa) mide 360º. Un ángulo recto mide 90º y un llano, 180º.
- El radian es una medida longitudinal, numérica real: un radian es un ángulo que abarca un arco de longitud igual al radio con el que ha sido trazado. En una circunferencia de radio 1 una vuelta completa son 2π radianes; y media vuelta, π radianes.
- La relación entre ambas unidades es $360º = 2\pi$ radianes $\approx 6{,}28$ radianes. Un radian equivale, aproximadamente, a 57,3º.



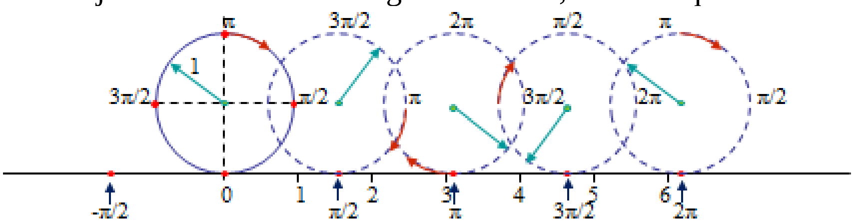
Medida de ángulos en grados   Medida de ángulos en radianes

Para representar y medir ángulos suele recurrirse a una circunferencia de radio 1 centrada en el origen (llamada goniométrica). El vértice de cada ángulo se sitúa en el centro, siendo uno de sus lados el eje positivo *OX*; los ángulos se consideran positivos si se miden en sentido inverso al movimiento de las manecillas de un reloj, y negativos en el mismo sentido de dicho movimiento.

Observaciones y aclaraciones:

1) Pueden considerase ángulos de más de una vuelta, mayores de 360º. Por ejemplo 540º, que equivale a dar vuelta y media. En la circunferencia, ese ángulo se representa como 180º.
También se pueden tomar ángulos negativos. Por ejemplo, el ángulo –60º, cuya abertura es de 60º, se mide en sentido negativo y se representa igual que el ángulo de 300º.

2) Los radianes son medidas numéricas, números reales; por tanto, no es necesario representarlos como ángulos. Suelen representarse en la recta real. Su posición en ella es la correspondiente al punto de contacto que se obtiene al rodar la circunferencia de radio 1 sobre la recta. (Así, π radianes se corresponde con el número real $\pi = 3{,}14\ldots$; 2π radianes con 6,28…). La medida en radianes se utilizará cuando se trabaje con las funciones trigonométricas; en el bloque de Cálculo.



3) Las calculadoras disponen de los modos DEG y RAD, para trabajar con grados o radianes, respectivamente. Teclas $\boxed{\text{sin}}$, $\boxed{\text{cos}}$ y $\boxed{\text{tan}}$.

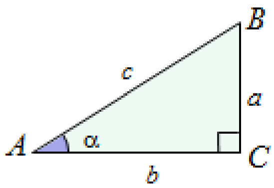
Así, en modo RAD:	sin 0 = 0;	sin 0,3 = 0,2955;	cos 1 = 0,5403;	tan π/6 = 0,5774.
En modo DEG:	cos 0º = 1;	sin 30º = 0,5;	sin 240º = – 8660;	tan 135º = –1.

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

Dado un ángulo cualquiera α, que se sitúa en un triángulo rectángulo como el de la figura, se definen las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, como siguen:

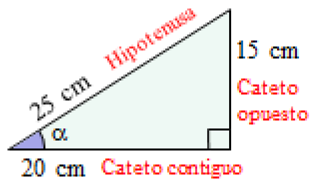
$$\text{sen}\ \alpha = \sin\alpha = \frac{CB}{AB} = \frac{a}{c}; \quad \cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}; \quad \text{tag}\ \alpha = \tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}.$$



Observaciones y aclaraciones:

1) Se utilizará indistintamente la notación sen α y sin α; tag α y tan α.

2) El seno relaciona la medida de la *altura* (del cateto opuesto al ángulo) con la de la hipotenusa; el coseno, la medida de la *base* (del cateto contiguo al ángulo) con la hipotenusa.



En el triángulo adjunto: $\text{sen}\ \alpha = \frac{15}{25} = 0,6$; $\cos\alpha = \frac{20}{25} = 0,8$.

3) La tangente relaciona la altura con la base (desplazamiento vertical respecto al horizontal). La tangente mide la pendiente del ángulo, la inclinación de la hipotenusa.

Que $\text{tag}\ \alpha = \frac{15}{20} = 0,75$ significa que un desplazamiento unitario a la derecha (de 1 cm, de 1 m) acarrea una elevación de 0,75 (cm, m).

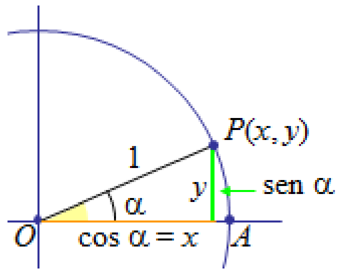
Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Para definir las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera suele recurrirse a la circunferencia goniométrica, con centro en el origen de coordenadas y de radio 1. El vértice de cada ángulo se sitúa en el centro, siendo uno de sus lados el eje positivo *OX*, lado *OA*; el otro lado puede abrirse determinando ángulos entre 0º y 360º; además ese lado corta a la circunferencia en un punto de coordenadas *P*(*x*, *y*). El ángulo es *AOP*.

- Los ángulos entre 0º y 90º cortan a la circunferencia en el primer cuadrante, siendo las coordenadas de *P*(*x*, *y*) ambas positivas. Además, para cualquier ángulo α se tiene:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{y}{1} = y \ \rightarrow \text{cateto opuesto: valor de la ordenada de } P(x, y).$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{1} = x \ \rightarrow \text{cateto contiguo: valor de la abscisa de } P(x, y).$$

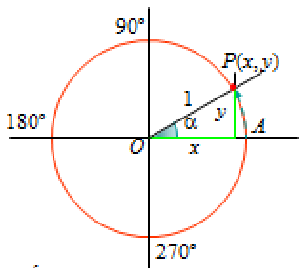


- Para ángulos mayores de 90º se generaliza el resultado anterior.

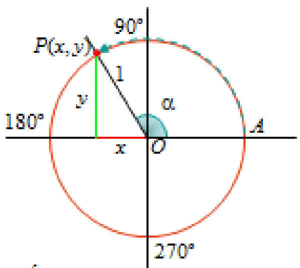
Esto es, para cualquier ángulo α, determinado por los puntos *A*(1, 0), *O*(0, 0)y *P*(*x*, *y*), se define:

$\text{sen}\ \alpha = y$, el valor de la ordenada de *P*(*x*, *y*);

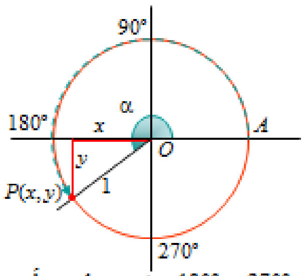
$\cos\alpha = x$, el valor de la abscisa de *P*(*x*, *y*).



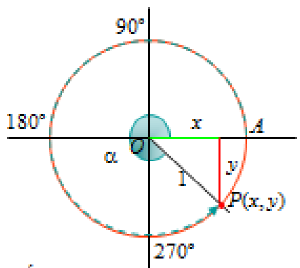
Ángulos entre 0º y 90º



Ángulos entre 90º y 180º



Ángulos entre 180º y 270º



Ángulos entre 270º y 360º

Como puede observarse en los dibujos anteriores:

- El seno de un ángulo α es positivo cuando mide entre 0º y 180º (primero y segundo cuadrante); es negativo cuando está en los cuadrantes tercero y cuarto: 180º < α < 360º.
- El coseno de un ángulo es positivo cuando α mide entre 0º y 90º o entre 270º y 360º (primero y cuarto cuadrante); es negativo cuando está en los cuadrantes segundo y tercero.

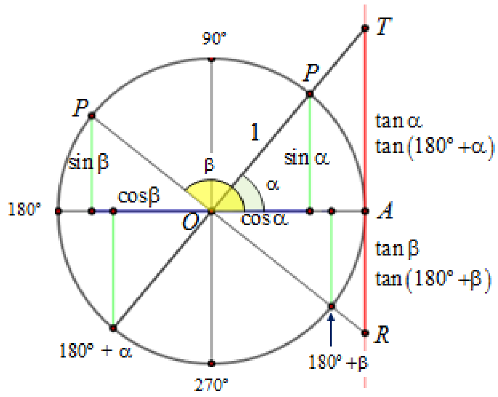
- El valor de la tangente viene dado por la longitud del segmento *AT*, pues $\tan\alpha = \dfrac{AT}{OA} = \dfrac{AT}{1} = AT$.

Para ángulos de otros cuadrantes se prolonga el lado *OP* hasta cortar a la vertical por *A*. Así se obtiene que:

$$\tan\alpha = \tan(180^\circ+\alpha) = \left|\overline{AT}\right| \text{ y}$$

$$\tan\beta = \tan(180^\circ+\beta) = \left|\overline{AR}\right|.$$

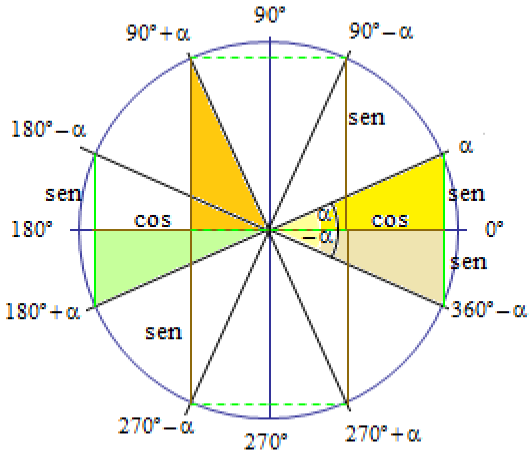
Su signo se deduce observando que $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.



Relación entre las razones trigonométricas de algunos ángulos

Al girar el lado variable (*OP*) del ángulo *AOP*, se generan una serie de regularidades que permiten conocer las razones trigonométricas de otros ángulos a partir de las de α. (En la siguiente figura puede verse que todos los triángulos coloreados son iguales, salvo giros). En concreto se cumple:

- Complementarios: $\sin(90^\circ-\alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90^\circ-\alpha) = \sin\alpha$; $\tan(90^\circ-\alpha) = \dfrac{1}{\tan\alpha}$.
- Suplementarios: $\sin(180^\circ-\alpha) = \sin\alpha$; $\cos(180^\circ-\alpha) = -\cos\alpha$; $\tan(180^\circ-\alpha) = -\tan\alpha$.
- Opuestos: $\sin(360^\circ-\alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(360^\circ-\alpha) = \cos\alpha$; $\tan(360^\circ-\alpha) = -\tan\alpha$.
- Ángulo + 90º: $\sin(90^\circ+\alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90^\circ+\alpha) = -\sin\alpha$; $\tan(90^\circ+\alpha) = -\dfrac{1}{\tan\alpha}$.
- Ángulo + 180º: $\sin(180^\circ+\alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(180^\circ+\alpha) = -\cos\alpha$; $\tan(180^\circ+\alpha) = \tan\alpha$.



Ejemplos:

De sen 25º = 0,4226 ⇒ cos 65º = sen 155º = cos 295º = 0,4226;
⇒ cos 115º = sen 205º = cos 245º = sen 335º = sen(–25º) = –0,4226.

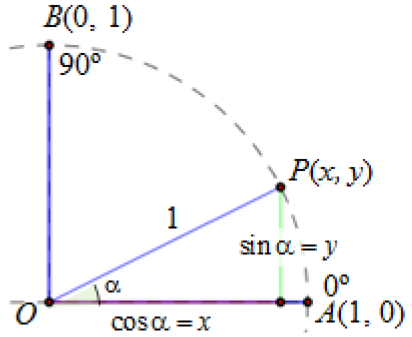
De cos 25º = 0,9063 ⇒ sen 65º = sen 115º = cos 335º = cos(–25º) = 0,9063;
⇒ cos 155º = cos 205º = sen 245º = sen 295º = –0,9063.

De tan 45º = 1 ⇒ tan (90º + 45º) = tan 135º = –1; tan (45º + 180º) = tan 225º = 1;
⇒ tan (360º – 45º) = tan 315º = –1.

Razones trigonométricas de 0º, 30º, 45º, 60º y 90º

- Ángulos de 0º y 90º: basta con tener en cuenta que para el ángulo α = *AOP*, el seno viene dado por la ordenada *y* del punto *P* y el coseno, por su abscisa *x*.

Esto es: $\sin\alpha = y$; $\cos\alpha = x$.



Para 0º, las coordenadas de *P* son *A*(1, 0), luego:

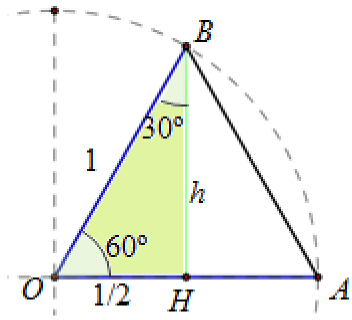
$$\sin 0^\circ = 0;\quad \cos 0^\circ = 1;\quad \tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0.$$

Para 90º, las coordenadas de *P* son *B*(0, 1), luego:

$$\sin 90^\circ = 1;\quad \cos 90^\circ = 0;\ \tan 90^\circ = \frac{1}{0} = \infty.$$

- Ángulos de 30º y 60º: se considera un triángulo equilátero de lado 1.

Cada uno de sus ángulos mide 60º; la altura, que coincide con la bisectriz, divide el ángulo superior en dos de 30º; además cae en la mitad de la base.



Por Pitágoras se sabe que: $h^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Por tanto, para 60º:

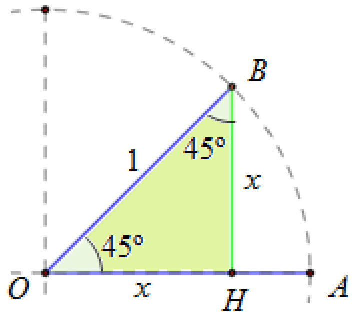
$$\sin 60^\circ = \frac{h}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2};\qquad \cos 60^\circ = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2};$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}.$$

De manera análoga, para 30º:

$$\sin 30^\circ = \frac{OH}{OB} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2};\quad \cos 30^\circ = \frac{h}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2};\qquad \tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

- Ángulo de 45º: se considera un triángulo *OBH*, que es rectángulo e isósceles.



Como $x^2 + x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Por tanto:

$$\sin 45^\circ = x = \frac{\sqrt{2}}{2};\qquad \cos 45^\circ = x = \frac{\sqrt{2}}{2};\qquad \tan 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = 1.$$

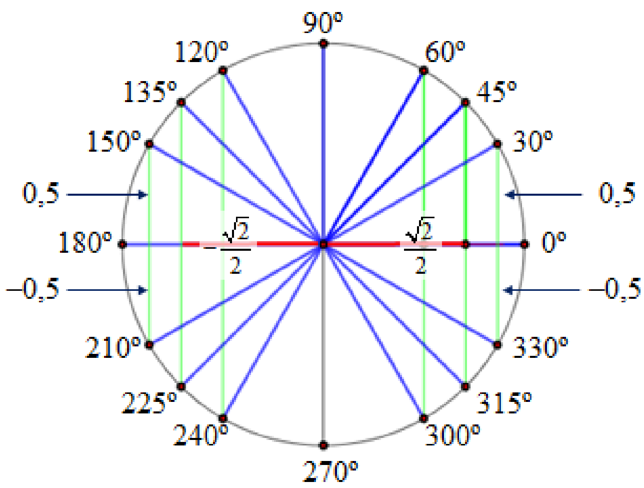
- Teniendo en cuenta estos resultados se pueden conocer, sin necesidad de calculadora, las razones trigonométricas de otros muchos ángulos relacionados con ellos por simetría.

Así, por ejemplo:

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = 0,5;$$

$$\sin 210^\circ = \sin 330^\circ = -0,5;$$

$$\cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \cos 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



3. RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Para cualquier ángulo α se cumplen tres relaciones fundamentales, que son las siguientes:

$$(1)\ \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (2)\ \operatorname{tag}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad (3)\ 1+\operatorname{tag}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Por tanto, conociendo una cualquiera de las razones trigonométricas (y el cuadrante en el que está el ángulo) se pueden determinar las demás.

→ La demostración de estas relaciones es casi inmediata:

(1) Es una aplicación del teorema de Pitágoras:

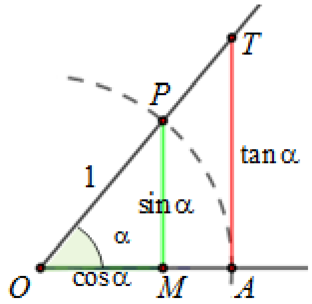
Como *OPM* es rectángulo: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

(2) Es una consecuencia del teorema de Tales:

Como $\tan\alpha = \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

(3) Es una transformación algebraica:

$$1+\tan^2\alpha = 1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$



Ejemplos:

Estas relaciones se aplican para determinar las restantes razones trigonométricas a partir de una de ellas. Así:

a) Si se sabe que sen α = 0,8, entonces:

$0{,}8^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 0{,}36 \to \cos\alpha = \pm 0{,}6$.

El valor de tan α = $\dfrac{0{,}8}{\pm 0{,}6} = \pm\dfrac{4}{3} = \pm 1{,}33...$

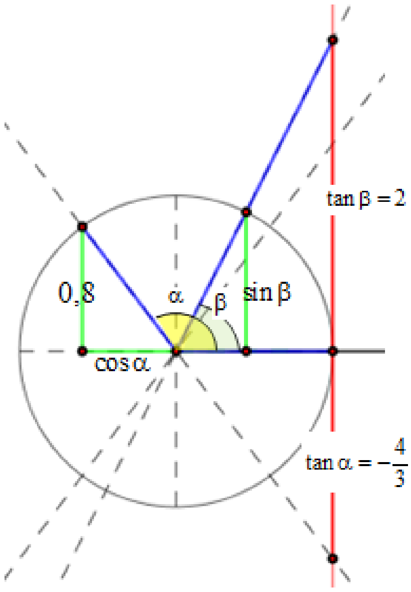
Si, por ejemplo, α perteneciese al segundo cuadrante, entonces se elegirían las soluciones negativas.

b) Si tan β = 2, entonces:

$$1+2^2 = \frac{1}{\cos^2\beta} \Rightarrow \cos^2\beta = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{\pm\sqrt{5}}.$$

Como $\sin\beta = \cos\beta\cdot\tan\beta \Rightarrow \sin\beta = \dfrac{2}{\pm\sqrt{5}}$.

Si β pertenece al primer cuadrante, entonces se eligen las soluciones positivas.



Observaciones y advertencias:

1) $\operatorname{sen}^2\alpha = \sin^2\alpha$ se lee seno cuadrado de α y su significado es: $\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2 = (\sin\alpha)\cdot(\sin\alpha)$;

$\cos^2\alpha$ se lee coseno cuadrado de α; su significado es: $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2$; ídem, $\tan^2\alpha = (\tan\alpha)^2$.

2) $\operatorname{sen}\alpha^2 = \sin\alpha^2$ se lee seno de α al cuadrado y su significado es: $\sin\alpha^2 = \sin\left(\alpha^2\right) = \sin(\alpha\cdot\alpha)$.

Idénticamente, $\cos\alpha^2 = \cos\left(\alpha^2\right) = \cos(\alpha\cdot\alpha)$ y $\operatorname{tag}\alpha^2 = \operatorname{tag}\left(\alpha^2\right)$.

Por tanto: $\operatorname{sen}^2\alpha \neq \operatorname{sen}\alpha^2$; $\cos^2\alpha \neq \cos\alpha^2$; $\operatorname{tag}^2\alpha \neq \operatorname{tag}\alpha^2$

3) $\sin 2\alpha$ se lee seno de dos alfa; su significado es: $\sin 2\alpha = \sin(2\alpha) = \sin(\alpha+\alpha)$.

$2\sin\alpha$ se lee dos (por) seno de alfa; su significado es: $2\sin\alpha = 2\cdot(\sin\alpha) = \sin\alpha + \sin\alpha$.

Por tanto:

$\sin 2\alpha \neq 2\sin\alpha$. Igualmente: $\cos 2\alpha \neq 2\cos\alpha$; $\tan 2\alpha \neq 2\tan\alpha$.

Razones trigonométricas de sumas y diferencias: ángulo doble y mitad

Lo indicado en las observaciones anteriores significa que las razones trigonométricas no se comportan linealmente; se comportan sinusoidalmente. Esto se concreta en las clásicas fórmulas para hallar las razones trigonométricas de sumas y restas de ángulos, que se dan a continuación.

Fórmulas de las razones trigonométricas de sumas y diferencias, ángulo doble y mitad

senos	cosenos	tangentes
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$	$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$	$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$	$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$	$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$
$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$	$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$	$\tan(2\alpha)=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$	$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$	$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

Fórmulas de transformación de sumas en productos

$$\sin A+\sin B=2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}\,;\qquad \sin A-\sin B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}\,;$$

$$\cos A+\cos B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}\,;\qquad \cos A-\cos B=2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}\,.$$

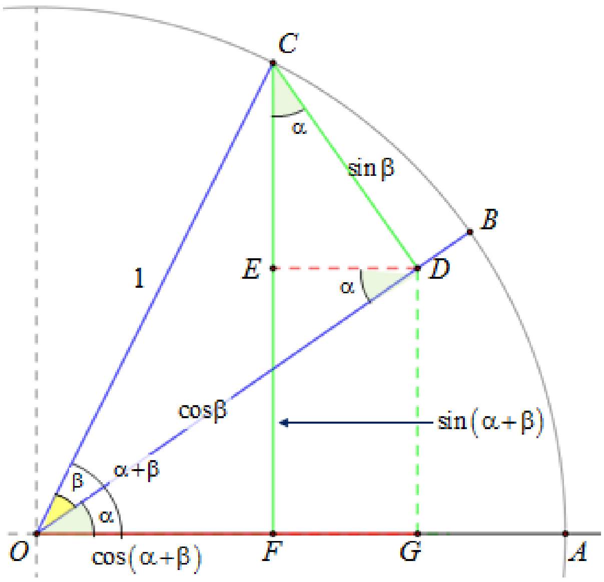
- **Demostración** de $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$

Sean los ángulos $\alpha=AOB$ y $\beta=BOC$; su suma $\alpha+\beta=AOC$.

Puede observarse que $\sin(\alpha+\beta)=CF$.

Si desde el punto *C* se traza una perpendicular al lado *OB*, al que corta en *D*; y desde *D* una paralela a *OA*, que corta a *CF* en *E*, entonces:

1. *CF* = *CE* + *EF* = *CE* + *DG*.
2. El ángulo *ECD* = α, pues: *ODE* = α, por alternos internos, y α + *EDC* = 90º.



Con esto:

En el triángulo *OCD*, se tiene:

OD = cos β; *CD* = sin β.

En el triángulo *ODG*,

$$\sin\alpha=\frac{DG}{OD}=\frac{DG}{\cos\beta}\Rightarrow DG=\sin\alpha\cdot\cos\beta\,.$$

En el triángulo *ECD*,

$$\cos\alpha=\frac{CE}{CD}=\frac{CE}{\sin\beta}\Rightarrow CE=\cos\alpha\cdot\sin\beta\,.$$

Por tanto, como

$$\sin(\alpha+\beta)=CF=CE+DG\Rightarrow\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta\,.$$

→ La lectora o el lector interesado debería plantearse demostrar alguna de las demás fórmulas. (El dibujo de arriba sirve para demostrar que $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$, considerando que *OF* = *OG* – *FG*). En los Problemas Propuestos se volverá sobre el asunto.

Practicando con las fórmulas anteriores

→ La clave de las fórmulas vistas consiste en saber que existen, en saber que las razones trigonométricas hay que tratarlas con cuidado, y que su comportamiento es *sinuoso*. (En este contexto puede recordarse el viejo adagio sobre la prudencia en las cosas, pues hay que "verlas venir, dejarlas pasar, estar de vuelta y saber trigonometría").

En la página anterior se han escrito 16 fórmulas que, aunque no sea necesario conocerlas todas de memoria, es conveniente que, al menos, recuerdes las tres primeras (las demás podrás deducirlas a partir de ellas). A continuación, se propondrán algunos ejercicios para aprender a manejarlas.

Ejercicio 1

A partir de la fórmula $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$ deduce que:

a) $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$; b) $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

Solución:

a) Si β = α ⇒ $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\alpha)=\cos(2\alpha)=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

b) Aplicando la fórmula anterior a α, se tiene: $\cos\alpha=\cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Por otra parte, para cualquier ángulo se cumple: $1=\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Sumando, miembro a miembro, ambas igualdades: $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Despejando $\cos\frac{\alpha}{2}$ se tiene la expresión buscada: $\frac{1+\cos\alpha}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

Ejercicio 2

Aplicando las fórmulas anteriores y teniendo en cuenta las razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º, halla los valores de:

a) cos 15º y sin 15º; b) sin 75º; c) tan 105º.

Solución:

a) Aplicando las fórmulas de $\cos\frac{\alpha}{2}$ y $\sin\frac{\alpha}{2}$, para el caso de α = 30º:

$$\cos 15^o=+\sqrt{\frac{1+\cos 30^o}{2}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}};$$

$$\sin 15^o=+\sqrt{\frac{1-\cos 30^o}{2}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

b) Por la fórmula del seno de una suma de ángulos:

$$\sin 75^o=\sin(30^o+45^o)=\sin 30^o\cdot\cos 45^o+\cos 30^o\cdot\sin 45^o=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right).$$

c) Como 105º = 90º + 15º ⇒ (por "simetrías"): sin 105º = cos 15º; cos 105º = –sin 15º →

$$\tan 105^o=\frac{\sin 105^o}{\cos 105^o}=\frac{\cos 15^o}{-\sin 15^o}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}{-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

Ejercicio 3

Utilizando las fórmulas de sumas y restas de las razones trigonométricas, halla el valor de:

a) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$; b) $\cos 205^\circ - \cos 85^\circ$.

<u>Solución</u>:

a) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cdot\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2} = 2\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

b) $\cos 195^\circ - \cos 75^\circ = -2\sin\frac{195^\circ+75^\circ}{2}\cdot\sin\frac{195^\circ-75^\circ}{2} = -2\sin 135^\circ\cdot\sin 60^\circ = -2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Ejercicio 4

Demuestra las siguientes identidades:

a) $\frac{1+\cos(2\alpha)}{2} = \cos^2\alpha$; b) $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$.

<u>Solución</u>:

a) Como $1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ y $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, sustituyendo se tiene:

$$\frac{1+\cos(2\alpha)}{2} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2} = \frac{2\cos^2\alpha}{2} = \cos^2\alpha.$$

→ De otra forma.

Sumando miembro a miembro las igualdades: $\begin{cases} 1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \\ \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha$. Despejando: $\frac{1+\cos(2\alpha)}{2} = \cos^2\alpha$.

b) Restando miembro a miembro: $\begin{cases} 1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \\ \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{cases} \Rightarrow 1 - \cos(2\alpha) = 2\sin^2\alpha$.

Despejando: $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$.

Otras razones trigonométricas: inversas

A veces suelen utilizarse las inversas de las razones seno, coseno y tangente, que reciben los siguientes nombres:

<u>Cosecante</u>: $\text{cosec}\ \alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$. <u>Secante</u>: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$. <u>Cotangente</u>: $\text{cotan}\ \alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$

Ejemplos:

a) $\text{cosec}\ 30^\circ = \frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{0,5} = 2$. La cosecante no está definida cuando sen α = 0: α = 0º; 180º…

b) $\sec 30^\circ = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. La secante no está definida cuando cos α = 0: α = 90º; 270º…

c) $\text{cotan}\ 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}/3} = \sqrt{3}$. La cotangente no está definida si tan α = 0: α = 0º; 180º…

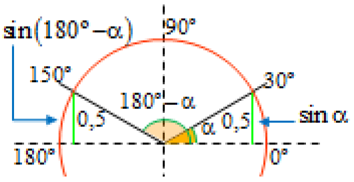
4. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

En estas ecuaciones la incógnita aparece ligada a alguna razón trigonométrica.
Resolver una ecuación trigonométrica es encontrar todos los valores angulares que la satisfacen.
En los casos sencillos se resuelven aplicando las razones trigonométricas inversas.
Estas razones permiten hallar un ángulo del que se conoce su seno, su coseno o su tangente.
→ En las calculadoras aparecen encima de las teclas $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$ y $\boxed{\tan}$, como **sin^{-1}**, **cos^{-1}** y **tan^{-1}**.
La forma clásica de referirse a ellas es "arco seno" (arcsen o arcsin), "arco coseno" (arccos) y "arco tangente" (arctag o arctan). Se definen como sigue:

Arco seno (sin^{-1})
→ En grados: Para un número y comprendido entre –1 y 1: $\arcsin y = \alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = y$.
Hay dos soluciones en cada vuelta: α y 180º – α. (Para $y = \pm 1$ ambas coinciden).
→ En radianes: Si x es un número que representa un valor en radianes, dado otro número y comprendido entre –1 y 1: $\arcsin y = x \Leftrightarrow \sin x = y$.

Ejemplos:
a) arcsin 0,5 = 30º, ya que sin 30º = 0,5 → el valor de arcsin 0,5 se obtiene con la calculadora: tecla sin^{-1} (que suele activarse pulsando $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin}$ 0.5 $\boxed{=}$).
Pero también arcsin 0,5 = 150º, pues igualmente sin 150º = 0,5.
Así pues, hay dos ángulos, en el primer giro, cuyo seno vale 0,5. Y dos ángulos más en cada uno de los sucesivos giros. Por tanto, los ángulos α que cumplen que su seno es 0,5, que es lo que significa arcsin 0,5 = α, son: $\alpha = \begin{cases} 30^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 150^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases}$, ($k$ es un número entero).

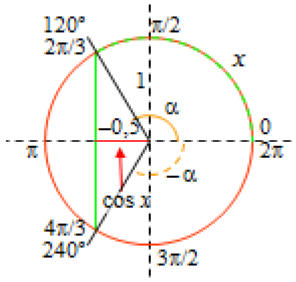
Las soluciones en radianes serían: arcsin 0,5 = x ⇔ $x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$.



b) La ecuación arcsin (±1) solo tiene una solución:
$\arcsin 1 = 90^\circ$ (π/2 en radianes); $\arcsin(-1) = 270^\circ$ (3π/2 en radianes).

Arco coseno (cos^{-1})
→ En grados: Para un número y comprendido entre –1 y 1: $\arccos y = \alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = y$.
Hay dos soluciones en cada vuelta: α y 360º – α. (Para $y = \pm 1$ ambas coinciden).
→ En radianes: Si x es un número que representa un valor en radianes, dado otro número y comprendido entre –1 y 1: $\arccos y = x \Leftrightarrow \cos x = y$.

Ejemplos:
a) arccos (–0,5) = 120º, ya que cos 120º = –0,5 → (suele activarse pulsando $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\cos}$ –0.5 $\boxed{=}$).
Pero también arccos (–0,5) = 240º, pues igualmente cos 240º = –0,5.
En general, arccos (–0,5) = α ⇔ $\alpha = \begin{cases} 120^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 240^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases}$



Las soluciones en radianes serían: arccos (–0,5) = x ⇔ $x = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

b) Tienen solución única: $\arccos 1 = 0^\circ$ (0 radianes); $\arccos(-1) = 180^\circ$ (π/2 radianes).

Arco tangente ($\tan^{-1}$)

$\rightarrow$ En grados: Para un número *y* comprendido entre $-\infty$ y $+\infty$: $\arctan y = \alpha \Leftrightarrow \tan\alpha = y$.

Hay dos soluciones en cada vuelta: α y 180º + α.

$\rightarrow$ En radianes: Si *x* es un número que representa un valor en radianes, dado otro número *y*, comprendido entre $-\infty$ y $+\infty$: $\arctan y = x \Leftrightarrow \tan x = y$.

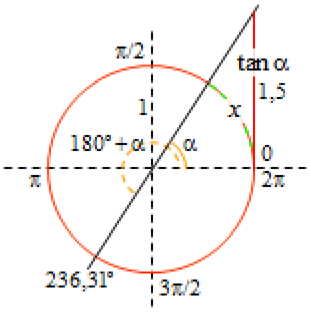
Ejemplo:

a) arctan 1,5 = 56,31º ya que tan 56,31º = 1,5 → ($\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\tan}$ 1.5 $\boxed{=}$).

También arctan 1,5 = 236,31º = 56,31º + 180º, pues tan 236,31º = 1,5.

En general: arctan 1,5 = α ⇔ $\alpha = 56{,}31 + k\cdot 180^{\circ}$.

Las soluciones en radianes serían: arctan 1,5 = *x* ⇔ $x = 0{,}9828 + k\pi$.



b) Pueden considerarse casos particulares:

arctan (+∞) = 90º → π/2; arctan (–∞) = 270º → 3π/2.

<u>Advertencia</u>:

Al hallar $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$, las calculadoras suelen dar el valor más cercano a 0º (positivo o negativo), que no siempre es la solución buscada. (Recuerda que entre 0º y 360º, en la primera vuelta, hay dos ángulos cuya razón trigonométrica es la misma).

Ejemplos:

a) Si se sabe que sen α = 0,8 y que α está en el primer cuadrante, entonces α = 53,13º; pero si α estuviese en el segundo cuadrante, entonces habría que tomar α = 180º – 53,13º =126,87º.

b) Si se sabe que cos α = 0,4 y que α está en el primer cuadrante, entonces α = 66,42º; pero si α está en el cuarto cuadrante, entonces α = –66,42º = 360º – 66,42º = 293,58º.

c) Si tan α = –2 y α está en el segundo cuadrante, entonces α = 116,57º; pero si α estuviese en el cuarto cuadrante, entonces α = 180º + 116,57º = 296,57º = –63,57º.

Ecuaciones trigonométricas sencillas (casi inmediatas)

La incógnita aparece ligada solo a una razón trigonométrica.

Se resuelven aplicando las razones trigonométricas inversas.

Conviene comprobar los resultados ya que pueden que aparezcan *soluciones extrañas*.

- <u>Ecuaciones con seno</u>:

La más elemental es $\sin x = c$, con *c* comprendido entre –1 y 1. Su solución es $x = \arcsin c$.

$\rightarrow$ La ecuación $a\cdot\sin(bx) = c$ se resuelve despejando como sigue:

$$a\cdot\sin(bx) = c \Rightarrow \sin(bx) = \frac{c}{a} \Rightarrow bx = \arcsin\left(\frac{c}{a}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{b}\cdot\arcsin\left(\frac{c}{a}\right).$$

Ejemplo:

- $2\sin(3x) = -1 \Rightarrow \sin(3x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 3x = \arcsin(-0{,}5) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3x = \begin{cases} -30^{\circ} + 360^{\circ}\cdot k \\ -150^{\circ} + 360\cdot k \end{cases} \Rightarrow 3x = \begin{cases} 330^{\circ} + 360^{\circ}\cdot k \\ 210^{\circ} + 360\cdot k \end{cases} \rightarrow \text{(despejando } x\text{)}: \ x = \begin{cases} 110^{\circ} + 120^{\circ}\cdot k \\ 70^{\circ} + 120^{\circ}\cdot k \end{cases}.$$

Hay seis soluciones en cada vuelta. En la primera: 70º, 110º, 190º, 230º, 310º y 350º.

<u>Nota</u>: Sería un grave error escribir: $\sin(3x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{6}$ …; $\sin(3x)$ es “inseparable”.

Ecuaciones con coseno:
La más elemental es $\cos x = c$, con c comprendido entre –1 y 1. Su solución es $x = \arccos c$.
→ La ecuación $a \cdot \cos(bx) = c$ se resuelve despejando como sigue:

$$a \cdot \cos(bx) = c \Rightarrow \cos(bx) = \frac{c}{a} \Rightarrow bx = \arccos\left(\frac{c}{a}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{b} \cdot \arccos\left(\frac{c}{a}\right).$$

Ejemplos:

a) $\sqrt{2}\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \begin{cases} 45^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 315^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}.$

b) $\cos 2x = 1 \Rightarrow 2x = \arccos 1 = k \cdot 360^\circ \Rightarrow x = k \cdot 180^\circ \rightarrow$ En radianes, $x = k \cdot \pi$.

c) $\cos\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \frac{x}{2} = \begin{cases} 150^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 210^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$ → Despejando *x*, multiplicando por 2:

$\Rightarrow x = \begin{cases} 300^\circ + 720^\circ \cdot k \\ 420^\circ + 720^\circ \cdot k \end{cases}.$

Nota: Sería un grave error multiplicar por 2 la ecuación dada y escribir: $\cos x = -\sqrt{3}$; que acarrearía, además, el absurdo de que $|\cos x| > 1$. Recuerda que $\cos\frac{x}{2} \neq \frac{\cos x}{2}$.

- Ecuaciones con tangente:

La más elemental es $\tan x = c$. Su solución es $x = \arctan c$.
→ La ecuación $a \cdot \tan(bx) = c$ se resuelve despejando como sigue:

$$a \cdot \tan(bx) = c \Rightarrow \tan(bx) = \frac{c}{a} \Rightarrow bx = \arctan\left(\frac{c}{a}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{b} \cdot \arctan\left(\frac{c}{a}\right).$$

Ejemplos:

a) $\tan x = -1 \Rightarrow x = \arctan(-1) \Rightarrow x = 135^\circ + 180^\circ \cdot k \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi.$

b) $4\tan\frac{x}{2} = 5 \Rightarrow \tan\frac{x}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{x}{2} = \arctan\frac{5}{4} \Rightarrow \frac{x}{2} = 51{,}34 + 180^\circ \cdot k \Rightarrow x = 102{,}68^\circ + 360^\circ \cdot k.$

Ejercicio 5

Da, en grados, todas las soluciones entre 0º y 360º (primera vuelta) de las ecuaciones:

a) $2\sin\frac{x}{2} = -1$; b) $3\cos 3x = 0$.

Solución:

a) $2\sin\frac{x}{2} = -1 \Rightarrow \sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{x}{2} = \begin{cases} 210^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 330^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 420^\circ + 720^\circ \cdot k \\ 660^\circ + 720^\circ \cdot k \end{cases}.$

En la primera vuelta, para *k* = 0, no hay ninguna solución. (En sentido opuesto, para *k* = –1 se encuentran dos: $x = 420^\circ - 720^\circ = -300^\circ$; $x = 660^\circ - 720^\circ = -60^\circ$).

b) $3\cos 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = \begin{cases} 90^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 270^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 30^\circ + 120^\circ \cdot k \\ 90^\circ + 120^\circ \cdot k \end{cases}$. Para *k* = 0, 1 y 2 se encuentran soluciones en la primera vuelta, que son: 30º, 90º, 150º, 210º, 270º y 330º.

Otras ecuaciones trigonométricas (con sumas y productos)

Para resolverlas hay que realizar transformaciones en la ecuación inicial (aplicando las fórmulas conocidas) hasta que queden en función de una única razón trigonométrica.
Una vez resueltas conviene comprobar los resultados ya que pueden aparecer *soluciones extrañas*.
Practicamos con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1: Resuelve la ecuación $2\cos^2 x = 3\sin x$.

- Aplicando la identidad $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ y operando se obtiene una ecuación de segundo grado:

$$2\cos^2 x = 3\sin x \Rightarrow 2\left(1-\sin^2 x\right) = 3\sin x \Rightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \to \text{si } c = \sin x \to$$

$$2c^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow c = \frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3\pm 5}{4} = \begin{cases} 0,5 \\ -2 \end{cases}.$$

Si $c = \sin x = 0,5 \Rightarrow x = \begin{cases} 30^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 150^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases}$.

La solución $c = \sin x = -2$ carece de sentido.

La aplicación **Mathway** da la solución en radianes.
En este caso se obtiene:
$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$,
para cualquier número entero *n*.

Ejemplo 2: Resuelve la ecuación $\sin 2x + \sin x = 0$.

- Aplicando la identidad $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ y operando se obtiene:

$\sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow 2\sin x\cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x\left(2\cos x + 1\right) = 0 \Rightarrow$ (alguno de los factores debe ser 0) $\to \begin{cases} \sin x = 0 \\ 2\cos x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \arcsin 0 \to x = 0^\circ, 180^\circ \\ x = \arccos\left(-1/2\right) \to x = 120^\circ, 240^\circ \end{cases}$.

Ejemplo 3: Resuelve la ecuación $2\sin x = 1-\cos 2x$.

- Aplicando la identidad $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ y operando se obtiene:

$$2\sin x = 1-\cos 2x \Rightarrow 2\sin x = 1-\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) \Rightarrow 2\sin x = 1-\left(1-\sin^2 x - \sin^2 x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sin x = 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x\left(\sin x - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \arcsin 0 \to x = 0^\circ, 180^\circ \\ x = \arcsin 1 \to x = 90^\circ \end{cases}.$$

Un sistema de ecuaciones trigonométricas

Los sistemas de ecuaciones trigonométricas se presentan raramente. Pueden hacerse por cualquier método.
A modo de ejemplo se propone el sistema:

$$\begin{cases} \sin x + \cos 2y = 0 \\ x + y = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x + \cos 2y = 0 \\ x = 90^\circ - y \end{cases} \Rightarrow \sin\left(90^\circ - y\right) + \cos 2y = 0 \to (\sin\left(90^\circ - y\right) = \cos y \to$$

$$\cos y + \cos 2y = 0 \Rightarrow \cos y + \cos^2 y - \sin^2 y = 0 \Rightarrow \cos y + \cos^2 y - \left(1-\cos^2 y\right) = 0 \Rightarrow$$

$$2\cos^2 y + \cos y - 1 = 0 \Rightarrow \cos y = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1\pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}.$$

Si $\cos y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 60^\circ; 300^\circ \to x = 30^\circ$; $x = -210^\circ$.

Si $\cos y = -1 \Rightarrow y = 180^\circ \to x = -90^\circ$.

Los pares solución son: $(x, y) = (30^\circ, 60^\circ)$; $(-210^\circ, 300^\circ)$; $(-90^\circ, 180^\circ)$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 7 y 9 cm. Halla las razones trigonométricas de sus ángulos agudos. ¿Cuánto valen esos ángulos?

2. Expresa en radianes los ángulos de:
0º, 30º, 45º, 60º, 90º, 120º, 135º, 150º, 180º, 210º, 225º, 240º, 270º, 300º, 315º y 360º.

3. Expresa en grados los radianes: $\pi/6$; 1,2; $3\pi/4$; $5\pi/4$; $2\pi/3$; 3π; $-2\pi/5$; -3π.

4. Con la calculadora en el modo DEG halla:
a) sen 80º b) cos 33º c) tag 125º d) sen 220º e) tag 26º

5. Con la calculadora en el modo RAD halla:
a) cos 1; b) sen 0,5; c) tag ($\pi/5$); d) sen ($5\pi/2$); e) cos (-3π).

6. Utilizando la calculadora, halla en el modo que proceda, las razones trigonométricas que se indican:
a) sin 30º; b) cos 240º; c) tan 120º; d) tan ($2\pi/3$); e) sin 1,5;
e) sin ($\pi/3$); f) cos ($5\pi/3$); g) cos 0,8; h) tan ($\pi/2$); i) sin 270º.

7. Sabiendo que sen α = 0,4 y que 0º < α < 90º, halla las demás razones trigonométricas de α.

8. Si $\sin\alpha = -0,3$ y α es un ángulo del cuarto cuadrante determina sus otras razones trigonométricas.

9. Sabiendo que cos α = –0,5, $\alpha \in$ (90º, 180º), halla las demás razones trigonométricas de α.

10. Sabiendo que tag α = 4,01, 180º < α < 270º, halla las demás razones trigonométricas de α.

11. Si $\tan\alpha = -1,5$ y $90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$ determina las restantes razones trigonométricas.

12. Dibuja en la circunferencia goniométrica los ángulos de 30º, 60º, 120º, 210º y 300º. Obtén sus razones trigonométricas a partir de las del ángulo de 30º.

13. Dibuja en la circunferencia goniométrica los ángulos de 45º, 135º, 225º y 315º. Obtén sus razones trigonométricas a partir de las del ángulo de 45º.

14. Halla con la calculadora los valores de *x*, entre 0º y 360º, que verifican:
a) sin *x* = 0,6; b) sin *x* = –0,8; c) cos *x* = 0,25; d) $\tan x = -\sqrt{3}$.

15. Demuestra la fórmula $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$.

16. A partir de las fórmulas de $\sin(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha+\beta)$ obtén la de $\tan(\alpha+\beta)$.

17. A partir de las fórmulas anteriores obtén las razones trigonométricas del ángulo doble.

18. A partir de las fórmulas trigonométricas de sumas de ángulos y teniendo en cuenta que α – β = α + (–β) , obtén las fórmulas de las razones trigonométricas de la diferencia de ángulos: $\sin(\alpha-\beta)$; $\cos(\alpha-\beta)$ y $\tan(\alpha-\beta)$.

19. Comprueba la identidad $\tan(\alpha+45^\circ)+\tan(\alpha-45^\circ)=2\tan(2\alpha)$.

20. Demuestra las siguientes identidades:

a) $\tan\alpha=\dfrac{\sin(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}$; b) $\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\dfrac{1-\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}$.

21. Demuestra las fórmulas de transformación de sumas en productos:

a) $\sin A+\sin B=2\cdot\sin\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2}$; $\sin A-\sin B=2\cdot\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\sin\dfrac{A-B}{2}$.

b) $\cos A+\cos B=2\cdot\cos\dfrac{A+B}{2}\cdot\cos\dfrac{A-B}{2}$; $\cos A-\cos B=2\cdot\sin\dfrac{A+B}{2}\cdot\sin\dfrac{A-B}{2}$.

22. Utilizando las fórmulas de transformación de sumas en productos y empleando las razones conocidas de los ángulos 0º, 30º,45º…, halla los valores de:

a) $\sin 165^\circ+\sin 105^\circ$; b) $\sin 165^\circ-\sin 105^\circ$; c) $\cos 75^\circ+\cos 15^\circ$; d) $\cos 105^\circ-\cos 15^\circ$.

23. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $2\cos(2x)=-1$; b) $\sin\dfrac{x}{2}=-0{,}5$; c) $2\tan(3x)=4$; d) $4\sin x=2$.

Indica en cada caso las soluciones en el primer giro.

24. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2\cos(-x)=-0{,}5$; b) $1+\cos(2x)=0$; c) $1+2\sin x=0$; d) $\tan(2x)=0$.

Indica en cada caso las soluciones en el primer giro.

25. Resuelve:

a) $2\sin x\cdot\cos 2x=0$; b) $(1-\sin 2x)(1-\cos^2 x)=0$; c) $\cos 2x\cdot(1-\tan 3x)=0$.

Da todas las soluciones del primer giro.

26. Resuelve las ecuaciones trigonométricas siguientes:

a) $\sin 2x=\sin x$; b) $\sin x=\cos x$; c) $\tan 2x+\tan x=0$.

27. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sin x+\cos 2x=1$; b) $\tan x=5\sin x$; c) $\cos(2x)+3\sin x=2$.

28. Resuelve el sistema: $\begin{cases}2\sin x-\cos y=3/2\\ \sin x+2\cos y=-1/2\end{cases}$.

29. En un triángulo rectángulo la bisectriz de un ángulo agudo corta al cateto opuesto en dos trozos de longitudes 1 y 2. ¿Cuál es la longitud del segmento de bisectriz interior al triángulo?
<u>Sugerencia</u>: Utiliza la fórmula de $\tan(2\alpha)$.