UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO

Curso **2017-2018**

MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1 . Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & my & & & = & 1 \\ -2x & - & (m+1)y & + & z & = & -1 \\ x & + & (2m-1)y & + & (m+2)z & = & 2+2m, \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro m.

b) (0.5 puntos) Resolver el sistema en el caso $m = 0$.

Ejercicio 2 . Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (1.5 puntos) En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes: $m_1 = 0.92$, $m_2 = 0.94$, $m_3 = 0.89$, $m_4 = 0.90$, $m_5 = 0.91$.

Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función $E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + \cdots + (x - m_5)^2$ alcanza el mínimo. Calcule dicho valor x.

b) (1 punto) Aplique el método de integración por partes para calcular la integral $\displaystyle\int_1^2 x^2 \ln(x)dx$, donde $\ln$ significa logaritmo neperiano.

Ejercicio 3 . Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0$, $\quad \pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.

b) (1.5 puntos) Para el cuadrado de vértices consecutivos $ABCD$, con $A(2, 1, 3)$ y $B(1, 2, 3)$, calcular los vértices C y D, sabiendo que C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$.

Ejercicio 4 . Calificación máxima: 2.5 puntos.

El 60% de las ventas en unos grandes almacenes corresponden a artículos con precios rebajados. Los clientes devuelven el 15% de los artículos que compran rebajados, porcentaje que disminuye al 8% si los artículos han sido adquiridos sin rebajas.

a) (1.25 puntos) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.

b) (1.25 puntos) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Obtener los valores del parámetro m para los que la matriz A admite inversa.
b) (1 punto) Para $m = 0$, calcular $A \cdot B$ y $A^{-1} \cdot B$.
c) (0.5 puntos) Calcular $B \cdot B^t$ y $B^t \cdot B$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)$.
b) (0.75 puntos) Calcular $f'(4)$.
c) (1.25 puntos) Hallar el área del recinto limitado por la la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $P(1,1,1)$ y las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ 5x + z = 6 \end{array} \right.$, $s \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1/3}$, se pide:

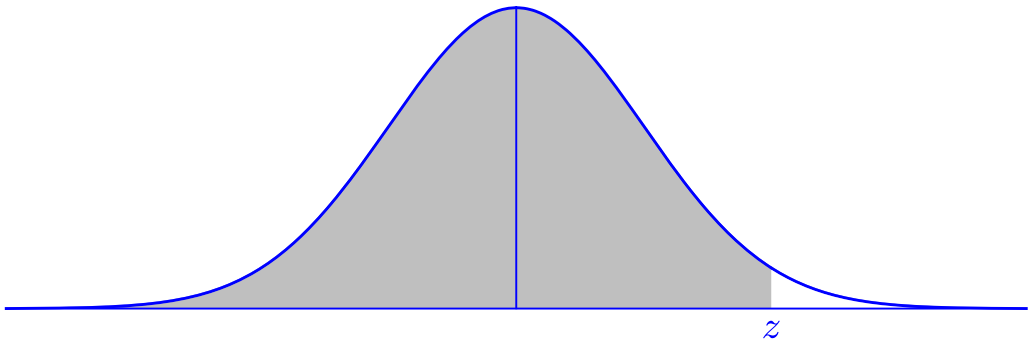
a) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r.
b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.
c) (0.5 puntos) Hallar el plano perpendicular a la recta s y que pasa por el punto P.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una fábrica se elaboran dos tipos de productos: A y B. El 75% de los productos fabricados son de tipo A y el 25% de tipo B. Los productos de tipo B salen defectuosos un 5% de las veces, mientras que los de tipo A salen defectuosos un 2.5% de las veces.

a) (1 punto) Si se fabrican 5000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?
b) (1.5 puntos) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $\mathrm{N}(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

OPCIÓN A

Ejercicio 1: **Calificación máxima:** 2,5 puntos.
Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ -2x - (m+1)y + z = -1 \\ x + (2m-1)y + (m+2)z = 2+2m \end{cases}$$

se pide:
a) (2 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro *m*.
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema en el caso *m* = 0.
Solución:
a) Sea *A* la matriz de coeficientes *y* *M* la matriz ampliada.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 0 & 1 \\ -2 & -(m+1) & 1 & -1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 & 2+2m \end{array}\right) = M$$

Si r(*A*) = r(*M*) = 3 → sistema compatible determinado: solución única.
Si r(*A*) = r(*M*) < 3 → sistema compatible indeterminado: infinitas soluciones.
Si r(*A*) < r(*M*) → sistema incompatible: no tiene solución.

El determinante de *A* vale

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -(m+1) & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{vmatrix} = -(m+1)(m+2) - 2m + 1 - m(-2(m+2)-1) = m^2 - 1 \to \text{Este}$$

determinante vale 0 si *m* = –1 o *m* = 1.
Con esto:

- Si $m \neq -1$ y $1 \Rightarrow$ r(*A*) = 3 = r(*M*). El sistema será compatible determinado.

- Si *m* = –1 se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) = M$. (El rango de *A* es 2: $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$).

Como el menor $|M_1| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow$ rango de *M* es 3. Sistema incompatible.

- Si *m* = 1 se tiene: $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) = M$. (El rango de *A* es 2: $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$).

El menor $|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 7 - 7 = 0 \Rightarrow$ rango de *M* también es 2. Sistema compatible indeterminado.

b) Si m = 0 el sistema es compatible determinado. Puede resolverse aplicando transformaciones de Gauss.

$$\begin{cases} x=1 \\ -2x-y+z=-1 \\ x-y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ -y+z=1 \\ -y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-E2 \end{matrix} \begin{cases} x=1 \\ -y+z=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases}.$$

Ejercicio 2: **Calificación máxima:** 2,5 puntos.

a) (1,5 puntos) En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes: m_1 = 0,92; m_2 = 0,94; m_3 = 0,89; m_4 = 0,90; m_5 = 0,91.

Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función $E(x)=(x-m_1)^2+(x-m_2)^2+...+(x-m_5)^2$ alcanza el mínimo. Calcule dicho valor x.

b) (1 punto) Aplique el método de integración por partes para calcular la integral $\int_1^2 x^2\ln(x)dx$, donde ln significa logaritmo neperiano.

Solución:

a) Sustituyendo los valores dados, la función es:

$$E(x)=(x-0,92)^2+(x-0,94)^2+(x-0,89)^2+(x-0,90)^2+(x-91)^2$$

Derivando e igualando a 0:

$$E'(x)=2(x-0,92)+2(x-0,94)+2(x-0,89)+2(x-0,90)+2(x-91)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x-9,12=0 \Rightarrow x = 0,912.$$

Como $E''(x)=10>0$, para x = 0,912 se obtiene el mínimo buscado.

b) Para hallar $\int x^2\ln(x)dx$ se toma:

$$u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx; \quad dv=x^2dx \Rightarrow v=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}$$

Por tanto:

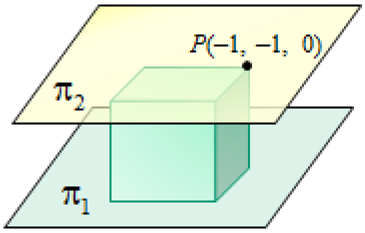
$$\int x^2\ln(x)dx=\ln(x)\cdot\frac{x^3}{3}-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^2}{3}dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}.$$

Luego:

$$\int_1^2 x^2\ln(x)dx = \left(\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2-\frac{8}{9}-\left(0-\frac{1}{9}\right)=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}.$$

Ejercicio 3: **Calificación máxima:** 2,5 puntos.
Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x+6y-12z+1=0$, $\pi_2 \equiv -2x-3y+6z-5=0$, se pide:
a) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.
b) (1,5 puntos) Para el cuadrado de vértices consecutivos *ABCD*, con *A*(2, 1, 3) y *B*(1, 2, 3), calcular los vértices *C* y *D*, sabiendo que *C* pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x-y+z=2$.

Solución:
Como los planos $\pi_1 \equiv 4x+6y-12z+1=0$ y $\pi_2 \equiv -2x-3y+6z-5=0$ son paralelos, la medida de la arista del cubo viene dada por la distancia entre ambos planos.



La distancia de entre esos planos es:

$$d(\pi_1,\pi_2)=d\left(P(-1,-1,0)\in\pi_2, \pi_1\equiv 4x+6y-12z+1=0\right)=\left|\frac{-4-6+1}{\sqrt{4^2+6^2+(-12)^2}}\right|=\frac{9}{14}.$$

Por tanto, el volumen del cubo será:

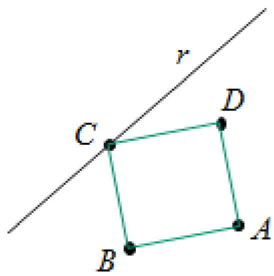
$$V=\left(\frac{9}{14}\right)^3=\frac{729}{2744}\ \text{u}^3.$$

b) Cuadrado de vértices consecutivos *ABCD*, con *A*(2, 1, 3) y *B*(1, 2, 3), y *C* pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x-y+z=2$.

El punto *C* estará en la recta determinada por π_2 y π_3.

$$\begin{cases}\pi_2 \equiv -2x-3y+6z-5=0\\ \pi_3 \equiv x-y+z=2\end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases}-2x-3y=5-6z\\ x-y=2-z\end{cases} \Rightarrow$$

$$r:\begin{cases}x=\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}t\\ y=-\dfrac{9}{5}+\dfrac{8}{5}t\\ z=t\end{cases} \to C\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}t,\quad -\frac{9}{5}+\frac{8}{5}t,\quad t\right).$$



Si *ABCD* es un cuadrado $\Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=0$.

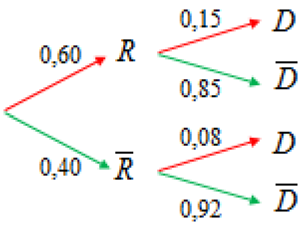
$$\overrightarrow{AB}=(1,2,3)-(2,1,3)=(-1,1,0);$$

$$\overrightarrow{CB}=(1,2,3)-\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}t,\quad -\frac{9}{5}+\frac{8}{5}t,\quad t\right)=\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}t,\quad \frac{19}{5}-\frac{8}{5}t,\quad 3-t\right)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=0 \Rightarrow (-1,1,0)\cdot\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}t,\quad \frac{19}{5}-\frac{8}{5}t,\quad 3-t\right)=0\Rightarrow -\frac{4}{5}+\frac{3}{5}t+\frac{19}{5}-\frac{8}{5}t=0 \Rightarrow t=3.$$

Por tanto: *C*(2, 3, 3).
Si *D*(*a*, *b*, *c*), como $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB} \Rightarrow (2-a,3-b,3-c)=(-1,1,0) \Rightarrow a=3;\ b=2,\ c=3$.
Luego, *D*(3, 2, 3).

Ejercicio 4: **Calificación máxima:** 2,5 puntos.
El 60 % de las ventas en unos grandes almacenes corresponden a artículos con precios rebajados. Los clientes devuelven el 15 % de los artículos que compran rebajados, porcentaje que disminuye al 8 % si los artículos han sido adquiridos sin rebajas.
a) (1,25 puntos) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.
b) (1,25 puntos) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?
Solución:
Sean R y $\overline{R}$ los sucesos "artículo rebajado" y "no rebajado", respectivamente. Y sean D y $\overline{D}$ los sucesos "los clientes devuelven un artículo comprado" y "ni lo devuelven", también respectivamente.
Atendiendo a los datos del enunciado se puede formar el siguiente diagrama de árbol.



a) La probabilidad de que un artículo sea devuelto es:
$$P(D) = P(R) \cdot P(D/R) + P(\overline{R}) \cdot P(D/\overline{R}) =$$
$= 0{,}60 \cdot 0{,}15 + 0{,}40 \cdot 0{,}08 = 0{,}122.$
El 12,2 % de los artículos será devuelto.

b) La probabilidad de que un artículo devuelto fuese adquirido a precios rebajados es:
$$P(R/D) = \frac{P(R) \cdot P(D/R)}{P(D)} = \frac{0{,}60 \cdot 0{,}15}{0{,}122} = \frac{90}{122} \approx 0{,}738$$ → El 73,8 % de los artículos devueltos se compró a precios rebajados.

OPCIÓN B

Ejercicio 1: **Calificación máxima:** 2,5 puntos.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Obtener los valores del parámetro *m* para los que la matriz *A* admite inversa.
b) (1 punto) Para *m* = 0, calcular $A \cdot B$ y $A^{-1} \cdot B$.
c) (0.5 puntos) Calcular $B \cdot B^t$ y $B^t \cdot B$, donde B^t denota la matriz traspuesta de *B*.

Solución:

a) La matriz *A* es invertible siempre que su determinante sea distinto de 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = m(-4-m) - 4 = -m^2 - 4m - 4 = -(m+2)^2 \Rightarrow |A| = 0 \text{ si } m = -2.$$

→ La matriz *A* admite inversa si $m \neq -2$.

b) Para *m* = 0:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ con } |A| = -4.$$

Su inversa es $A^{-1} = \dfrac{(Adj(A))^t}{|A|}$, siendo $Adj(A)$ la matriz de los adjuntos de *A*.

Esta matriz de los adjuntos es: $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -8 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Luego:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con esto:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2: **Calificación máxima:** 2,5 puntos.

Dada la función $f(x)=\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Calcular $f'(4)$.

c) (1,25 puntos) Hallar el área del recinto limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

La función dada puede definirse a trozos.

$$f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}=\begin{cases}\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}}, & \text{si } x<0\\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}, & \text{si } x\geq 0\end{cases}.$$

→ Puede verse que se trata de una función par, lo que simplifica futuros cálculos.

a) Esta función tiene una asíntota horizontal, la recta $y = 1$, tanto hacia $+\infty$ como hacia $-\infty$, pues:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+9}{x^2}}}=\frac{1}{1}=1;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-x}{-x}}{\sqrt{\frac{x^2+9}{(-x)^2}}}=\frac{1}{1}=1.$$

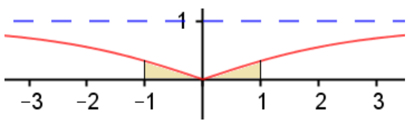
(Si se ha visto que es "par" el segundo límite no sería necesario).

b) Para $x = 4$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1\cdot\sqrt{x^2+9}-x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}}{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{9}{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^3}$.

Luego, $f'(4)=\dfrac{9}{\left(\sqrt{4^2+9}\right)^3}=\dfrac{9}{125}$.

c) El área pedida, S, viene dada por:

$$S=\int_{-1}^{0}\frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}dx+\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx.$$



Por su simetría:

$$S=2\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx=2\int_0^1\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}dx=\left(2\sqrt{x^2+9}\right)\Big|_0^1=2\sqrt{10}-6\ \text{u}^2.$$

→ La figura no se pide. No obstante podría comentarse que como la función es siempre positiva (el valor absoluto así lo indica), el área se calcula tal y como se ha indicado.

Ejercicio 3: **Calificación máxima:** 2,5 puntos.

Dados el punto $P(1, 1, 1)$ y las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x+z=6 \end{cases}$, $s \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1/3}$, se pide:

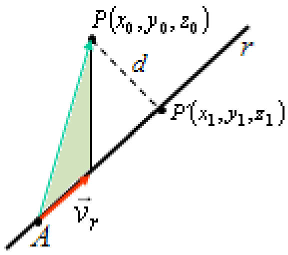
a) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r.
b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.
c) (0,5 puntos) Hallar el plano perpendicular a la recta s y que pasa por el punto P.

<u>Solución</u>:

a) Se escribe la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x+z=6 \end{cases}$ en paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=2-2t \\ z=6-5t \end{cases}$.

La ecuación de la distancia de un punto P a una recta r es:

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}_r\right|}$$, siendo $A \in r$.



En este caso:

$A = (0, 2, 6)$, $P = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{AP} = (1, -1, -5)$, $\vec{v}_r = (1, -2, -5)$.

El producto vectorial vale:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = (-5,\ 0,\ -1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r\right| = \sqrt{(-5)^2+(-1)^2} = \sqrt{26}.$$

El módulo de $\vec{v}_r$: $\left|\vec{v}_r\right| = \sqrt{1+(-2)^2+(-5)^2} = \sqrt{30}$.

Luego $d(P,r) = \dfrac{\sqrt{26}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\dfrac{13}{15}}$.

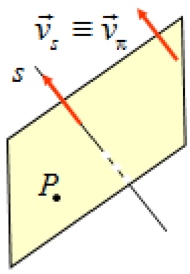
b) Hay que estudiar la dependencia lineal de los vectores $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y **AB**, siendo $A \in r$ y $B \in s$. Si esos vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan; si son linealmente dependientes, están en el mismo plano.

$\vec{v}_r = (1, -2, -5)$, $\vec{v}_s = (-1, 1, 1/3)$ y **AB** = (2, –1, 1) – (0, 2, 6) = (2, –3, –5).

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 1/3 \\ 2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -5+1+2\cdot\left(5-\dfrac{2}{3}\right)-5 = -\dfrac{1}{3} \neq 0$, los vectores son linealmente independientes. En consecuencia, las rectas r y s se cruzan.

c) El plano perpendicular a la recta s y que pasa por el punto P tiene como vector normal a $\vec{v}_s = (-1, 1, 1/3)$.

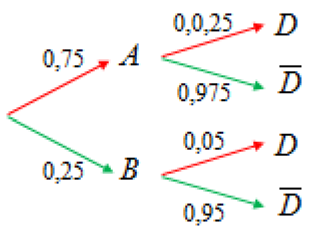
Por tanto, su ecuación será: $\pi \equiv -x+y+\dfrac{1}{3}z+d=0$.



Como se desea que pase por $P(1, 1, 1) \Rightarrow -1+1+\dfrac{1}{3}+d=0 \Rightarrow d=-\dfrac{1}{3}$.

El plano pedido será: $\pi \equiv -x+y+\dfrac{1}{3}z-\dfrac{1}{3}=0$.

Ejercicio 4: **Calificación máxima:** 2,5 puntos.
En una fábrica se elaboran dos tipos de productos: A y B. El 75 % de los productos fabricados son de tipo A y el 25 % de tipo B. Los productos de tipo B salen defectuosos un 5 % de las veces, mientras que los de tipo A salen defectuosos un 2,5 % de las veces.
a) (1 punto) Si se fabrican 5000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?
b) (1,5 puntos) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.
<u>Solución</u>:
El diagrama de árbol asociado es el siguiente.



a) La probabilidad de que un producto salga defectuoso es:

$$P(D) = P(A)\cdot P(D/A) + P(B)\cdot P(D/B) =$$
$$= 0{,}75 \cdot 0{,}025 + 0{,}25 \cdot 0{,}05 = 0{,}03125.$$

Si se fabrican 5000 hay que esperar que el número de productos defectuosos sea 5000 · 0,03125 = 156,25.

b) La distribución inicial es una binomial $B(6000,\ 0{,}025) \to n = 6000$; $p = 0{,}025$, $q = 0{,}975$.
Se puede estudiar como la normal $N\left(np, \sqrt{npq}\right)$, que se tipifica haciendo el cambio

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}.$$

En este caso, la normal será $N\left(6000\cdot 0{,}025,\ \sqrt{6000\cdot 0{,}025\cdot 0{,}975}\right) \to N(150,\ 12{,}09)$.

Con esto:

$$P(X > 160) = P\left(Z > \frac{160-150}{12{,}09}\right) = P(Z > 0{,}827) = 1 - P(Z < 0{,}827) =$$
$$= 1 - 0{,}7967 = 0{,}2033.$$

→ Si se hace la corrección de continuidad, entonces:

$$P(X > 160) = P(X' > 160{,}5) = P\left(Z > \frac{160{,}5-150}{12{,}09}\right) = P(Z > 0{,}87) = 1 - P(Z < 0{,}87) =$$
$$= 1 - 0{,}8078 = 0{,}1922.$$