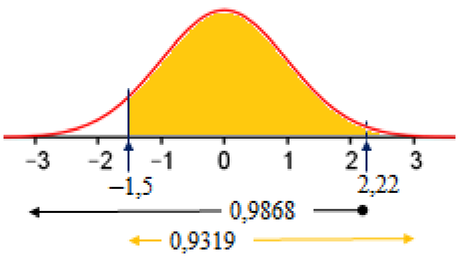
SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

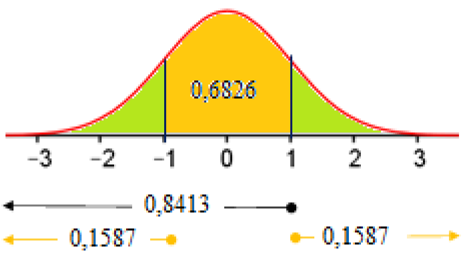
1. Sea Z una variable normal estándar, $N(0, 1)$; halla las probabilidades:
a) $P(Z \le 2{,}22)$. b) $P(Z \le -2{,}22)$. c) $P(-1{,}5 < Z < 3)$.
Solución:
a) Basta con buscar en la tabla $N(0, 1)$.
$P(Z \le 2{,}22) = 0{,}9868$.

b) $P(Z \le -2{,}22) = 1 - P(Z \le 2{,}22) = 1 - 0{,}9868 = 0{,}0132$.

c) $P(-1{,}5 < Z < 3) = P(Z < 3) - P(Z < -1{,}5) =$
$= 0{,}9987 - (1 - P(Z < 1{,}5)) =$
$= 09987 - (1 - 0{,}9332) = 0{,}9319$.



2. Utilizando la Tabla Normal estándar, $N(0, 1)$, halla las probabilidades:
a) $P(-1 < Z < 1)$. b) $P(-2 < Z < 2)$. c) $P(-3 < Z < 3)$.
Halla los mismos valores de probabilidad utilizando recursos informáticos.
Solución:
a) $P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1)$.
En la gráfica se observa que:
$P(Z < -1) = P(Z > 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$.
Luego:
$P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1) =$
$= 0{,}8413 - 0{,}1587 = 0{,}6826$.



b) $P(-2 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -2) = 0{,}9772 - (1 - 0{,}9772) = 0{,}9544$.

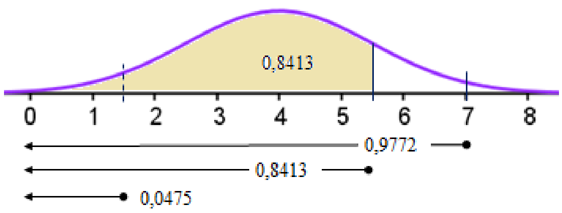
c) $P(-3 < Z < 3) = P(Z < 3) - P(Z < -3) = 0{,}9987 - (1 - 0{,}9987) = 0{,}9974$.

Con ordenador: en "Descartes" → ir a Calculo directo; indicar entre dos valores:
$P(-1 < Z < 1) = 0{,}68277703$; $P(-2 < Z < 2) = 0{,}954568477$; $P(-3 < Z < 3) = 0{,}99736399$

3. Siendo X una variable que se distribuye $N(4,\ 1{,}5)$.
a) Tipificando la variable calcula las probabilidades: (1) $P(X < 7)$; (2) $P(X < 5{,}5)$; (3) $P(X < 1{,}5)$.
b) (Optativo) Halla esas mismas probabilidades directamente con ordenador.
b) Solución:
a) Se tipifica haciendo $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \to Z = \dfrac{X - 4}{1{,}5}$.

(1) $Z = \dfrac{7-4}{1{,}5} = 2 \Rightarrow P(X < 7) = P(Z < 2) = 0{,}9772$.

(2) $Z = \dfrac{5{,}5-4}{1{,}5} = 1 \Rightarrow P(X < 5{,}5) = P(Z < 1) = 0{,}8413$.



(3) $Z = \dfrac{1{,}5-4}{1{,}5} = -\dfrac{5}{3} \approx -1{,}67$: $P(X < 1{,}5) = P(Z < -1{,}67) = 1 - P(Z < 1{,}67) = 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$.

Con ordenador: en "Descartes" → ir a Calculo directo, indicar media y desv. típica; indicar menor: $P(X < 7) = 0{,}977286938$; (2) $P(X < 5{,}5) = 0{,}841400613$; (3) $P(X < 1{,}5) = 0{,}047755365$.

4. Si X es una variable continua $N(28, 5)$, halla:

a) $P(X > 31)$. b) $P(28 < X < 35{,}5)$. c) $P(20 < X < 38)$.

Solución:

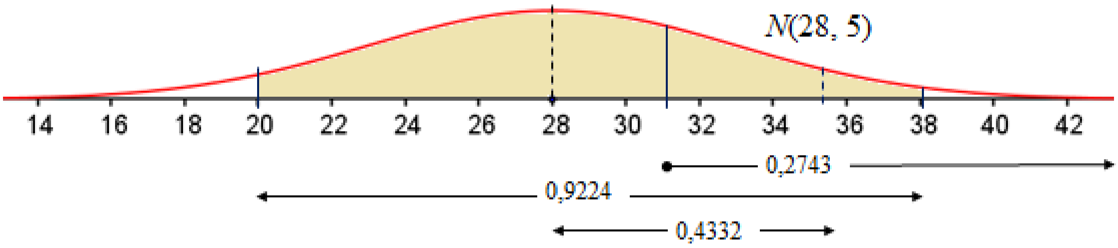
a) $P(X > 31) = P\left(Z > \dfrac{31-28}{5}\right) = P(Z > 0{,}6) = 1 - P(Z < 0{,}6) = 1 - 0{,}7257 = 0{,}2743$.

b) $P(28 < X < 35{,}5) = P\left(\dfrac{28-28}{5} < Z < \dfrac{35{,}5-28}{5}\right) = P(0 < Z < 1{,}5) = P(Z < 1{,}5) - 0{,}5 =$

$= 0{,}9332 - 0{,}5 = 0{,}4332$.

c) $P(20 < X < 38) = P\left(\dfrac{20-28}{5} < Z < \dfrac{38-28}{5}\right) = P(-1{,}6 < Z < 2) = P(Z < 2) - (1 - P(Z < 1{,}6)) =$

$= 0{,}9772 - (1 - 0{,}9452) = 0{,}9224$.



5. Utilizando la tabla normal $N(0, 1)$, determina el valor de k que cumple:

a) $P(Z < k) = 0{,}9115$. b) $P(Z < k) = 0{,}9452$. c) $P(Z < k) = 0{,}1587$. d) $P(Z < k) = 0{,}95$.

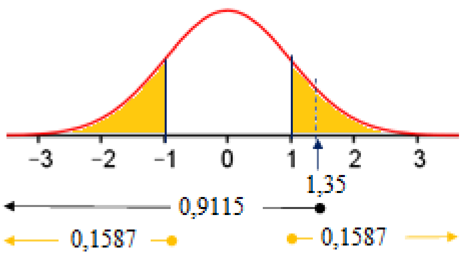
(Optativo) Halla esos mismos valores de k utilizando recursos informáticos.

Solución:

a) El valor 0,9115 de la tabla se corresponde con $Z = 1{,}35$.
Por tanto, $k = 1{,}35$.

b) El valor 0,9452 de la tabla se corresponde con $Z = 1{,}6$.
Por tanto, $k = 1{,}6$.

c) Como 0,1587 es menor que 0,5 hay que buscar el valor de Z que deja por debajo $1 - 0{,}1587 = 0{,}8413$. Ese valor es $Z = 1$. Por tanto, $k = -1$.



d) El valor 0,95 no aparece en la tabla. Como está entre 0,9495, correspondiente a $Z = 1{,}64$, y 0,9505, correspondiente a $Z = 1{,}65$, el valor de k buscado es $k = 1{,}645$.

Utilizando recursos informáticos.
En "Descartes" → ir a Calculo inverso, indicar barrido izquierda y probabilidad:

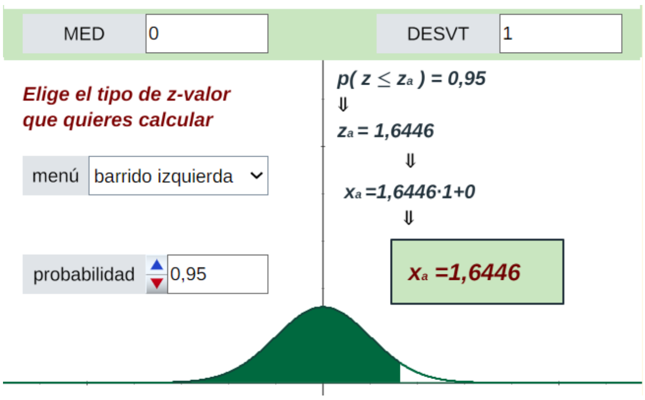
a) $P(Z < k) = 0{,}9115 \Rightarrow k = x_a = 1{,}3499$.

b) $P(Z < k) = 0{,}9452 \Rightarrow k = x_a = 1{,}5998$.

c) $P(Z < k) = 0{,}1587 \Rightarrow k = x_a = -0{,}9997$.

d) $P(Z < k) = 0{,}95 \Rightarrow k = x_a = 1{,}6446$.

Para el caso d) aparece la pantalla de la derecha.



6. Para una distribución normal *N*(60, 5), determina el valor de *k* que cumple:

a) $P(X<k)=0,90$. b) $P(X>k)=0,95$. c) $P(60-k<X<60+k)=0,9544$.

Halla esos mismos valores de *k* utilizando recursos informáticos.

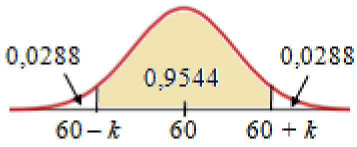
Solución:

En todos los casos hay que tipificar la variable: $Z=\dfrac{X-60}{5}$. Con esto:

a) $P(X<k)=0,90 \Leftrightarrow P\left(Z<\dfrac{k-60}{5}\right)=0,90 \Rightarrow \dfrac{k-60}{5}=1,28 \Rightarrow k=66,4$.

b) $P(X>k)=0,95 \Leftrightarrow P\left(Z>\dfrac{k-60}{5}\right)=0,95 \Rightarrow \dfrac{k-60}{5}=-1,645 \Rightarrow k=51,775$.

c) $P(60-k<X<60+k)=0,9544$ $\Rightarrow$ la probabilidad que cae fuera de ese intervalo es 1 – 0,9544 = 0,0456; la mitad (0,0228) en la cola de la izquierda de la campana, la otra mitad en la cola derecha.



Por tanto, $P(X<60+k)=0,9544+0,0288=0,9772$.

Luego:

$$P(X<60+k)=0,9772 \Leftrightarrow P\left(Z<\dfrac{60+k-60}{5}\right)=0,9772 \Rightarrow \dfrac{k}{5}=2 \Rightarrow k=10.$$

Esto es, en el intervalo (50, 70) = (60 –2σ, 60 + 2σ) caen el 95,44% de los valores de *X*, *N*(60, 5).

Utilizando recursos informáticos.

En "Descartes" → ir a Calculo inverso. Indicar: MED (60) y DESVT (5).

a) barrido izquierda y probabilidad (0,90). Se obtiene 66,407.

b) barrido derecha y probabilidad (0,95). Se obtiene 51,777.

c) barrido central y probabilidad (0,9544). Se obtiene x_a = 50,0075; x_b = 69,9925 ⇒

60 – *k* = 50,0075 ⇒ *k* = 60 – 50,0075 = 9,9925.

7. Las calificaciones de un grupo numeroso de estudiantes que han realizado un examen siguen una distribución normal de media 20 y desviación típica 10. Calcula:

a) La probabilidad de que un estudiante elegido al azar obtenga una calificación entre 15 y 25.

b) La calificación que solo superan o igualan el 20 % de los estudiantes.

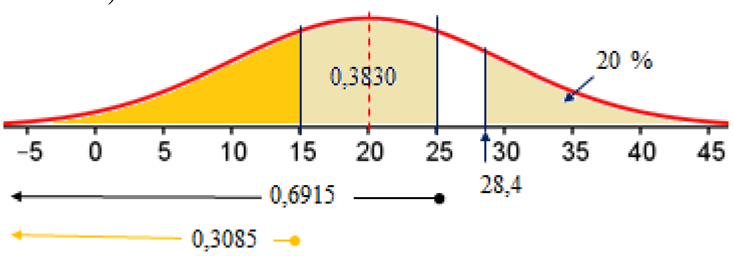
Solución:

La distribución es $N(20,\ 10)$. Se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-20}{10}$.

a) En este caso:

$$P(15\le X\le 25)=P(X\le 25)-P(X\le 15)=P\left(Z<\dfrac{25-20}{10}\right)-P\left(Z<\dfrac{15-20}{10}\right)=$$

$$=P(Z<0,5)-P(Z<-0,5) = 0,6915 - (1 - 0,6915) = 0,3830.$$



b) Hay que encontrar la calificación C tal que $P(X > C) = 0,20 \Rightarrow P(X \leq C) = 0,80$.

Luego:

$$P\left(Z < \frac{C-20}{10}\right) = 0,80 \Rightarrow \frac{C-20}{10} = 0,8416 \Rightarrow C = 0,8416 \cdot 10 + 20 = 28,416 \approx 28,4.$$

8. En una distribución normal, halla el porcentaje de valores que distan de la media:

a) Menos de 1,2 desviaciones típicas.

b) Entre 0,5 y 1 desviación típica.

<u>Solución</u>:

a) Se pide calcular X tal que $|X - \mu| < 1,2\sigma \Rightarrow -1,2 < \frac{X-\mu}{\sigma} < 1,2$.

Como

$$P\left(-1,2 < \frac{X-\mu}{\sigma} < 1,2\right) = P(-1,2 < Z < 1,2) = P(Z < 1,2) - P(Z < -1,2) = 2 \cdot P(Z < 1,2) - 1 =$$

$= 2 \cdot 0,8849 - 1 = 0,7698 \Rightarrow$ el 76,98 % de valores de X distan de μ menos de $1,2\sigma$.

Si, por ejemplo, la media fuese $\mu = 10$ y la desviación típica $\sigma = 2$, habría que resolver:

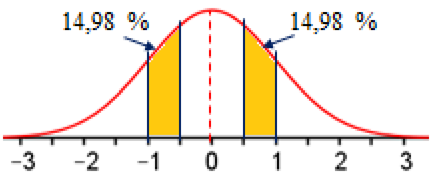
$$-1,2 < \frac{X-\mu}{\sigma} < 1,2 \Leftrightarrow -1,2 < \frac{X-10}{2} < 1,2 \Rightarrow 7,6 < X < 12,4.$$

Luego, en este caso, el 76,98 % de los valores de X está entre 7,6 y 12,4.

b) Hay que calcular: $P\left(0,5 < \frac{X-\mu}{\sigma} < 1\right)$.

$$P\left(0,5 < \frac{X-\mu}{\sigma} < 1\right) = P(0,5 < Z < 1) =$$

$= P(Z < 1) - P(Z < 0,5) = 0,8413 - 0,6915 = 0,1498$.



También hay que contar la parte izquierda: $-1 < Z < -0,5$; que supone otro 14,98 %.

Luego, el 29,96 % de los valores está entre 0,5 y 1 σ de la media.

9. Supongamos que la estatura media de las alumnas de bachillerato se distribuye normalmente con media $\mu = 166$ cm y desviación típica 9 cm. Si se elige una alumna al azar halla la probabilidad de que su estatura sea:

a) Superior a 175 cm. b) Inferior a 155 cm. c) Esté entre 155 cm y 175 cm.

<u>Solución</u>:

La normal de media μ y desviación típica σ, $N(\mu, \sigma)$, se tipifica mediante el cambio $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, (en este caso, para $\mu = 166$ y $\sigma = 9 \to Z = \frac{X-166}{9}$), se tendrá:

a) $P(X > 175) = P\left(Z > \frac{175-166}{9}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$.

b) $P(X < 155) = P\left(Z < \frac{155-166}{9}\right) = P(Z < -1,22) = 1 - P(Z < 1,22) = 1 - 0,8888 = 0,1112$.

c) $P(155 < X < 175) = P(X < 175) - P(X < 155) = 0,8413 - 0,1112 = 0,7301$.

10. Las alturas de 500 estudiantes varones están distribuidas normalmente con media 172 cm y desviación típica 12 cm. Aproximadamente, ¿cuántos estudiantes tienen una altura?
a) Igual a 170 cm. b) Menor que 170 cm. c) Entre 175 y 1 90 cm.
<u>Solución</u>:
a) Si se entiende por igual "exactamente igual": $P(X=170)=0$.
La probabilidad de un valor concreto (de un punto) siempre es 0.
Si, como suele admitirse en la práctica, una estura de 170 cm se asigna a todos los individuos que miden entre 169,5 y 170.5 cm, entonces:

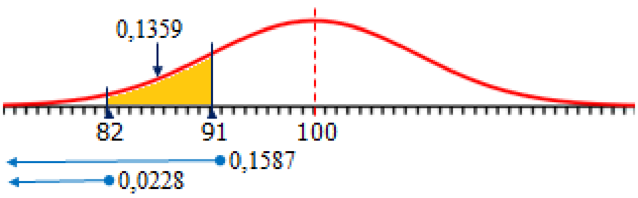
$$P(X=170)=P(169,5<X<170,5)=P\left(\frac{169,5-172}{12}<Z<\frac{170,5-172}{12}\right)=$$
$$=P(-0,208<Z<-0,125)=P(Z<-0,125)-P(Z<-0,208)=$$
$$=1-P(Z<0,125)-(1-P(Z<0,208))\approx 1-0,5498-(1-0,5824)=0,0326.$$

Luego, se les asignará 172 cm a 500 · 0,0326 = 16,3 estudiantes: a 16 o 17 estudiantes.
→ 0,5498 y 0,5824 se han asignado por "interpolación".
- Con ordenador se obtiene: $P(169,5<X<170,5)$ = 0,032803447.

b) Para un estudiante:
$$P(X<170)=P\left(Z<\frac{170-172}{12}\right)=P(Z<-0,166...)\approx P(Z<-0,17)=1-0,5675=0,4325.$$
Para 500 estudiantes: 500 · 0,4325 = 216,25 ⟶ aproximadamente 216.
- Con ordenador se obtiene: $P(X<170)$ = 0,433771382.

c) $$P(175<X<190)=P\left(\frac{175-172}{12}<Z<\frac{190-172}{12}\right)=P(0,25<Z<1,5)=$$
$$=P(Z<1,5)-P(Z<0,25)=0,9932-0,5987=0,3345\to 0,3345\cdot 500=167,25.$$
Aproximadamente 167 estudiantes.
- Con ordenador se obtiene: $P(175<X<190)$ = 0,334460758.

11. La longitud de cierto tipo de peces sigue una distribución normal de media 100 mm y desviación típica 9 mm. ¿Cuál es la probabilidad de que uno de esos peces mida entre 82 mm y 91 mm?
<u>Solución</u>:
La distribución es $N(100, 9)$. La variable X que mide la longitud de esos peces se tipifica haciendo el cambio $Z=\frac{X-100}{9}$.
Luego:
$$P(X<91)=P\left(Z<\frac{91-100}{9}\right)=P(Z<-1)=$$
$$=1-P(Z<1)=1-0,8713=0,1587.$$



$$P(X<82)=P\left(Z<\frac{82-100}{9}\right)=P(Z<-2)=1-P(Z\le 2)=1-0,9772=0,0228.$$

$$P(82<X<91)=P(X<91)-P(X<82)=0,1587-0,0228=0,1359.$$

12. Una compañía de telefonía fabrica teléfonos móviles cuya vida útil (obsolescencia programada) se ajusta a una distribución normal de media 30 meses y desviación típica 3 meses. Elegido un teléfono móvil al azar:

a) Calcula la probabilidad de que funcione bien durante más de 32 meses.

b) ¿Qué porcentaje de teléfonos móviles funcionan bien entre 24 y 36 meses?

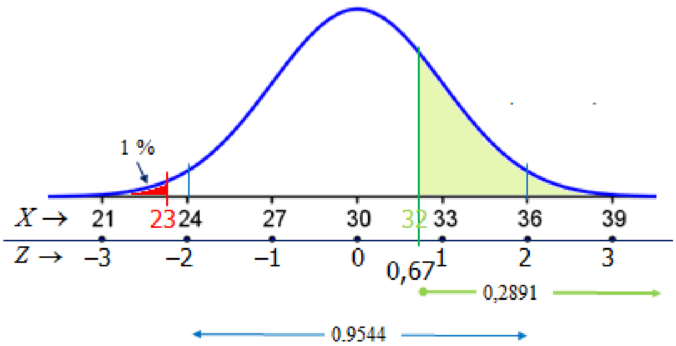
c) La compañía garantiza el correcto funcionamiento del teléfono durante un tiempo *t* (en meses); si se estropea antes, la compañía ofrece un teléfono nuevo. Si se desea afrontar un máximo de un 1 % de reposiciones, ¿cuál será el tiempo de garantía?

Solución:

El tiempo de vida útil de los teléfonos se ajusta a la distribución normal *N*(30, 3).

Se tipifica haciendo el cambio: $Z=\dfrac{X-30}{3}$.

En la figura se muestran los valores de *X* y los correspondientes tipificados de *Z*.



Con esto:

a) $P(X>32)=P\left(Z>\dfrac{32-30}{3}\right)\approx$

$\approx P(Z>0,67)=1-P(Z<0,67)=$

$=1-0,7109=0,2891$.

b) $P(24<X<36)=P\left(\dfrac{24-30}{3}<Z<\dfrac{36-30}{36}\right)=P(-2<Z<2)=P(Z<2)-P(Z<-2)=$

$=P(Z<2)-\left(1-P(Z<2)\right)=0,9772-(1-0,9772)=0,9544$.

El 95,44 % de los teléfonos de esa compañía dura entre 2 y 3 años.

c) Hay que encontrar el valor *t* tal que $P(X<t)=0,01$, se resuelve

$$P(X<t)=P\left(Z<\frac{t-30}{3}\right)=0,01\Rightarrow\frac{t-30}{3}=-2,33\Rightarrow t=-2,33\cdot 3+30=23,01.$$

Debe ofrecer una garantía de 23 meses.

13. El diámetro de las ciruelas de una determina variedad se distribuye normalmente con media 4,5 cm y desviación típica 0,3 cm. Si se desea seleccionar, para su exportación, el 10 % de las más grandes, ¿a partir de qué tamaño hay que cogerlas?

Solución:

La medida *X* de su diámetro se distribuye según la normal: *N*(4,5, 0,3). Esta normal se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-4,5}{0,3}$.

Se desea encontrar el valor *d* (de diámetro) tal que $P(X>d)=0,10\Rightarrow$

$$P\left(Z>\frac{d-4,5}{0,3}\right)=0,10\Rightarrow\frac{d-4,5}{0,3}=1,28\Rightarrow d=0,3\cdot 1,28+4,5=4,884 \text{ cm.}$$

14. El peso de los varones adultos de cierta comunidad sigue una normal de media $\mu = 75$ kg y desviación típica $\sigma = 5$ kg.

a) Si se elige al azar un hombre adulto de esa población, halla la probabilidad de que tenga un peso entre 70 y 80 kg.

b) Si se admite que un adulto de esa población tiene sobrepeso si pesa más de 82 kg, ¿qué porcentaje de esa población tiene sobrepeso?

c) ¿Cuál es el peso máximo para estar entre el 25 % de los más delgados en esa población?

Solución:
Se trata de una distribución normal $N(75, 5)$.
Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-75}{5}$.

a) $P(70 < X < 80) = P\left(\dfrac{70-75}{5} < Z < \dfrac{80-75}{5}\right) = P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1)$
$= P(Z<1) - (1 - P(Z<1)) = 0,8413 - 1 + 0,8413 = 0,6826$.

b) $P(X > 82) = P\left(Z > \dfrac{82-75}{5}\right) = P(Z > 1,4) = 1 - P(Z < 1,4) = 1 - 0,9192 = 0,0808$.
El 8,08 % de esa población tiene sobrepeso.

c) Si x es el peso máximo buscado; debe cumplirse que:
$P(X < x) = 0,25 \Rightarrow P\left(Z < \dfrac{x-75}{5}\right) = 0,25 \Rightarrow P\left(Z > \dfrac{x-75}{5}\right) = P\left(Z < -\dfrac{x-75}{5}\right) = 0,75 \Rightarrow$
$\Rightarrow -\dfrac{x-75}{5} \approx 0,67 \Rightarrow x \simeq 71,65$ kg.
El valor Z = 0,67 deja por debajo una probabilidad de 0,7486, que es el más cercano a la probabilidad 0,75 buscada.
Por tanto, para estar entre el 25 % de los adultos más delgados de esa población hay que pesar menos de 71,65 kg.

15. La temperatura de una ciudad en verano se ajusta a una distribución normal de media 30 grados centígrados (ºC) y desviación típica 6 ºC. Si se elige un día de verano al azar, calcula la probabilidad de que:
a) Su temperatura supere los 39 ºC.
b) Su temperatura esté entre 25º y 30º.
c) ¿A partir de qué temperatura uno de esos días estará entre el 10 % de los días más calurosos?
Solución:
Se trata de una distribución normal $N(30, 6)$.
Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-30}{6}$.

a) $P(X < 39) = P\left(Z < \dfrac{39-30}{6}\right) = P(Z < 1,5)$ = 0,9332.

b) $P(25 < X < 30) = P\left(\dfrac{25-30}{6} < Z < \dfrac{30-30}{6}\right) = P(-0,833 < Z < 0)$ =
$= P(Z < 0,833) - 0,5$ = 0,7976 – 0,5 = 0,2976.
El valor de probabilidad 0,7976 se obtiene aproximando por interpolación:
$P(Z < 0,83) = 0,7967$; $P(Z < 0,84) = 0,7995$
La diferencia correspondiente a 10 milésimas (de 0,830 a 0,840) es 0,0028 $\Rightarrow$ La diferencia para 3 milésimas (de 0,830 a 0,833) será, aproximadamente, 0,0009, que habría que sumar a 0,7967 $\to$ 0,7967 + 0,0009 = 0,7976.
$\to$ Puede darse por buena la respuesta:
$P(Z < 0,833) - 0,5 \approx P(Z < 0,83) - 0,5$ = 0,7967 – 0,5 = 0,2967.

c) Hay que buscar el valor de k tal que $P(X<k)=0,90 \Leftrightarrow$ b) $P\left(Z<\dfrac{k-30}{6}\right)=0,90 \Rightarrow$

$\dfrac{k-30}{6}\approx 1,28 \Rightarrow k = 37,68$ ºC.

16. Los resultados de un examen realizado a 500 opositores se ajustan a una distribución normal de media 40 puntos y desviación típica 10 puntos.
a) ¿Qué porcentaje de opositores obtuvo una puntuación entre 30 y 60 puntos?
b) Si solo hay 100 plazas, que se asignan a los 100 mejores resultados de ese examen, ¿cuántos puntos hay que obtener para conseguir una de esas plazas?
Solución:
La distribución es una normal $N(40, 10) \to$ Se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-40}{10}$.

a) $P(30<X<60)=P\left(\dfrac{30-40}{10}<Z<\dfrac{60-40}{10}\right)=P(-1<Z<2)=$

$= P(Z<2)-P(Z<-1)=P(Z<2)-(1-P(Z<1))$ = 0,9772 – (1 – 0,8413) = 0,8185.

b) Si de los 500 opositores hay que elegir a los 100 mejores (el 20 %) $\Rightarrow$ hay que estar entre el 20 % de las notas más altas. Por tanto, hay que encontrar la nota n tal que:

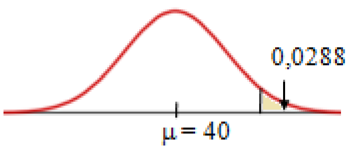
$P(X>n)=0,20 \Rightarrow P(X<n)=0,80$.

Como,

$P(X<n)=P\left(Z<\dfrac{n-40}{10}\right)=0,80 \Rightarrow \dfrac{n-40}{10}=0,84 \Rightarrow n = 48,4$.

La nota de corte, para estar en los 100 mejores, será 48,4 puntos.

17. La edad de los habitantes de cierta ciudad se distribuye normalmente, con una media de 40 años. Se sabe además que el 2,28 % de los habitantes tiene más de 60 años.
a) ¿Cuál es la desviación típica?
b) ¿Cuál es el porcentaje de habitantes con menos de 35 años?
Solución:
La distribución de edad de la población es como se indica en la figura adjunta.



a) Se sabe que $P(X>60)=0,0228$.

Como la normal de media μ y desviación típica σ, $N(\mu, \sigma)$, se tipifica mediante el cambio $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$, (para $\mu = 40$ y σ desconocida), se tendrá:

$$P(X>60)=P\left(Z>\frac{60-40}{\sigma}\right)=0,0228 \Leftrightarrow P\left(Z>\frac{20}{\sigma}\right)=0,0228 \Rightarrow$$

Como

$$P\left(Z<\frac{20}{\sigma}\right)=1-P\left(Z>\frac{20}{\sigma}\right) \Rightarrow P\left(Z<\frac{20}{\sigma}\right)=1-0,0228=0,9772 \Rightarrow \frac{20}{\sigma}=2 \Rightarrow \sigma=10.$$

Esto es, la desviación típica vale 10.

b) La distribución es $N(40, 10)$. Luego,

$$P(X<35)=P\left(Z<\frac{35-40}{10}\right)=P(Z<-0,5)=1-P(Z<0,5)=1-0,6915=0,3085.$$

El 30,85 % de os habitantes de esa ciudad tendrá menos de 35 años.

18. Según datos de la Compañía Metropolitana de una ciudad, el tiempo de espera de los usuarios del metro de esa ciudad sigue una distribución de media 7,5 minutos con 2 minutos de desviación típica. De acuerdo con esa distribución, qué porcentaje de usuarios esperarán:

a) Más de 9 minutos. b) Entre 7 y 10 minutos.

Solución:

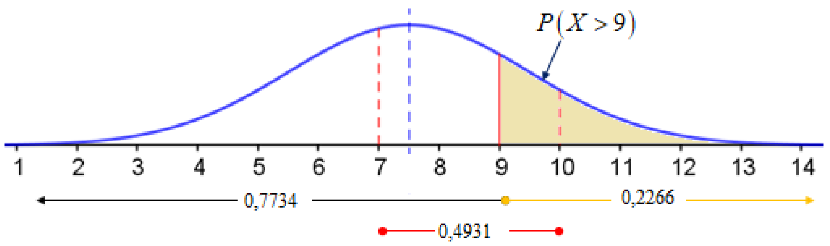
La distribución que mide el tiempo de espera es $N(7,5,\ 2)$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-7,5}{2}$.

Por tanto, aplicando la $N(0, 1)$ se obtiene:

a) $P(X>9)=P\left(Z>\dfrac{9-7,5}{2}\right)=P(Z>0,75)=1-P(Z<0,75)$ = 1 – 0,7734 = 0,2266.

El 22,66 % de los usuarios esperará más de 9 minutos.



b) $P(7<X<10)=P\left(Z<\dfrac{10-7,5}{2}\right)-P\left(Z<\dfrac{7-7,5}{2}\right)=P(Z<1,25)-P(Z<-0,25)$ =

= $P(Z<1,25)-(1-P(Z<0,25))$ = 0,8944 – (1 – 0,5987) = 0,4931.

El 49,31 % de los usuarios esperará entre 7 y 10 minutos.

19. Se sabe que el cociente intelectual de la población de un país sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20, $N(100, 20)$.

a) ¿Qué porcentaje de esa población tendrá un cociente intelectual entre 95 y 105?

b) Si se considera que una persona es superdotada cuando su cociente intelectual es mayor que 160, ¿qué porcentaje de superdotados hay en esa población?

Solución:

Se trata de una distribución normal $N(100, 20)$.

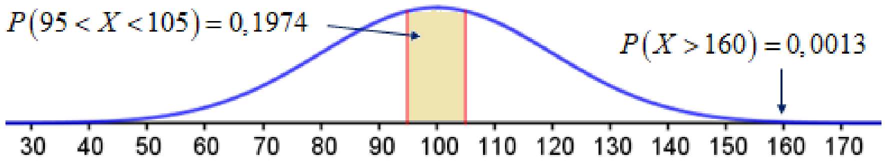
Se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}=\dfrac{X-100}{20}$.

a) $P(95<X<105)=P\left(\dfrac{95-100}{20}<Z<\dfrac{105-100}{20}\right)$ =

= $P(-0,25<Z<0,25)=P(Z<0,25)-P(Z<-0,25)$ =

= $P(Z<0,25)-(1-P(Z<0,25))$ = 0,5987 – (1 – 0,5987) = 0,1974.

El 19,74 % de esa población tiene un cociente intelectual entre 95 y 105.



b) La probabilidad de que una persona no sea superdotado (no tenga un cociente intelectual superior al 160) es:

$$P(X < 160) = P\left(Z < \frac{160-100}{20}\right) = P(Z < 3) = 0,9987.$$

Por tanto, la probabilidad de que sea superdotado, $P(X > 160) = 1 - 0,9987 = 0,0013$.

Luego, el porcentaje de superdotados es 0,13 %.

20. Si X es variable $N(\mu, \sigma)$ y se tiene que $P(X < 4) = 0,2549$ y $P(X < 7) = 0,9082$, halla los valores de μ y σ.

<u>Solución</u>:

Tipificando se tiene:

$$P\left(Z < \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = 0,2546 \Rightarrow \frac{4-\mu}{\sigma} = -0,66$$ → (Se corresponde con un valor de Z negativo).

En la tabla se busca 1 – 0,2546 = 0,7454. El valor de Z correspondiente es 0,66.

$$P\left(Z < \frac{7-\mu}{\sigma}\right) = 0,9082 \Rightarrow \frac{7-\mu}{\sigma} = 1,33.$$

Se obtiene el sistema: $\begin{cases} \mu - 0,66\sigma = 4 \\ \mu + 1,33\sigma = 7 \end{cases}$. Su solución es: $\mu = 5$ y $\sigma = 3/2$.

21. Se supone que la estatura de una población sigue una distribución normal, $N(\mu, \sigma)$. Sabiendo que el 1 % de los individuos de esa población supera los 185 cm de estatura, mientras que el 3 % no llega a los 160 cm, calcula la media y la desviación típica de esa distribución.

<u>Solución</u>:

Se trata de una población $N(\mu, \sigma)$; de momento con ambos parámetros desconocidos.

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$.

Se sabe que

$$P(X > 181) = 0,01 \text{ y } P(X < 160) = 0,03.$$

Esto significa que

$$P(X > 181) = P\left(Z > \frac{181-\mu}{\sigma}\right) = 0,01 \Rightarrow \frac{181-\mu}{\sigma} = 2,33 \Rightarrow \mu + 2,33\sigma = 181.$$

$$P(X < 160) = P\left(Z < \frac{160-\mu}{\sigma}\right) = 0,03 \Rightarrow \frac{160-\mu}{\sigma} = -1,88 \Rightarrow \mu - 1,88\sigma = 160.$$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} \mu + 2,33\sigma = 181 \\ \mu - 1,88\sigma = 160 \end{cases} \Rightarrow \mu = 169,37; \sigma = 4,99.$

22. Mediante la aproximación normal de la binomial $B(50, 0,12)$ calcula:

a) $P(X = 6)$. b) $P(X = 12)$. c) $P(6 < X \le 12)$.

(Optativo) Halla esas mismas probabilidades utilizando Excel.

<u>Solución</u>:

Como $np = 50 \cdot 0,12 = 6$ y $nq = 50 \cdot 0,88 = 44$: $np > 5$; $nq > 5 \Rightarrow$ La binomial $B(50, 0,12)$ se puede

aproximar por la normal de media y desviación típica:
$\mu = 50 \cdot 0{,}12 = 6$ y $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}88} \approx 2{,}3 \to X' = N(6,\ 2{,}3)$.
Con esto:
a) $P(X=6) = P(5{,}5 < X' < 6{,}5) = P\left(\frac{5{,}5-6}{2{,}3} < Z < \frac{6{,}5-6}{2{,}3}\right) \approx P(-0{,}22 < Z < 0{,}22) =$
$= P(Z < 0{,}22) - P(Z < -0{,}22) = 0{,}5871 - (1 - 0{,}5871) = 0{,}1742$.

b) $P(X=12) = P(11{,}5 < X' < 12{,}5) = P\left(\frac{11{,}5-6}{2{,}3} < Z < \frac{12{,}5-6}{2{,}3}\right) = P(2{,}39 < Z < 2{,}83) =$
$= P(Z < 2{,}83) - P(Z < 2{,}39) = 0{,}9977 - 0{,}9916 = 0{,}0061$.

c) $P(6 < X \le 12) = P(6{,}5 < X' < 12{,}5) = P\left(\frac{6{,}5-6}{2{,}3} < Z < \frac{12{,}5-6}{2{,}3}\right) \approx P(0{,}22 < Z < 2{,}83) =$
$= 0{,}9916 - 0{,}5871 = 0{,}4045$.

<u>Utilizando Excel</u>.
a) Para $P(X=6)$: Teclear =DISTR.BINOM(6;50;0,12;FALSO), se obtiene 0,17118594.
b) Para $P(X=12)$: Teclear =DISTR.BINOM(12;50;0,12;FALSO), se obtiene 0,0084088.
c) Para $P(6 < X \le 12)$ hay que hacer la suma
$P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) + P(X=11) + P(X=12) = 0{,}38836294$.
<u>Nota</u>: Los valores obtenidos con Excel son más fiables.

23. En una determinada ciudad, el 20 % de sus habitantes tiene los ojos azules. Si se eligen 40 personas al azar, calcula la probabilidad de que:
a) Exactamente 6 de ellos tengan los ojos azules.
b) Más de 10 tengan los ojos azules.
<u>Solución</u>:
Se trata de un experimento de carácter binomial, $B(40,\ 0{,}2)$, donde:
$n = 40$, es el número personas elegidas; $p = 0{,}20$ es la probabilidad de tener los ojos azules;
$q = 1 - p = 0{,}80$, la probabilidad de no tener los ojos azules.
Como $np = 40 \cdot 0{,}20 = 8$ y $nq = 40 \cdot 0{,}80 = 32$: $np > 5$; $nq > 5 \Rightarrow$ la variable X, $B(40,\ 0{,}20)$, puede aproximarse mediante la normal X', $N\left(40 \cdot 0{,}2,\ \sqrt{40 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}\right) \approx N(8,\ 2{,}53)$. A su vez, esta normal se tipifica haciendo el cambio $Z = \frac{X' - 8}{2{,}53}$.
Con esto:
a) $P(X=6) \approx P(5{,}5 < X' < 6{,}5) \to$ debe hacerse la corrección de continuidad.
Luego:
$P(X=6) \approx P(5{,}5 < X' < 6{,}5) = P\left(\frac{5{,}5-8}{2{,}53} < Z < \frac{6{,}5-8}{2{,}53}\right) \approx P(-0{,}988 < Z < -0{,}593) =$
$= P(0{,}593 < Z < 0{,}988) \approx P(Z < 0{,}99) - P(Z < 0{,}59) = 0{,}8389 - 0{,}7224 = 0{,}1165$.

Con Excel: =DISTR.BINOM(6;40;0,20;FALSO) $\to$ 0,12456255.

b) $P(X > 10) \approx P(X' > 10,5) = P\left(Z > \dfrac{10,5-8}{2,53}\right) \approx P(Z > 0,988) = 1 - P(Z < 0,988) =$

$= 1 - 0,8389 = 0,1611.$

24. Supongamos que el 80 % de los estudiantes de bachillerato posee ordenador personal.
a) Si se eligen al azar 100 estudiantes de bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que más de 75 tengan ordenador?
b) Si se eligen al azar 225 estudiantes de bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que tengan ordenador entre 170 y 190 estudiantes, ambos valores incluidos?
Solución:
La variable X que mide el número de estudiantes con ordenador se distribuye como una binomial $B(100, 0,80)$.
$\to$ n = 100 es el número de ensayos; p = 0,80 es la probabilidad de que estudiante tenga ordenador (éxito); siendo $q = 1 - p = 0,20$, la probabilidad de no tenga ordenador.
Como la binomial $B(n, p)$ tiene media $\mu = np$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq}$, puede aproximarse mediante la normal $N\left(np, \sqrt{npq}\right)$. Esta aproximación puede realizarse cuando n es grande y tanto np como nq son mayores que 5.

En este caso, $np = 100 \cdot 0,80 = 80$ y $nq = 100 \cdot 0,20 = 20 \Rightarrow$ la aproximación puede hacerse.
Por tanto, como $\mu = 100 \cdot 0,80 = 80$ y $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0,80 \cdot 0,20} = 4$, la $B(100, 0,80)$ se aproxima por la $N(80, 4)$, que, a su vez, se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-80}{4}$.
Con esto:

a) $P(X > 75) = P(X' > 75,5) = P\left(Z > \dfrac{75,5-80}{4}\right) = P(Z > -1,125) = P(Z < 1,125) =$

$= \dfrac{0,8686 + 0,8708}{2} = 0,8697.$

(Se ha hecho la corrección de continuidad y el valor de probabilidad asignado es el intermedio entre $Z = 1,12$ y $Z = 1,13$).

b) Si se toman 225 pacientes, la binomial $B(225, 0,8)$ se aproxima por la normal $N\left(225 \cdot 0,8,\ \sqrt{225 \cdot 0,8 \cdot 0,2}\right) = N(180,\ 6)$.
La probabilidad de que tengan ordenador entre 170 y 190 estudiantes, ambos valores incluidos, será:

$$P(170 \le X \le 190) = P(169,5 < X' < 190,5) = P\left(Z < \frac{190,5-180}{6}\right) - P\left(Z < \frac{169,5-180}{6}\right) =$$

$$= P(Z < 1,75) - P(Z < -1,75) = 0,9599 - (1 - 0,9599) = 0,9198.$$

25. En una ciudad, el 45 % de los mayores de 60 años dice estar “bastante bien de salud”. Si en esa ciudad se eligen al azar 100 personas mayores de 60 años:
a) Indica cómo podría calcularse la probabilidad de que, entre esas 100 personas, “exactamente r estén bastante bien de salud”.
b) Con ayuda de calculadora o de ordenador, halla la probabilidad de entre esas 100 personas, “exactamente 40 estén bastante bien de salud”.
c) Calcula dicha probabilidad aproximándola mediante una distribución normal.
Solución:

a) La variable X que mide el número de los mayores de 60 años dice estar "bastante bien de salud". puede estudiarse como una binomial $B(100,\ 0{,}45)$.
→ n = 100, es el número personas elegidas; p = 0,45 es la probabilidad de estar "bastante bien de salud"; $q = 1 - p = 0{,}55$, la probabilidad de que tenga algún tipo de enfermedad.
Como $np = 100 \cdot 0{,}45 = 45$ y $nq = 100 \cdot 0{,}55 = 55$: $np > 5$; $nq > 5 \Rightarrow$ la aproximación puede hacerse con ayuda de la normal de media $\mu = 100 \cdot 0{,}45 = 45$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}55} = 4{,}975 \to N(45,\ 4{,}975)$.

b) Mediante la binomial $B(100,\ 0{,}45)$:

$$P(X=40) = \binom{100}{40} \cdot 0{,}45^{40} \cdot 0{,}55^{60} = \frac{100!}{40!(100-40)!} \cdot 0{,}45^{40} \cdot 0{,}55^{60} \approx 0{,}0488.$$

Con Excel: teclear =DISTR.BINOM(40;100;0,45;FALSO) → 0,0488. Ambos resultados son idénticos. La ventaja del ordenador es que no hay que recordar la fórmula; aunque es imprescindible saber qué se está haciendo y saber interpretar el resultado.

c) La variable X: $B(100,\ 0{,}45)$ puede estudiarse mediante la normal $X´$: $N(45,\ 4{,}975)$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X´ - 45}{4{,}975}$.

Con esto, y haciendo la corrección de continuidad:

$$P(X=40) = P(39{,}5 < X´ < 40{,}5) = P\left(\frac{39{,}5-45}{4{,}975} < Z < \frac{40{,}5-45}{4{,}975}\right) =$$

$$= P(-1{,}12 < Z < -0{,}91) = P(Z < -0{,}91) - P(Z < -1{,}12) =$$

$$= 1 - P(Z < 0{,}91) - (1 - P(Z < 1{,}12)) = 1 - 0{,}8186 - (1 - 0{,}8686) = 0{,}05.$$

26. El 42 % de los habitantes de un pueblo pasa cada día por la calle mayor. Elegidos 60 habitantes al azar, ¿qué probabilidad hay de que más de 30 de ellos pasen ese día por la calle mayor?
<u>Solución</u>:
La variable X que computa el número de habitantes que pasa por la calle mayor es una variable $B(60,\ 0{,}42)$, que se aproxima por la normal $X´$: $N(60 \cdot 0{,}42,\ \sqrt{60 \cdot 0{,}42 \cdot 0{,}58}) = N(25{,}2,\ 3{,}82)$.
Haciendo la corrección de continuidad y tipificando, se tiene:

$$P(X > 30) = P(X´ > 30{,}5) = P\left(Z > \frac{30{,}5 - 25{,}2}{3{,}82}\right) = P(Z > 1{,}39) = 1 - P(Z < 1{,}39) =$$

$$= 1 - 0{,}9177 = 0{,}0823.$$

27. Un examen de respuesta múltiple consta de 80 preguntas, cada una con 4 opciones, una de ellas correcta y erróneas las otras tres. Si un estudiante contesta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que acierte 25 o más preguntas? ¿Y menos de 10?
<u>Solución</u>:
El experimento es de tipo binomial, con $P(\text{éxito}) = p = 0{,}25$ y $q = 0{,}75$. Para $n = 80$, será $B(80,\ 0{,}25)$.
La binomial $B(80,\ 0{,}25)$ puede aproximare mediante la normal de media $\mu = 80 \cdot 0{,}25 = 20$ y $\sigma = \sqrt{80 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = \sqrt{15} = 3{,}87 \to N(20,\ 3{,}87)$.
Con esto, haciendo la corrección de continuidad y tipificando:

$$P(X \geq 25) = P(X´ > 24{,}5) = P\left(Z > \frac{24{,}5 - 20}{3{,}87}\right) = P(Z > 1{,}16) = 1 - P(Z < 1{,}16) =$$

$$= 1 - 0{,}8770 = 0{,}1230.$$

$$P(X<10)=P(X'<9,5)=P\left(Z<\frac{9,5-20}{3,87}\right)=P(Z<-2,71)=1-P(Z<2,71)=$$
= 1 – 0,9966 = 0,0034.

28. A lo largo del mes de noviembre, la probabilidad de que un día llueva en una ciudad del norte de España es 0,4.
a) ¿Cómo puede describirse y estudiarse el modelo de probabilidad que proporciona los días de lluvia durante ese mes?
b) Halla la probabilidad de que durante ese mes llueva exactamente 8 días.
c)) Halla la probabilidad de que durante ese mes llueva entre 10 y 20 días.
Solución:
a) Es un experimento binomial $B(n, p)$, con $n = 30$, $p = 0,40$ (la probabilidad de que llueva un día de noviembre) y $q = 0,60$ (probabilidad de que no llueva). Esto es, una binomial $B(30, 0,4)$.
Como n es relativamente grande, $np = 30 \cdot 0,4 = 12 > 5$ y $nq = 30 \cdot 0,6 = 18 > 5$, esta binomial puede aproximarse mediante la normal de media $\mu = np$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq}$; que a su vez se tipifica haciendo el cambio $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$.
Esto es: $B(30,\ 0,4) \sim N\left(30\cdot 04,\ \sqrt{30\cdot 0,4\cdot 0,6}\right) \approx N(12,\ 2,6833) \to Z=\frac{X-12}{2,6833}$.

b) Utilizando la binomial:
$$= P(X=8)=\binom{30}{8}\cdot 0,4^8\cdot 0,6^{22} = \frac{30!}{8!\cdot(30-8)!}\cdot 0,4^8\cdot 0,6^{22} = 0.05048709682.$$

$\to$ Aproximando con la normal, haciendo la corrección de continuidad:
$$P(X=8)=P(7,5<X'<8,5)=P\left(\frac{7,5-12}{2,6833}<Z<\frac{8,5-12}{2,6833}\right) = P(-1,68<Z<-1,30) =$$
$$= P(Z<1,68)-P(Z<1,30) = 0,9535 – 0,9032 = 0,0503.$$
Puede observarse que los resultados son aproximados.

c) $P(10\le X\le 20)=P(9,5<X'<20,5)=P\left(\frac{9,5-12}{2,6833}<Z<\frac{20,5-12}{2,6833}\right)=$
$$= P(-0,93<Z<3,17)=P(Z<3,17)-P(Z<-0,93)=P(Z<3,17)-\big(1-P(Z<0,93)\big) =$$
= 0,9992 – (1 – 0,8238) = 0,8230.