INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

ENUNCIADOS Y SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1560 euros, que corresponden a tres empresas A,B y C. Sabiendo que el valor actual en bolsa de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acción que le corresponde a cada hermano.

Solución:
Si el valor de la acción de la empresa B es 1 € → la accción A vale 3 € (el triple que B) → la acción C vale 6 € (el doble que A: "A vale la amitad que C").

Sean *x*, *y*, *z* el número de acciones de las empresas A, B y C, respectivamente.
Con los datos del enunciado se obtiene:

$x+y+z=540 \rightarrow$ número total de acciones;

$3x+y+6z=1560 \rightarrow$ valor total de las acciones;

$z=\frac{1}{2}y \rightarrow$ el número de acciones de C es la mitad que el de B.

Se obtiene el sistema: $\begin{cases} x+y+z=540 \\ 3x+y+6z=1560 \\ y-2z=0 \end{cases}$.

Aplicando el método de Gauss:

$$\begin{cases} x+y+z=540 \\ 3x+y+6z=1560 \\ y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E1-E3 \\ E2-E3 \\ \end{matrix} \begin{cases} x+3z=540 \\ 3x+8z=1560 \\ y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow E2-3E1 \begin{cases} x+3z=540 \\ -z=-60 \\ y-2z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=360 \\ y=120 \\ z=60 \end{cases}.$$

Por tanto, a cada uno de los hermanos le corresponderán la tercera parte de las acciones de cada empresa. Esto es: 120 acciones de la empresa A, 40 de la B y 20 de la C.

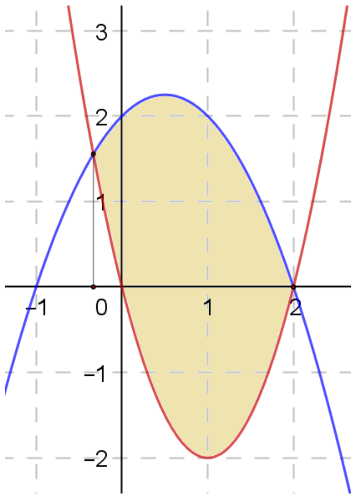
A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

$$f(x) = 2 + x - x^2, \quad g(x) = 2x^2 - 4x.$$

Solución:

Las funciones dadas son dos parábolas; pueden representarse dando valores.
La región delimitada por ambas gráficas es la sombreada en la figura.



Sus gráficas e cortan en las soluciones de la ecuación

$f(x) = g(x) \to 2 + x - x^2 = 2x^2 - 4x \Rightarrow$

$$3x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \begin{cases} -1/3 \\ 2 \end{cases}.$$

El área viene dada por la integral definida

$$\int_{-1/3}^{2} \left(2 + x - x^2 - \left(2x^2 - 4x\right)\right) dx =$$

$$= \int_{-1/3}^{2} \left(-3x^2 + 5x + 2\right) dx = \left[-x^3 + \frac{5x^2}{2} + 2x\right]_{-1/3}^{2} =$$

$$= -8 + 10 + 4 - \left(\frac{1}{27} + \frac{5}{18} - \frac{2}{36}\right) = 6 + \frac{19}{54} = \frac{343}{54} \text{ u}^2.$$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$. Se pide:

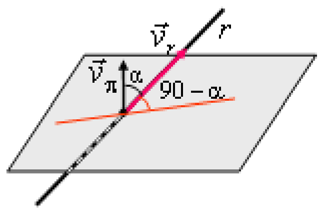
a) (0.75 puntos) Calcular el ángulo que forman r y π.

b) (1 punto) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $z - y = 0$.

c) (0.75 puntos) Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

Solución:

a) El ángulo que forma una recta con un plano es el complementario del que determinan los vectores $\vec{v}_r$, de dirección de la recta, con $\vec{v}_\pi$, normal al plano.



Por tanto, el seno del ángulo (r, π),

$$\sin\left(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r\right) = \cos\left(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r\right) = \frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{\left|\vec{v}_\pi\right| \cdot \left|\vec{v}_r\right|}.$$

Ecuaciones paramétricas de r:

$$r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x + y = z \\ 2x + 3y = -1 + z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases} \to \vec{v}_r = (2, -1, 1).$$

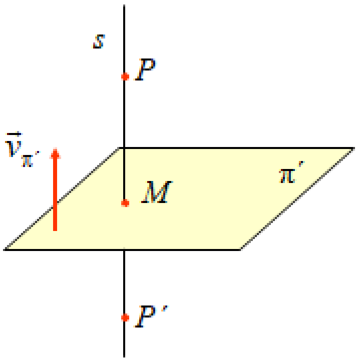
Como $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0 \to \vec{v}_\pi = (2, 1, -1)$.

Luego: $\sin\left(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r\right) = \dfrac{(2, 1, -1)\cdot(2, -1, 1)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{4-1-1}{6} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$ ángulo(r, π) = 19,47º.

b) Punto de corte de r con π. Se sustituyen las ecuaciones de la recta en el plano:
$2(1+2t)+(-1-t)-t+3=0 \Rightarrow t=-2 \rightarrow P=(-3, 1, -2)$.

Sea $P´=(x_0, y_0, z_0)$ el simétrico de P respecto del plano $\pi´ \equiv x-y=0$.
Ambos puntos, P y P' estarán en la recta s, perpendicular a $\pi´$ por P. Además, si M es el punto de corte de la recta y el plano, M debe ser el punto medio entre P y $P´$.

Como $\vec{v}_{\pi´}=(1, -1, 0)$, se deduce que $s \equiv \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-2 \end{cases}$.



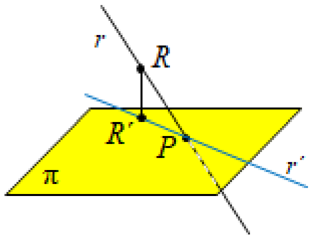
Corte de la recta s con plano $\pi´$:
$(-3+\lambda)-(1-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=2$.
Por tanto, $M=(-1, -1, -2)$.

Punto medio de P y $P´$: $M=\left(\dfrac{-3+x_0}{2}, \dfrac{1+y_0}{2}, \dfrac{-2+z_0}{2}\right)$.

Como deben ser iguales, entonces
$-1=\dfrac{-3+x_0}{2} \Rightarrow x_0=1$; $-1=\dfrac{1+y_0}{2} \Rightarrow y_0=-3$;
$-2=\dfrac{-2+z_0}{2} \Rightarrow z_0=-2$.
Por tanto, $P´=(1, -3, -2)$.

c) La proyección ortogonal de r sobre π se obtiene proyectando dos puntos de r sobre π. Esa recta, $r´$, es la que pasa por los dos puntos proyectados. (También se podría obtener hallando el corte de π con el plano que contiene a r y es perpendicular a π).
Uno de los puntos proyectado es el de corte de π con r, $P(-3, 1, -2)$.
Otro punto de r es $R=(1, -1, 0)$. Su proyección sobre π se hace como se indicó antes:

Recta p, perpendicular a π por R: $p \equiv \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=-t \end{cases}$.



Corte de p con π:
$2(1+2t)+(-1+t)+t+3=0 \Rightarrow 6t+4=0 \Rightarrow t=-2/3 \rightarrow R´=(-1/3, -5/3, 2/3)$.

El vector $\overrightarrow{PR´}$ es $(-1/3, -5/3, 2/3)-(-3, 1, -2)=(8/3, -8/3, 8/3) \equiv (1, -1, 1)$.
Por tanto, la proyección pedida, (la recta $r´$, determinada por P y $R´$), será:

$$r´ \equiv \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-2+\lambda \end{cases}.$$

<u>Observación</u>: El plano que contiene a r y es perpendicular a π es $\pi´´ \equiv y+z+1=0$.

Por tanto, otra forma de dar $r´$ es: $r´ \equiv \begin{cases} y+z+1=0 \\ 2x+y-z+3=0 \end{cases}$.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8.8 meses y una desviación típica de 3 meses.

a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?

b) (1 punto) Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los 10 meses de vida?

c) (0.5 puntos) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8.8 - c, 8.8 + c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie?

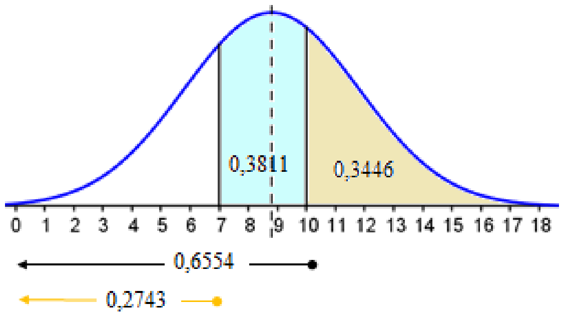
Solución:

La variable X que mide la vida de esos individuos se ajusta a la distribución normal $N(8,8,\ 3)$, en meses. Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-8,8}{3}$.

Con esto:

a) $P(X>10) = P\left(Z > \dfrac{10-8,8}{3}\right) = P(Z>0,4) =$

$= 1 - P(Z<0,4) = 1 - 0,6554 = 0,3446$.



- $P(7<X<10) = P\left(\dfrac{7-8,8}{3} < Z < \dfrac{10-8,8}{3}\right) =$

$= P(-0,6<Z<0,4) =$

$= P(Z<0,4) - P(Z<-0,6) = 0,6554 - (1 - P(Z<0,6))$ = 0,6554 – (1 – 0,7257) =

= 0,3811.

b) El suceso “al menos uno de los 4 no supere los 10 meses de vida” es el contrario del suceso “los 4 superan los 10 meses de vida”.

Por tanto:

P(al menos uno de los cuatro no supere …) = 1 – P(los 4 superan los 10 meses de vida) =

= 1 – $(0,3446)^4$ = 0,9859.

→ Se supone que la vida de cada individuo es independiente de la vida de los demás; esto es, se trata de sucesos independientes. Por eso:

P(los individuos A, B, C y D vivan más de 10 meses cada uno) =

$P(A > 10) \cdot P(B > 10) \cdot P(C > 10) \cdot P(D > 10) = (0,3446)^4$.

c) Se pide el valor de c tal que $P(8,8-c<X<8,8+c) = 0,98 \Leftrightarrow P(0<X<8,8+c) = 0,49$

$\Rightarrow P(X<8,8+c) = 0,99 \Rightarrow P\left(Z < \dfrac{8,8+c-8,8}{3}\right) = 0,99 \Rightarrow P\left(Z<\dfrac{c}{3}\right) = 0,99 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{c}{3} = 2,33 \Rightarrow c = 6,99$.

Esto significa que el 98 % de los individuos de esa especie viven entre 1,81 y 15,79 meses.

→ (8,8 – 6,99, 8,88 + 6,99) = (1,81, 15,79).

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} ax-2y+(a-1)z=4 \\ -2x+3y-6z=2 \\ -ax+y-6z=6 \end{array}\right\}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema según los diferentes valores de a.

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para $a=1$.

Solución:

a) Sea *A* la matriz de coeficientes y *M* la matriz ampliada.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & a-1 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -a & 1 & -6 & 6 \end{array}\right)=M$$

Si rango de A = rango de M = 3 → sistema compatible determinado: solución única.

Si r(A) = r(M) < 3 → sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.

Si r(A) > r(M) → sistema incompatible: no tiene solución

El determinante de A vale

$$|A|=3a^2-29a+26.$$

Se anula si $a = 1$ o $a = 26/3$ (Soluciones de la ecuación de 2º grado asociada).

Con esto:

- Si $a \neq 1$ y $26/3 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.

- Si $a = 1$, se tendrá:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & -6 \end{pmatrix}; \quad M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

Puede verse que en ambos casos la tercera fila es la suma de las dos primeras.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ y $|A|=0 \Rightarrow$ r(A) = 2 = r(M). Por tanto, el sistema será compatible indeterminado.

- Si $a = 26/3$, se tendrá:

$$A=\begin{pmatrix} 26/3 & -2 & 23/3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -26/3 & 1 & -6 \end{pmatrix}; \quad M=\begin{pmatrix} 26/3 & -2 & 23/3 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -26/3 & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 26/3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=22\neq 0$ y $|A|=0 \Rightarrow$ r(A) = 2.

Pero, como el menor $M_1=\begin{vmatrix} 26/3 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \\ -26/3 & 1 & 6 \end{vmatrix}=\dfrac{736}{3}\neq 0 \Rightarrow r(M) = 3$.

En este caso, el sistema será incompatible.

b) Para $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado. Resulta equivalente a:

$$\begin{cases} x-2y=4 \\ -2x+3y-6z=2 \\ -x+y-6z=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=4 \\ -x+y-6z=6 \end{cases} \underset{E2+E1}{\Rightarrow} \begin{cases} x=4+2y \\ -y-6z=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-16-12z \\ y=-10-6z \\ z=z \end{cases}.$$

Haciendo $z=t$ se obtiene la solución: $\begin{cases} x=-16-12t \\ y=-10-6t \\ z=t \end{cases}$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x<0 \\ x\,e^{x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x=0$.

b) (1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi,2)$. Demuestre que existe un punto $x_0\in[0,1]$ de manera que $f(x_0)=2$.

c) (0.75 puntos) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x)dx$.

<u>Solución</u>:

a) Será continua si los límites laterales coinciden.

Como:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sin x=0\,;\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} xe^{x}=0\cdot 1=0.$$

Luego, la función es continua en $x = 0$.

Derivando,

$$f'(x)=\begin{cases} \cos x & \text{si } x<0 \\ e^{x}+xe^{x} & \text{si } x>0 \end{cases}.$$

También coinciden las derivadas laterales en $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=\cos 0=1 \text{ y } \lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(e^{x}+xe^{x}\right)=1+0=1.$$

Por tanto, la función es derivable en $x = 0$.

b) Crecimiento y decrecimiento.

En en intervalo $(-\pi, 0)$, la derivada, $f'(x)=\cos x$, se anula en $x = -\pi/2$.

- Para $-\pi < x < -\pi/2$, $f'(x)=\cos x<0 \Rightarrow$ la función es decreciente en el intervalo $(-\pi, -\pi/2)$.
- Para $-\pi/2 < x < 0$, $f'(x)=\cos x>0 \Rightarrow$ la función es creciente en el intervalo $(-\pi/2, 0)$;

En $x = -\pi/2$ hay un mínimo relativo.

En en intervalo $[0, 2)$, la derivada, $f'(x)=e^{x}+xe^{x}$, siempre es positiva: será creciente en todo ese intervalo.

$\to$ En el intervalo $[0, 1]$ la función que interviene es $f(x)=xe^{x}$, que siempre es continua. Como $f(0)=0$ y $f(1)=e$, entonces, por el teorema de los valores intermedios, la función tomará el valor 2 (que está entre 0 y e) en algún punto $x_0 \in (0, 1)$.

c) $\int_{-\pi/2}^{1} f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{0} (\sin x)\,dx + \int_{0}^{1} \left(xe^{x}\right)dx$.
La primera integral es inmediata; la segunda hay que hacerla por partes.
Tomando:

$u = x$ y $dv = e^{x}dx \Rightarrow du = dx$ y $v = e^{x}$.

Luego,

$$\int xe^{x}dx = xe^{x} - \int e^{x}dx = xe^{x} - e^{x} = (x-1)e^{x}.$$

Por tanto:

$$\int_{-\pi/2}^{1} f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{0} (\sin x)\,dx + \int_{0}^{1} \left(xe^{x}\right)dx = \left[-\cos x\right]_{-\pi/2}^{0} + \left[xe^{x} - e^{x}\right]_{0}^{1} = -1 + 1 = 0.$$

Nótese que no se pide un área.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean los planos $\pi_1 \equiv x + y = 1$ y $\pi_2 \equiv x + z = 1$.

a) (1.5 puntos) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.

b) (0.5 puntos) Halle la recta que pasa por el punto $(0, 2, 0)$ y es perpendicular al plano π_2.

c) (0.5 puntos) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes x e y.

Solución:

a) Los planos paralelos a $\pi_1 \equiv x + y = 1$ son de la forma $\pi \equiv x + y + d = 0$.
La distancia de un punto a un plano viene dada por la expresión:

$$d\left(P(x_0, y_0, z_0), \pi : ax + by + cz + d = 0\right) = \left|\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|.$$

En este caso, se desea que $d\left(O(0,0,0), \pi : x + y + d = 0\right) = 2$.

Luego, $\left|\frac{d}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right| = 2 \Rightarrow d = \pm 2\sqrt{2}$.

Los planos pedidos serán: $\pi'_1 \equiv x + y = 2\sqrt{2}$ y $\pi''_1 \equiv x + y = -2\sqrt{2}$.

b) Como $\vec{v}_{\pi 2}$ = (1, 0, 1), la recta pedida es: $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$.

c) Los puntos de corte del plano $\pi_1 \equiv x + y = 1$ con los ejes de coordenadas x e y son P(1, 0, 0) y Q(0, 1, 0).
Luego, $d(P, Q) = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de $\mathrm{NO_2}$ y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de $\mathrm{NO_2}$ superior al permitido es 0.16. En los días en los que se supera el nivel permitido de $\mathrm{NO_2}$, la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0.33. En los días en los que no se supera el nivel de $\mathrm{NO_2}$, la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0.08.

a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?

b) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?

c) (0.5 puntos) ¿Son independientes los sucesos “en un día se supera el nivel permitido de $\mathrm{NO_2}$” y “en un día se supera el nivel permitido de partículas”?

d) (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de $\mathrm{NO_2}$, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

<u>Solución</u>:

Se consideran los siguientes sucesos y probabilidades:

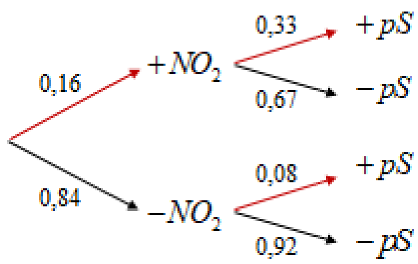
Nivel de NO2 superior al permitido: $+NO_2 \to P(+NO_2) = 0{,}16 \Rightarrow$

$-NO_2 \to P(-NO_2) = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$.

Partículas en suspensión (pS): $+pS$ y $-pS \to$

$P(+pS/+NO_2) = 0{,}33$; $P(+pS/-NO_2) = 0{,}08$.

Con estos datos puede construirse el diagrama de árbol adjunto.



a) Por el enunciado, la probabilidad de que un día se superen los niveles de NO2 es $P(+NO_2) = 0{,}16$.

Por la probabilidad total, la probabilidad de que se supere el nivel de partículas en suspensión es:

$$P(+pS) = P(+NO_2)\cdot P(+pS/+NO_2) + P(-NO_2)\cdot P(+pS/-NO_2) \Rightarrow$$

$$P(+pS) = 0{,}16\cdot 0{,}33 + 0{,}84\cdot 0{,}08 = 0{,}12.$$

→ La probabilidad de que un día se superen los dos niveles será:

$$P((+NO_2)\cap(+pS)) = P(+NO_2)\cdot P(+pS/+NO_2) = 0{,}16\cdot 0{,}33 = 0{,}05528.$$

b) El suceso “al menos uno de los niveles se supere” es el contrario del suceso “ningún nivel se supera”.

P(al menos uno de los niveles se supere) = 1 – *P*(ningún nivel se supera) =

$= 1 - P(-NO_2)\cdot P(-pS/-NO_2) = 1 - 0{,}84\cdot 0{,}92 = 0{,}2272$.

c) Los sucesos $+NO_2$ y $+pS$ serán independientes si se cumple que

$$P((+NO_2)\cap(+pS)) = P(+NO_2)\cdot P(+pS)$$

Como

$P((+NO_2)\cap(+pS)) = 0{,}16\cdot 0{,}33 = 0{,}05528$ y $P(+NO_2)\cdot P(+pS) = 0{,}16\cdot 0{,}12 = 0{,}0192$,

dichos sucesos no son independientes.

d) Por Bayes,

$$P(+NO_2/-pS) = \frac{P((+NO_2)\cap(-pS))}{P(-pS)} = \frac{0{,}16\cdot 0{,}67}{0{,}88} = 0{,}1218.$$