uc3m Universidad Carlos III de Madrid

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2022-2023**

MATERIA: **MATEMÁTICAS II**

D

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El $10\,\%$ de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuanta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, se pide:

a) (0.25 puntos) Estudiar si es par o impar.

b) (0.75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto $x = 1$.

c) (1.5 puntos) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los puntos $A(1,-2,3)$, $B(0,2,-1)$ y $C(2,1,0)$. Se pide:

a) (1.25 puntos) Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.

b) (0.75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano $z = 1$.

c) (0.5 puntos) Determinar el perímetro del triángulo T.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tiene un suceso A de probabilidad $P(A) = 0.3$.

a) (0.75 puntos) Un suceso B de probabilidad $P(B) = 0.5$ es independiente de A. Calcule $P(A \cup B)$.

b) (0.75 puntos) Otro suceso C cumple $P(C \mid A) = 0.5$. Determine $P(A \cap \overline{C})$.

c) (1 punto) Si se tiene un suceso D tal que $P(\overline{A} \mid D) = 0.2$ y $P(D \mid A) = 0.5$, calcule $P(D)$.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema $\left\{\begin{array}{llllll}(a+1)x & + & 4y & & & =0\\ & & (a-1)y & + & z & =3\\ 4x & + & 2ay & + & z & =3\end{array}\right.$, se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro a.

b) (0.5 puntos) Resolverlo para $a=3$.

c) (0.75 puntos) Resolverlo para $a=5$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como $f(x)=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{x^2}{2+x^2} & \text{si} \quad x\le -1\\ & \\ \dfrac{2x^2}{3-3x} & \text{si} \quad x>-1\end{array}\right.$, se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1}$.

c) (0.75 puntos) Calcular la siguiente integral: $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la recta $r\equiv \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$, el plano $\pi: x-z=2$ y el punto $A(1,1,1)$, se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.

b) (0.75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La longitud de la sardina del Pacífico (*Sardinops sagax*) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25.75 mm.

a) (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?

b) (0.5 puntos) Hallar una longitud $t<175$ mm tal que entre t y 175 mm estén el $18\,\%$ de las sardinas capturadas.

c) (1 punto) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El 10% de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuanta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

Solución:

Sean x, y, z el número de camiones de los tipos A, B y C, respectivamente.

Con los datos del enunciado se obtiene:

$x+1=y+z \rightarrow$ relación entre los tipos de camiones;

$0{,}10\cdot 24y=\frac{1}{7}\cdot 28z \rightarrow$ el 10 % de todos los camiones de tipo B…

$14x+24y+28z=302 \rightarrow$ toneladas totales extraídas hoy.

Se obtiene el sistema: $\begin{cases} x-y-z=-1 \\ 2{,}4y-4z=0 \\ 14x+24y+28z=302 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3y-5z=0 \\ 7x+12y+14z=151 \end{cases}$

Aplicando el método de Gauss:

$$\begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3y-5z=0 \\ 7x+12y+14z=151 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-7E1 \end{matrix} \begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3y-5z=0 \\ 19y+21z=158 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3E3-19E2 \end{matrix} \begin{cases} x-y-z=-1 \\ 3y-5z=0 \\ 158z=3\cdot 158 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x=7 \\ y=5 \\ z=3 \end{cases}.$$

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, se pide:

a) (0.25 puntos) Estudiar si es par o impar.

b) (0.75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto $x = 1$.

c) (1.5 puntos) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

Solución:

a) La función $f(x) = \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$ será par si $f(x) = f(-x)$.

Como $f(-x) = \sqrt[3]{\left((-x)^2-1\right)^2} = \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2} = f(x)$, la función es par (simétrica respecto del eje *OY*).

b) La función $f(x) = \sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}$ está definida en todo **R**. En $x = 1$, su valor es 0.

Además, $\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2} = 0$; luego es continua en $x = 1$.

Derivada;

$$f(x) = \left(x^2-1\right)^{2/3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}\left(x^2-1\right)^{-1/3}\cdot 2x = \frac{4x}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)}} \to \text{no está definida en } x = 1.$$

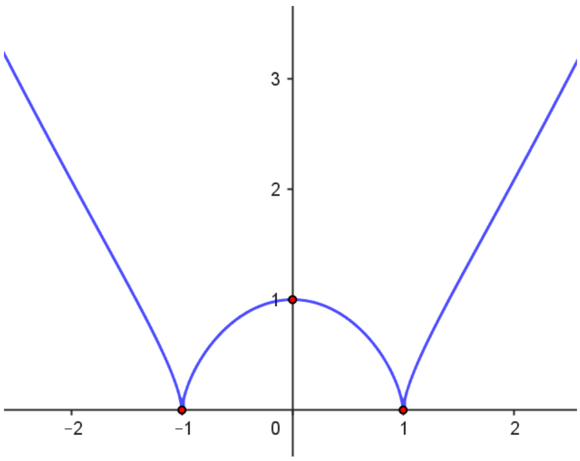
Por tanto, no es derivable en $x = 1$.

c) Al ser par basta con estudiar cómo se comporta para valores de $x \geq 0$.
La derivada se anula en $x = 0$.
Como no es derivable en $x = 1$ hay que considerar los intervalos: (0, 1) y (1, +∞).
→ Para valores de $0 < x < 1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente.
→ Para valores de $x > 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.
Por tanto, en el punto $x = 1$ la función tiene un mínimo absoluto, aunque no sea derivable.

Para valores situados a la izquierda de $x = 0$, por ser par:
→ Para valores de $-1 < x < 0$, $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la función es creciente.
→ Para valores de $x < -1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente.
Por tanto, en el punto $x = 0$ la función tiene un máximo relativo; y en $x = -1$, otro mínimo, también absoluto.

Como la función no es derivable ni en $x = -1$ ni en $x = 1$, en esos puntos la función tiene sendos picos.

Aunque no se pide, su gráfica es la adjunta.



A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los puntos $A(1,-2,3)$, $B(0,2,-1)$ y $C(2,1,0)$. Se pide:

a) (1.25 puntos) Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.

b) (0.75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano $z=1$.

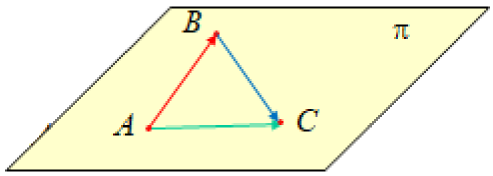
c) (0.5 puntos) Determinar el perímetro del triángulo T.

Solución:

a) Los puntos $A(1, -2, 3)$, $B(0, 2, -1)$ y $C(2, 1, 0)$ determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = (0, 2, -1) - (1, -2, 3) = (-1, 4, -4)$;

$\overrightarrow{AC} = (2, 1, 0) - (1, -2, 3) = (1, 3, -3)$.



Como los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son linealmente independientes (basta con ver que $\overrightarrow{AB} \neq k\cdot\overrightarrow{AC}$ para cualquier valor de k), entonces los puntos dados forman un triángulo.

El plano que determinan es:

$$\pi \equiv \begin{cases} x = 1 - t + h \\ y = -2 + 4t + 3h \\ z = 3 - 4t - 3h \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y+2 & 4 & 3 \\ z-3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv y + z - 1 = 0 .$$

b) La recta que contiene a los puntos A y B es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 4t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$.

Se corta con el plano $z = 1$, cuando $3 - 4t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ (sustituyendo en r), $y = 0$; $x = \frac{1}{2}$.

El punto de corte pedido es: $P\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 1\right)$.

c) El perímetro del triángulo es:

$$p = d(A,B) + d(A,C) + d(B,C) = \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| =$$

$$\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-4)^2} + \sqrt{1^2 + 3^2 + (-3)^2} + \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \Rightarrow p = \sqrt{33} + \sqrt{19} + \sqrt{6} .$$

El vector $\overrightarrow{BC} = (2, 1, 0) - (0, 2, -1) = (2, -1, 1)$.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tiene un suceso A de probabilidad $P(A) = 0.3$.

a) (0.75 puntos) Un suceso B de probabilidad $P(B) = 0.5$ es independiente de A. Calcule $P(A \cup B)$.

b) (0.75 puntos) Otro suceso C cumple $P(C \mid A) = 0.5$. Determine $P(A \cap \overline{C})$.

c) (1 punto) Si se tiene un suceso D tal que $P(\overline{A} \mid D) = 0.2$ y $P(D \mid A) = 0.5$, calcule $P(D)$.

Solución:

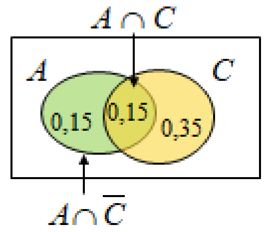
Si los sucesos A y B son independientes, entonces $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15$.

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = 0,3 + 0,5 - 0,15 = 0,65$.

b) Como $P(C/A) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(A)} \Rightarrow$

$$0,5 = \frac{P(A \cap C)}{0,3} \Rightarrow P(A \cap C) = 0,15.$$

Luego, $P(A \cap \overline{C}) = P(A) - P(A \cap C) = 0,3 - 0,15 = 0,15$.



c) Considerando otro diagrama de Venn, se tiene que:

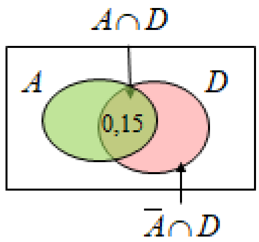
$$P(D) = P(A \cap D) + P(\overline{A} \cap D) \Rightarrow$$

$$P(\overline{A} \cap D) = P(D) - P(A \cap D).$$

Por $P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D/A) \Rightarrow P(A \cap D) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15$.

Por $P(\overline{A}/D) = \dfrac{P(\overline{A} \cap D)}{P(D)} \Rightarrow 0,2 = \dfrac{P(D) - 0,15}{P(D)} \Rightarrow$

$$0,2P(D) = P(D) - 0,15 \Rightarrow P(D) = \frac{15}{80} = 0,1875.$$



B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema $\begin{cases} (a+1)x & + & 4y & & & = 0 \\ & & (a-1)y & + & z & = 3 \\ 4x & + & 2ay & + & z & = 3 \end{cases}$, se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro a.

b) (0.5 puntos) Resolverlo para $a = 3$.

c) (0.75 puntos) Resolverlo para $a = 5$.

Solución:

a) Sea *A* la matriz de coeficientes y *M* la matriz ampliada.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & 3 \\ 4 & 2a & 1 & 3 \end{array}\right) = M$$

Si rango de *A* = rango de *M* = 3 → sistema compatible determinado: solución única.
Si r(*A*) = r(*M*) < 3 → sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(*A*) > r(*M*) → sistema incompatible: no tiene solución

El determinante de *A* vale $|A| = -a^2 - 2a + 15$.

Se anula si $a = -5$ o $a = 3$ (Soluciones de la ecuación de 2º grado asociada).
Con esto:

- Si $a \neq -5$ y $3 \Rightarrow$ r(*A*) = 3 = r(*M*). El sistema será compatible determinado.

- Si $a = -5$, se tendrá:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 4 & -10 & 1 \end{pmatrix};\ M = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \\ 4 & -10 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Como en *M* la cuarta columna depende de la tercera $C4 = 3C3$, el rango de *M* es igual al rango de *A*. (También puede verse que, en los dos casos, $F3 = F2 - F1$).

Como $\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$ y $|A| = 0 \Rightarrow$ r(*A*) = 2 = r(*M*). Por tanto, el sistema será compatible indeterminado.

- Si $a = 3$, se tendrá:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix};\quad M = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En ambas matrices se cumple $F3 = F2 + F1$; por tanto, r(*A*) = 2 = r(*M*). El sistema vuelve a ser compatible indeterminado.

b) Para $a = 3$ el sistema es compatible indeterminado. Resulta equivalente a:

$$\begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 2y + z = 3 \\ 4x + 6y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 2y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = -4y \\ z = 3 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 3 - 2t \end{cases}.$$

c) Para a = 5 el sistema es compatible determinado. Puede resolverse por transformaciones de Gauss.

$$\begin{cases} 6x+4y=0 \\ 4y+z=3 \\ 4x+10y+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \underset{E3-E2}{} \begin{cases} 6x+4y=0 \\ 4y+z=3 \\ 4x+6y=0 \end{cases} \Rightarrow \underset{6E3-4E1}{} \begin{cases} 6x+4y=0 \\ 4y+z=3 \\ 20y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=3 \end{cases}.$$

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2+x^2} & \text{si} \quad x\le -1 \\ \dfrac{2x^2}{3-3x} & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$, se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1}$.

c) (0.75 puntos) Calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

Solución:

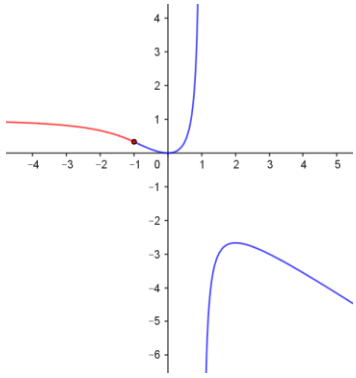
a) La función está definida en **R** – {1}. Por tanto, en x = 1 no puede ser continua.

En el punto x = –1 hay que comprobar que existe límite y que coincide con su valor de definición. Esto es: $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = f(-1) = \dfrac{1}{3}$.

Como:

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2}{2+x^2} = \frac{(-1)^2}{2+(-1)^2} = \frac{1}{3};$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{2x^2}{3-3x} = \frac{2(-1)^2}{3-3(-1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$



Luego, la función es continua en x = –1.

Por tanto, la función es continua en todo su dominio, en **R** – {1}.

(La gráfica no se pide).

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)^{2x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1} = \left[1^\infty\right]$.

Indeterminación que se puede resolver aplicando: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)^{g(x)}\right) = \left[1^\infty\right] = e^{\left(\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-1)\cdot g(x)\right)}$.

Por tanto:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)^{2x^2-1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1} = \left[1^\infty\right] = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2+x^2}-1\right)\cdot\left(2x^2-1\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-2\left(2x^2-1\right)}{2+x^2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-4x^2+2}{2+x^2}\right)} = e^{-4}.$$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0}\frac{2x^2}{3-3x}dx = \frac{2}{3}\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{1-x}dx$.

Una primitiva puede hacerse dividiendo la función racional. así:

$$\int \frac{x^2}{1-x}dx = \int \left(-x-1+\frac{1}{1-x}\right)dx = -\frac{x^2}{2}-x-\ln(1-x).$$

Por tanto.

$$\frac{2}{3}\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{1-x}dx = \frac{2}{3}\left(-\frac{x^2}{2}-x+\ln(1-x)\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{2}{3}\left(0-\left(-\frac{1}{2}+1+\ln 2\right)\right) = \frac{2\ln 2}{3}-\frac{1}{3}.$$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, el plano $\pi : x - z = 2$ y el punto $A(1,1,1)$, se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.

b) (0.75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r.

Solución:

a) Las ecuaciones paraméricas de r son: $r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1-2\lambda \end{cases}$.

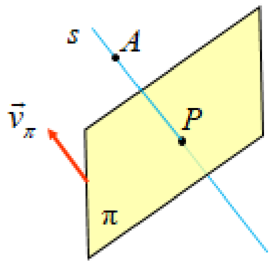
Sustituyendo en $\pi : x - z = 2 \Rightarrow 1+2\lambda-(-1-2\lambda) = 2 \Rightarrow \lambda = 0$.

Por tanto, la recta y el plano se cortan cuando λ = 0, en el punto $R(1, 0, -1)$.

b) La proyección ortogonal del punto A sobre el plano π es el punto de intersección de la recta, s, perpendicular a π por A, con dicho plano.

El vector de dirección de s es el característico de π, $\vec{v}_s = \vec{v}_\pi = (1, 0, -1)$.

Por tanto: $s \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1 \\ z = 1-t \end{cases}$.



Sustituyendo en π: $1+t-(1-t) = 2 \Rightarrow t = 1$.

Luego, el punto proyectado es $P(2, 1, 0)$.

c) Sea $A' = (x_0, y_0, z_0)$ el simétrico de A respecto de la recta r.

Ambos puntos, A y A' estarán en el plano π´, perpendicular a r por A. Además, el punto M, punto medio entre A y A, debe pertenecer al plano y a la recta.

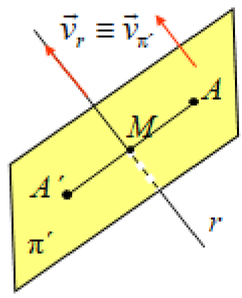
El plano π´ tiene como vector característico el de dirección de la recta: $\vec{v}_r = (2,1,-2) = \vec{v}_{\pi}$.

Su ecuación será: $\pi': 2(x-1)+(y-1)-2(z-1) = 0 \Rightarrow \pi': 2x+y-2z-1 = 0$.

El punto M, de corte de r con π´ se obtiene sustiuyendo las ecuaicones de la recta en el plano:

$$\pi': 2(1+2t)+t-2(-1-2t)-1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$M = \left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right).$$



Como el punto medio de A y $A´$ es $M = \left(\frac{1+x_0}{2},\ \frac{1+y_0}{2},\ \frac{1+z_0}{2}\right) \Rightarrow$

$$\frac{1}{3} = \frac{1+x_0}{2} \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{3};\ -\frac{1}{3} = \frac{1+y_0}{2} \Rightarrow y_0 = -\frac{5}{3};$$

$$-\frac{1}{3}=\frac{1+z_0}{2} \Rightarrow z_0=-\frac{5}{3}.$$

Por tanto, $A'=\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{5}{3},\ -\frac{5}{3}\right)$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La longitud de la sardina del Pacífico (*Sardinops sagax*) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25.75 mm.

a) (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?

b) (0.5 puntos) Hallar una longitud $t < 175$ mm tal que entre t y 175 mm estén el 18% de las sardinas capturadas.

c) (1 punto) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

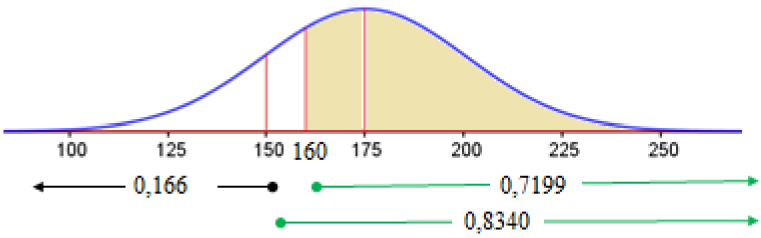
Solución:

La variable X que mide la longitud de esas sardinas se ajusta a la distribución normal $N(175,\ 25{,}75)$, en mm. Se tipifica haciendo el cambio $Z=\frac{X-175}{25{,}75}$.

Con esto:

a) $P(X>160)=P\left(Z>\frac{160-175}{25{,}75}\right)=P(Z>-0{,}5825)\ =\ P(Z<0{,}5825)=0{,}7199$.

(Se ha interpolado, teniendo en cuenta que $P(Z<0{,}58)=0{,}7190$ $P(Z<0{,}59)=0{,}7224$).



b) $P(t<X<175)=P\left(\frac{t-175}{25{,}75}<Z<0\right)=0{,}18 \Rightarrow P(X<0)-P\left(\frac{t-175}{25{,}75}<Z\right)=0{,}18 \Rightarrow$

$$0{,}5-P\left(\frac{t-175}{25{,}75}<Z\right)=0{,}18 \Rightarrow P\left(\frac{t-175}{25{,}75}<Z\right)=0{,}32 \Rightarrow \frac{t-175}{25{,}75}\approx -0{,}47 \Rightarrow t\approx 162{,}90.$$

c) La probabilidad de que una sardina supere los 150 mm es:

$$P(X>150)=P\left(Z>\frac{150-175}{25{,}75}\right)\approx P(Z>-0{,}97)=P(Z<0{,}97)=0{,}8340.$$

El suceso "al menos una sardina no supere los 150 mm entre 10" es el contrario del suceso "las 10 sardinas superan los 150 mm".

Por tanto:

P(al menos una de las 10 no supere los 150 mm) = 1 – P(las 10 superan los 150 mm) =
= 1 – $(0{,}8340)^{10}$ = 0,8372.