UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2018-2019**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.

b) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a = 0$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$.

b) (1 punto) Encontrar un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = z$ y la recta s que pasa por el punto $(2, -5, 1)$ y tiene dirección $(-1, 0, -1)$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.

b) (1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s.

c) (0.5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10 %. Se pide:

a) (1 punto) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.

b) (1.5 puntos) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.
Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar su dominio.

b) (1.5 puntos) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) (0.5 puntos) Calcular los límites laterales $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $A(2,1,0)$ y el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 4z = 36$, se pide:

a) (0.75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.

c) (0.75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80 % de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

a) (1 punto) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.

b) (1.5 puntos) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas la matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ 1 & a & 2 & 2-a\\ -1 & 2 & a & a-2\end{pmatrix}$ y $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.
b) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a=0$.

Solución:
a) El rango de una matriz es el orden del mayor menor no nulo.
Se calculan dos de sus menores:

$$|M_1|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 1 & a & 2\\ -1 & 2 & a\end{vmatrix}=a^2+a-2 \to \text{Se anula cuando } a=-2 \text{ o } a=1.$$

$$|M_2|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & a & 2-a\\ -1 & 2 & a-2\end{vmatrix}=a^2+a-2 \to \text{Se anula también si } a=-2 \text{ o } a=1.$$

Por tanto:

- Si $a\neq -2$ y 1, el rango de A es 3.
- Si $a=-2$ o $a=1$, el rango es 2: el menor $|M_3|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}\neq 0$.

b) Si $a=0$, la matriz $A\cdot M=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 2\\ -1 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}$.

Como $|A\cdot M|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & -2\end{vmatrix}=-4+2=-2\neq 0 \Rightarrow$ dicha matriz es invertible.

Su inversa es: $(AM)^{-1}=\dfrac{(Adj(AM))^t}{|AM|}$, siendo $Adj(AM)$ la matriz de los adjuntos de AM.

Como $Adj(AM)=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 2\\ 8 & -1 & -5\\ 6 & -1 & -3\end{pmatrix}$ y $|A\cdot M|=-2 \Rightarrow (AM)^{-1}=-\dfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 8 & 6\\ 0 & -1 & -1\\ 2 & -5 & -3\end{pmatrix}$.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dada $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$, donde ln denota el logaritmo neperiano, definida para $x>0$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y=f(x)$.

b) (1 punto) Encontrar un punto de la curva $y=f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y=f(x)$ y las rectas $y=0$ y $x=e$.

Solución:

a) La asíntota, si existe, debe ser hacia $+\infty$. (La función no está definida si $x\le 0$).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L'H)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=\frac{0}{1}=0 \Rightarrow \text{La asíntota es la recta } y=0.$$

b) La tangente es horizontal en los puntos en los que $f'(x)=0$.

Derivando:

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln(x)}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}\to \text{se anula si } 1-\ln(x)=0\Rightarrow x=e.$$

Estudiando el signo de la derivada a izquierda y derecha de $x=e$ se deduce:

- Si $0<x<e$, $f'(x)>0 \Rightarrow$ la función crece.
- Si $x>e$, $f'(x)<0 \Rightarrow$ la función decrece.

Por tanto, en $x=e$ se tiene un máximo de la función.

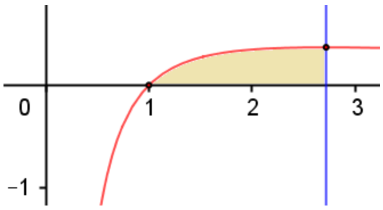
c) La curva $y=\frac{\ln(x)}{x}$ corta al eje OX en $x=1$. A la derecha de $x=1$ la curva está por encima del eje OX; luego, el área encerrada por $y=\frac{\ln(x)}{x}$ y el eje OX, desde 1 hasta e, viene dada por la integral definida:

$$\int_1^e\frac{\ln(x)}{x}dx=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e=\frac{1}{2}\left((\ln e)^2-(\ln 1)^2\right)=\frac{1}{2}\ \text{u}^2.$$

Una primitiva de esa función es "inmediata", pues:

$$\int\frac{\ln(x)}{x}dx=\int\frac{1}{x}\cdot(\ln(x))\,dx=\left(\int f'(x)\cdot f(x)dx=\frac{(f(x))^2}{2}\right)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$$

Aunque no se pide, el área pedida es la de la región sombreada en la figura adjunta.



Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = z$ y la recta s que pasa por el punto $(2,-5,1)$ y tiene dirección $(-1,0,-1)$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.

b) (1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s.

c) (0.5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de las rectas dadas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 3-2\lambda \\ z = \lambda \end{cases};\ s \equiv \begin{cases} x = 2-t \\ y = -5 \\ z = 1-t \end{cases}.$$

a) Estudiando la dependencia lineal de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\boldsymbol{RS}$, siendo $R \in r$ y $S \in s$, se determina la posición relativa de ambas rectas: si esos vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan; si son linealmente dependientes, estarán en el mismo plano.

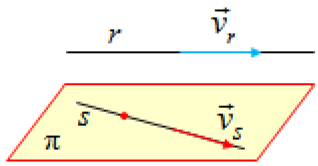
Como $\vec{v}_r = (2, -2, 1)$, $\vec{v}_s = (-1, 0, -1)$; $R = (1, 3, 0)$, $S = (2, -5, 1) \to \boldsymbol{RS} = (1, -8, 1)$, se tiene que:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -8 & 1 \end{vmatrix} = -16+8 = -8 \neq 0.$$

Luego, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas r y s se cruzan.

b) El plano pedido viene determinado por la recta s y por el vector $\vec{v}_r = (2, -2, 1)$.

Sus ecuaciones serán.

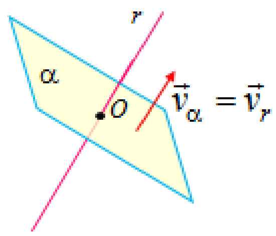


$$\pi \equiv \begin{cases} x = 2-t+2h \\ y = -5-2h \\ z = 1-t+h \end{cases} \Leftrightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 2 \\ y+5 & 0 & -2 \\ z-1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv -2(x-2)-(y+5)+2(z-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x+y-2z+3 = 0.$$

c) El vector característico del plano pedido viene dado por $\vec{v}_r = (2, -2, 1)$; como debe pasar por $O = (0, 0, 0)$, su ecuación será:

$$\alpha \equiv 2x-2y+z = 0.$$



Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10 %. Se pide:

a) (1 punto) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.

b) (1.5 puntos) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

Solución:

a) El experimento puede estudiarse como una binomial con n = 10 y p = 0,1: $B(10, 0,1)$.
Sea X la variable aleatoria que mide el número de peces que siguen vivos después de 5 años.
Con esto:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^9 =$$

$$= 1 - 0,3486\ldots - 0,3874\ldots \approx 0,264.$$

b) Hay que estudiar la binomial $B(200, 0,1)$.
Puede aproximarse por la normal $N\left(200 \cdot 0,1,\ \sqrt{200 \cdot 0,1 \cdot 0,9}\right) \to N(20,\ 4,24)$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-20}{4,24}$.

También debe hacerse la corrección de continuidad.
Por tanto:

$$P(X \geq 10) = P(X' > 9,5) = P\left(Z > \frac{9,5-20}{4,24}\right) \approx P(Z > -2,48) = P(Z < 2,48) = 0,9934.$$

OPCIÓN B

Ejercicio 1 . Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.
Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Solución:
a) Sean *x*, *y*, *z* los precios de cada bocadillo, refresco y bolsa de patatas compradas, respectivamente. Con los datos del enunciado se obtiene:

$3x+2y+2z=15$ → Le cobran 19 €, pero le dolvieron 4 €.

$x+z=4$ → un bocadillo y una bolsa de patatas valen 4 €; los que le devuelven.

$0,60x+0,60y=3$ → la rebaja del 40 % supone un 60 % de su precio.

Se obtiene el sistema $\begin{cases} 3x+2y+2z=15 \\ x+z=4 \\ x+y=5 \end{cases}$.

Puede hacerse por sustitución:

$$\begin{cases} 3x+2y+2z=15 \\ x+z=4 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y+2z=15 \\ z=4-x \\ y=5-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2(5-x)+2(4-x)=15 \\ z=4-x \\ y=5-x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x=-3 \to x=3 \\ z=4-x \to z=1 \\ y=5-x \to y=2 \end{cases}.$$

Un bocadillo costaba 3 €; un refresco, 2 €; una bolsa de patatas, 1 €.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar su dominio.

b) (1.5 puntos) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) (0.5 puntos) Calcular los límites laterales $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$.

Solución:

a) La función está definida siempre que $4x^2-x^4\geq 0$.

Como $4x^2-x^4=x^2(4-x^2)=x^2\cdot(2-x)\cdot(2+x)$ $\Rightarrow$ el dominio de definición viene dado por los puntos del intervalo [–2, 2].

b) Derivando e igualando a 0:

$$f'(x)=\frac{8x-4x^3}{2\sqrt{4x^2-x^4}}=0\Rightarrow 8x-4x^3=0\Rightarrow 4x\left(2-x^2\right)=0\Rightarrow x=0;\ x=-\sqrt{2};\ x=\sqrt{2}.$$

Por tanto:

- Si $-2<x<-\sqrt{2}$, $f'(x)>0\Rightarrow$ la función crece.
- Si $-\sqrt{2}<x<0$, $f'(x)<0\Rightarrow$ la función decrece. (En $x=-\sqrt{2}$ se tiene un máximo).
- Si $0<x<\sqrt{2}$, $f'(x)>0\Rightarrow$ la función crece. (En $x = 0$ se tiene un mínimo, aunque en ese punto la función no es derivable).
- Si $\sqrt{2}<x<2$, $f'(x)<0\Rightarrow$ la función decrece. (En $x=\sqrt{2}$ se tiene un máximo).

c) Para hacer este límite puede tenerse en cuenta que:

$$f(x)=\sqrt{4x^2-x^4}=\sqrt{x^2\left(4-x^2\right)}=|x|\cdot\sqrt{4-x^2}$$

(La función nunca toma valores negativos. Por tanto, al extraer x del radicando debe tenerse eso en cuenta; por ese motivo debe ponerse $|x|$).

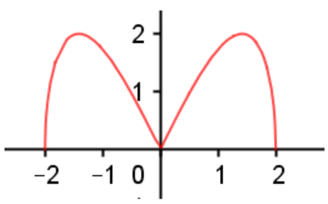
Con esto:

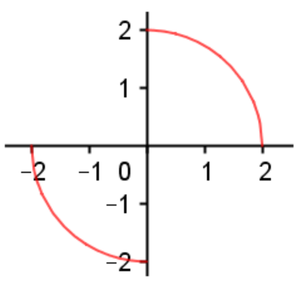
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\cdot\sqrt{4-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\cdot\sqrt{4-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(-\sqrt{4-x^2}\right)=-2;$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\cdot\sqrt{4-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot\sqrt{4-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{4-x^2}\right)=2.$$

Observación:

Las gráficas de $f(x)=\sqrt{4x^2-x^4}$ y de $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-x^4}}{x}$, que doy a continuación, aclaran los resultados.





Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados el punto $A(2,1,0)$ y el plano $\pi \equiv 2x+3y+4z=36$, se pide:

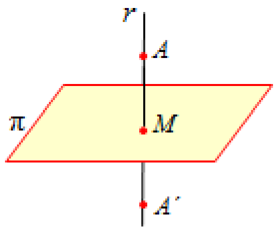
a) (0.75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π.
b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.
c) (0.75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.

Solución:

a) $d\left(A(2,1,0), \pi \equiv 2x+3y+4z=36\right) = \left|\dfrac{2\cdot 2+3\cdot 1+4\cdot 0-36}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}\right| = \dfrac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}$.

b) El punto del plano más próximo a A es el proyectado de A sobre π: es el punto de corte de la perpenpendicular a π por A con π.
La recta perpendicular a π que pasa por A es:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+3t \\ z = 0+4t \end{cases}.$$



Corte de r con π:

$$2\cdot(2+2t)+3\cdot(1+3t)+4\cdot 4t = 36 \Rightarrow 29t = 29 \Rightarrow t = 1.$$

Por tanto, $M = (4, 4, 4)$.

c) Si $A´ = (x_0, y_0, z_0)$ es el simétrico de A respecto de π, entonces, M será el punto medio de ambos.

Punto medio de A y $A´$: $\left(\dfrac{2+x_0}{2}, \dfrac{1+y_0}{2}, \dfrac{z_0}{2}\right)$.

Como $M = (4, 4, 4) = \left(\dfrac{2+x_0}{2}, \dfrac{1+y_0}{2}, \dfrac{z_0}{2}\right) \Rightarrow$

$$4 = \frac{2+x_0}{2} \Rightarrow x_0 = 6;\ 4 = \frac{1+y_0}{2} \Rightarrow y_0 = 7;\ 4 = \frac{z_0}{2} \Rightarrow z_0 = 8.$$

Por tanto, $A´ = (6, 7, 8)$.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80% de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10%. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

a) (1 punto) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.

b) (1.5 puntos) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

Solución:

Sea *M* el suceso que indica que a un paciente se le administra el medicamento, y *X* que se le administra un placebo.

Se designa por "+" el suceso que indica mejoría, por cualquiera de los dos métodos.

Con esto, se conocen las siguientes probabilidades:

$P(M)=0{,}5;\ P(+/M)=0{,}80;\qquad P(X)=0{,}5;\ P(+/X)=0{,}10;$

a) La probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado será:

$P(+)=P(M)\cdot P(+/M)+P(X)\cdot P(+/X)$ = 0,5 · 0,80 + 0,5 · 0,10 = 0,45.

b) Por Bayes:

$$P(M/+)=\frac{P(M)\cdot P(+/M)}{P(+)}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}80}{0{,}45}=\frac{40}{45}=\frac{8}{9}.$$