ENUNCIADOS DEL EXAMEN: PINCHAR AQUÍ

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} x+ay+z=a+1 \\ -ax+y-z=2a \\ -y+z=a \end{array}\right\}$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a.

b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $a=0$.

Solución:

a) Sea A la matriz de coeficientes y M la matriz ampliada.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a+1 \\ -a & 1 & -1 & 2a \\ 0 & -1 & 1 & a \end{array}\right)=M$$

Si rango de A = rango de M = 3 $\rightarrow$ sistema compatible determinado: solución única.
Si r(A) = r(M) < 3 $\rightarrow$ sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(A) > r(M) $\rightarrow$ sistema incompatible: no tiene solución

El determinante de A vale

$$|A|=a(a+1)$$

Se anula si a = 0 o a = –1.
Con esto:

- Si $a \neq 0$ y –1 $\Rightarrow$ r(A) = 3 = r(M). El sistema será compatible determinado.

- Si $a = 0$, se tendrá:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$ y $|A|=0 \Rightarrow$ r(A) = 2.

Como la fila 2ª y 3ª de M son proporcionales: $F3=-F2$, entonces, el rango de M también es 2. Luego, el sistema será compatible indeterminado.

- Si $a = -1$, se tendrá:

- $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ y $|A| = 0 \Rightarrow$ r(A) = 2.

Pero, como el menor $M_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 1 \neq 0 \Rightarrow r(M) = 3$.

En este caso, el sistema será incompatible.

b) Para a = 0 el sistema es compatible indeterminado. Resulta equivalente a:

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = 1 + z \end{cases}.$$

Haciendo $z = t$ se obtiene la solución: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ y $g(x) = 6x$, se pide:

a) (0.5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1, 10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima.

c) (1 punto) Calcular $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$.

Solución:

a) Si consideramos la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 1$ y le aplicamos el teorema de Bolzano, que dice: "Si $h(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en sus extremos ($h(a) < 0 < h(b)$ o $h(a) > 0 > h(b)$), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$".

En este caso, como:

$h(1) = 1^3 + 3\cdot 1^2 - 6\cdot 1 - 1 = -3 < 0$ y $h(10) = 10^3 + 3\cdot 10^2 - 6\cdot 10 - 1 = 1239 > 0 \Rightarrow$

existe algún punto $c \in (1, 10)$ tal que $h(c) = 0$".

Esto es, existe un punto $c \in (1, 10)$ tal que $h(c) = f(c) - g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c)$.

Nota: Esta propiedad se cumple en un intervalo más pequeño, en $[1, 2]$; pues $h(2) = 7 > 0$.

b) La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ viene dada por el valor de la derivada en ese punto.

La función derivada es $f'(x) = 3x^2 + 6x$.

Esta función toma su valor mínimo cuando su derivada (que es la derivada segunda) vale 0.

Como $f''(x) = 6x + 6 = 0$ en $x = -1$, y $f'''(x) = 6 > 0$, en $x = -1$ se tiene la pendiente mínima buscada.

En ese punto, en $x = -1$, la ecuación de la recta tangente es $y - f(-1) = f'(-1)\left(x - (-1)\right)$.

Sustituyendo queda:

$y - 1 = (-3)(x + 1) \Rightarrow y = -3x - 2$.

Nota: La pendiente a una curva, $y = f(x)$, es mínima (o máxima) en sus puntos de inflexión, que se dan en soluciones de $f''(x) = 0$.

c) $$\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}dx = \int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{6x}dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{6} + \frac{x}{2} - \frac{1}{6x}\right)dx = \left[\frac{x^3}{18} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{6}\cdot(\ln x)\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{8}{18} + \frac{4}{4} - \frac{1}{6}(\ln 2)\right) - \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\cdot(\ln 1)\right) = \frac{7}{18} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6}\cdot(\ln 2) = \frac{41}{36} - \frac{1}{6}\cdot(\ln 2).$$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$,

se pide:

a) (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas r y s.

b) (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2, -1, 5)$.

c) (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s.

Solución:

Las ecuaciones paramétricas de las rectas dadas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}; \quad s \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Puede verse que $r \equiv \begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} y = x - 2 \\ z = 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$.

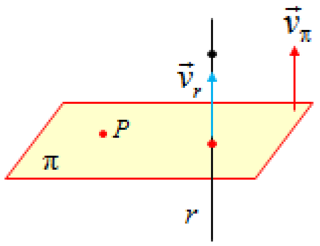
a) Estudiando la dependencia lineal de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\mathbf{RS}$, siendo $R \in r$ y $S \in s$, se determina la posición relativa de ambas rectas: si esos vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan; si son linealmente dependientes, estarán en el mismo plano.

Como $\vec{v}_r = (1, 1, 3)$, $\vec{v}_s = (2, -1, 1)$; $R = (0, -2, 1)$, $S = (-1, -4, 0) \to \mathbf{RS} = (-1, -2, -1)$, se tiene que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 1 - 15 \neq 0.$$

Luego, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas r y s se cruzan.

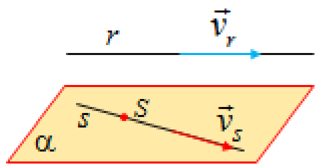
b) El vector de dirección de la recta, $\vec{v}_r = (1, 1, 3)$, será el normal al plano.



Si se quiere que el plano contenga al punto $P(2, -1, 5)$ su ecuación será:

$$\pi \equiv 1 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (y + 1) + 3 \cdot (z - 5) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y + 3z - 16 = 0.$$

c) El plano pedido viene determinado por el punto $S = (-1, -4, 0)$, de la recta s, y por los vectores $\vec{v}_s = (2, -1, 1)$ y $\vec{v}_r = (1, 1, 3)$.



Sus ecuaciones son:

$$\alpha \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda + t \\ y = -4 - \lambda + t \\ z = \lambda + 3t \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 1 \\ y+4 & -1 & 1 \\ z & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \equiv -4(x + 1) - 5(y + 4) + 3z = 0 \Rightarrow \alpha \equiv 4x + 5y - 3z + 24 = 0.$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30%. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40%, en el tercero del 50% y en el cuarto del 60%. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.

b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.

c) (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

Solución:

Designamos por A_i y F_i los sucesos acierto y fallo, respectivamente, en el lanzamiento i.

Se sabe que:

$$P(A_1)=0,3 \text{ y } P(F_1)=0,7; \quad P(A_2)=0,4 \text{ y } P(F_2)=0,6;$$
$$P(A_3)=0,5 \text{ y } P(F_3)=0,5; \quad P(A_4)=0,6 \text{ y } P(F_4)=0,4.$$

a) El globo explota antes el cuarto disparo si se acierta con alguno de los tres primeros.

Como

P(acertar con alguno de los tres primeros disparos) = 1 − P(fallar con los tres disparos) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ P(acertar con alguno de los tres primeros disparos) = $1-0,7\cdot 0,6\cdot 0,5=0,79$.

b) El globo sigue intacto tras el cuarto disparo cuando se fallan los cuatro disparos.

Por tanto,

P(globo intacto…) = P(cuatro fallos) = $0,7\cdot 0,6\cdot 0,5\cdot 0,4=0,084$.

c) El experimento puede estudiarse como una binomial $B(10,\ 0{,}85)$: número de ensayos, n = 10; probabilidad de acierto, p = 0,85; probabilidad de error, q = 0,15.

Si X es la variable aleatoria que mide el número de globos explotados, se tendrá:

$$P(X=6)=\binom{10}{6}\cdot 0,85^6\cdot 0,15^4 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 0,85^6\cdot 0,15^4=210\cdot 0,85^6\cdot 0,15^4=0,0401.$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275.8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63.6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

Solución:

Sean x, y, z los precios por kilo de dorada, lubina y rodaballo, respectivamente.

Con los datos del enunciado se obtiene:

$$13740000x+23440000y+7400000z=275800000 \to 1374x+2344y+740z=27580;$$
$$7400000z=63600000 \to 740z=6360 \to z=8,59 \text{ €}.$$
$$1374(y+0,11)+2344y+6360=27580 \Rightarrow 3718y=21068,86 \Rightarrow y=5,67 \text{ €}.$$

Luego, x = 5,78 €.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ (x-1)^3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) (0.5 puntos) Estudie su continuidad en $[-4, 4]$.

b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4, 4]$.

c) (1 punto) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x = 1$.

Solución:

a) El único punto que presenta dudas es $x = 1$. Hay que cmprobar que los límites laterales coinciden.

En efecto,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x-1)^2 = 0\,; \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1)^3 = 0$$

Por tanto, la función es continua en el intervalo [–4, 4].

b) Derivando,

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x<1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x>1 \end{cases}.$$

También coinciden las derivadas laterales en $x = 1$: $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0$ y $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 0$. Por tanto, la función es derivable en (–4, 4).

- Para $x < 1$, $f'(x) = 2(x-1) < 0 \Rightarrow$ la función es decreciente en el intervalo [–4, 1).
- Para $x > 1$, $f'(x) = 3(x-1)^2 > 0 \Rightarrow$ la función es creciente en el intervalo (1, 4].
- En el punto $x = 1$ se tendrá un mínimo.

c) $g(x) = f'(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{si } x \le 1 \\ 3(x-1)^2 & \text{si } x>1 \end{cases} \Rightarrow g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x<1 \\ 6(x-1) & \text{si } x>1 \end{cases}.$

La función $g(x)$ es continua en [–4,4], pues lo es en x = 1: se ha visto que,

$$\lim_{x\to 1^-} \left(g(x) = f'(x)\right) = 0 \text{ y } \lim_{x\to 1^+} \left(g(x) = f'(x)\right) = 0.$$

En cambio, no es derivable en $x = 1$, pues sus derivadas laterales no coinciden:

$$\lim_{x\to 1^-} g'(x) = \lim_{x\to 1^-} 2 = 2 \text{ y } \lim_{x\to 1^+} g'(x) = \lim_{x\to 1^+} 6(x-1) = 0.$$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $P(-3,1,2)$ y $Q(-1,0,1)$ y el plano π de ecuación $x+2y-3z=4$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π.

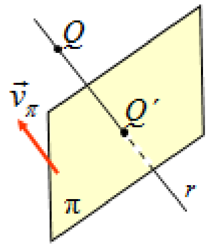
b) (0.5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.

c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q.

Solución:

a) La proyección de *Q* sobre π es el punto de corte de π con la recta perpendicular a π por *Q*.
La recta perpendicular a π que pasa por *Q* es:

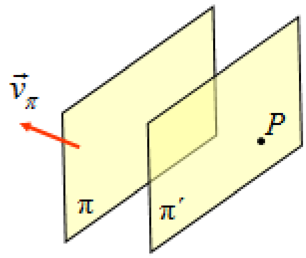
$$r \equiv \begin{cases} x = -1+t \\ y = 0+2t \\ z = 1-3t \end{cases}.$$



Corte de *r* con π:

$$(-1+t)+2\cdot(2t)-3\cdot(1-3t)=4 \Rightarrow 14t=8 \Rightarrow t=\frac{4}{7}.$$

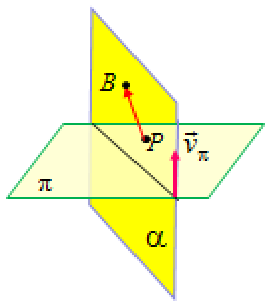
Por tanto, $Q´=\left(-\frac{3}{7},\frac{8}{7},-\frac{5}{7}\right)$.



b) El plano paralelo a π que contiene a *P* es:

$$\pi´ \equiv 1\cdot(x+3)+2\cdot(y-1)-3\cdot(z-2)=0 \Rightarrow \pi´ \equiv x+2y-3x+7=0.$$

c) El plano pedido viene determinado por los vectores $\vec{v}_\pi$ = (1, 2, –3) y ***PQ***, y por cualquiera de los puntos *P* (–3, 1, 2) o *Q*(–1, 0, 1).
Como *PQ* = (–1, 0, 1) – (–3, 1, 2) = (2, –1, –1), las ecuaciones del plano pedido son:



$$\alpha \equiv \begin{cases} x = -1+\lambda+2t \\ y = \quad 2\lambda - t \\ z = 1-3\lambda - t \end{cases} \Rightarrow \alpha \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 2 \\ y & 2 & -1 \\ z-1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \equiv -5(x+1)-5y-5(z-1)=0 \Rightarrow \alpha \equiv x+y+z=0.$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.25$ y $P(A \cap B) = 0.125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

a) (0.5 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B. ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?

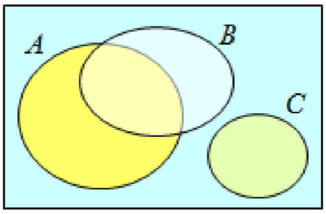
b) (0.5 puntos) ¿Son A y B independientes?

c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ (donde $\bar{A}$ denota el suceso complementario al suceso A).

d) (0.75 puntos) Calcular $P(\bar{B}|A)$.

Solución:

a) Los sucesos C y $A \cup B$ son incompatibles, pues en caso contrario C sería compatible con A o con B.
La situación puede representarse mediante un diagrama de Venn.



b) Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Como $P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125 = P(A \cap B)$ los sucesos son independientes.

c) Por una de las leyes de De Morgan: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$.

Como $P(A \cup B) = 0,5 + 0,25 - 0,125 = 0,625 \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,625 = 0,375$

d) Por la probabilidad condicionada:

$$P(\bar{B}/A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{0,375}{0,5} = 0,75.$$