PROBABILIDAD Y DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Muchos descubrimientos han sido fruto del azar (algunos casos).
Pero los han descubierto hombres y mujeres trabajando, investigando, observando…

1. Cuestiones básicas: espacio muestral, sucesos…

Experimentos aleatorios
Un experimento se llama aleatorio cuando no se puede predecir su resultado; además, si se repitiese el mismo experimento en condiciones análogas, los resultados pueden diferir.
Los experimentos pueden ser simples o compuestos.

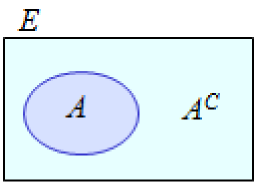
Ejemplos:
a) Lanzar un dado con las caras numeradas y apuntar el número que se sale es un experimento simple.

b) Lanzar dos monedas a la vez y contar el número de caras que se obtienen es un experimento compuesto. Lanzar la misma moneda dos veces consecutivas es el mismo experimento.

c) También es compuesto el experimento que consiste en apuntar el color de dos bolas extraídas de una bolsa en la que hay 5 bolas de color verde y 3 de color rojo, todas de igual peso y tamaño.

Espacio muestral
Es el conjunto de sucesos elementales a que da lugar la realización de un experimento aleatorio; suele designarse por la letra *E*.

Un suceso es todo subconjunto de *E*. Si está determinado por un solo resultado se llama elemental; si está formado por varios se llama compuesto. Los sucesos suelen denotarse por letras mayúsculas.
Suceso seguro: es el que ocurre siempre**.** Suele denotarse por *E*, como el espacio muestral.
Suceso imposible, denotado por ∅: no ocurre nunca.
Suceso contrario de *A*, que se denota por A^C o $\bar{A}$, es el suceso que se verifica cuando no se cumple *A*. Está formado por los sucesos elementales que no son de *A*; es el subconjunto complementario de *A*, respecto a *E*. Por tanto, si ocurre A^C no ocurre *A*, y viceversa.
Los diagramas de Venn, como el de la derecha, permiten representar los distintos tipos de sucesos.



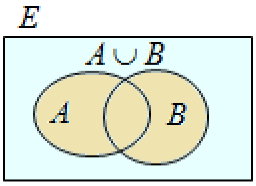
Ejemplos:
a) Los sucesos elementales asociados al lanzamiento de un dado corriente, con las caras numeradas, son {1}, {2}, {3}, {4}, {5} y {6}. Así pues, *E* = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
Un suceso compuesto puede ser "obtener un número par": *P* = {2, 4, 6}. El suceso *P* se cumple cuando el resultado del lanzamiento del dado es 2, 4 o 6.
El suceso contario de "obtener un número par" es "obtener número impar".

b) El espacio muestral asociado al lanzamiento de dos monedas es *E* = {*CC*, *CX*, *XC*, *XX*}.
El suceso obtener una cara (*C*) y una cruz (*X*) es compuesto: {*CX*, *XC*}. Su contrario es obtener dos caras o dos cruces (obtener el mismo resultado), suceso {*CC*, *XX*}.

c) Al extraer una carta de una baraja española, el espacio muestral está formado por 40 sucesos, uno por cada una de las cartas de la baraja: 10 de cada *palo* (oros, copas, espadas y bastos).

Operaciones con sucesos

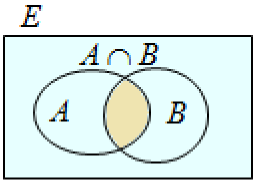
Los sucesos pueden operarse obteniéndose otros nuevos.



- Unión de A y B, $A \cup B$, es un suceso que se verifica cuando lo hace A o B, o ambos.

En notación conjuntista:

$$A \cup B = \{x \in E \,|\, x \in A \text{ o } x \in B\}$$



- Intersección de A y B, $A \cap B$, es el suceso que se verifica cuando lo hacen A y B a la vez. Está formado por los elementos comunes a A y B.

En notación conjuntista:

$$A \cap B = \{x \in E \,|\, x \in A \text{ y } x \in B\}$$

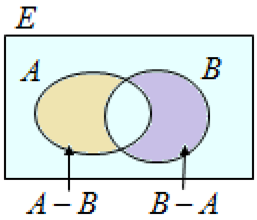
Cuando $A \cap B = \varnothing$, los sucesos A y B se dicen incompatibles.

→ Las operaciones unión e intersección son conmutativas: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

- Diferencia de A y B, $A - B$, es el suceso que se verifica cuando lo hace A pero no B. Está formado por los elementos de A que no son de B.

En notación conjuntista:

$$A - B = \{x \in E \,|\, x \in A \text{ y } x \notin B\}$$



Análogamente, $B - A = \{x \in E \,|\, x \in B \text{ y } x \notin A\}$.

→ Observando las figuras se comprueba que:

$$A - B = A - (A \cap B) = \overline{B} \cap A \text{ y } B - A = B - (A \cap B) = \overline{A} \cap B$$

Ejemplos:

En el experimento aleatorio consistente en extraer una carta de una baraja española se consideran los sucesos B = "obtener una carta de bastos" y F = "obtener una figura", se tiene:

→ suceso B: está formado por las 10 cartas de bastos,

$B = \{1_B, 2_B, 3_B, 4_B, 5_B, 6_B, 7_B, S_B, C_B, R_B\}$,

donde S_B, C_B y R_B denotan las figuras sota, caballo y rey de bastos, respectivamente; el subíndice B indica bastos.

→ suceso F: está formado por las 12 cartas que son figuras, 3 de cada uno de los *palos*,

$F = \{S_O, C_O, R_O, S_C, C_C, R_C, S_E, C_E, R_E, S_B, C_B, R_B\}$,

donde los subíndices O, C, E y B indican oros, copas, espadas y bastos, respectivamente.

Con esto, los sucesos unión, intersección, diferencia y complementarios de ellos son:

→ Unión:

$B \cup F = \{1_B, 2_B, 3_B, 4_B, 5_B, 6_B, 7_B, S_O, C_O, R_O, S_C, C_C, R_C, S_E, C_E, R_E, S_B, C_B, R_B\}$, 19 cartas.

→ Intersección:

$B \cap F = \{S_B, C_B, R_B\}$, 3 cartas.

→ Diferencia:

$B - F = \{1_B, 2_B, 3_B, 4_B, 5_B, 6_B, 7_B\}$, son las cartas de bastos que no son figuras;

$F - B = \{S_O, C_O, R_O, S_C, C_C, R_C, S_E, C_E, R_E\}$, son las figuras que no son de bastos.

→ Complementarios:

$B^C = \overline{B}$: son las 30 las cartas que no son de bastos.

$F^C = \overline{F}$: son las 28 las cartas que no son figuras.

2. Probabilidad: definiciones y propiedades

La probabilidad es una medida de la posibilidad de que se cumpla un suceso aleatorio determinado.
La probabilidad de un suceso es un número, comprendido entre 0 y 1.

- Si un experimento aleatorio se repite un gran número de veces, la probabilidad de un determinado suceso se identifica con la frecuencia relativa de tal suceso. (Ver ley de los grandes números).

$\rightarrow$ La frecuencia relativa de un suceso es el cociente entre el número de veces que se ha cumplido el suceso y el número total de veces que se ha realizado el experimento.

Ejemplo:
a) Si se pregunta a 400 personas, elegidas al azar, sobre su interés por el fútbol y, de ellas, 125 afirman ser aficionadas, se admite que la probabilidad de que una persona de ese grupo sea aficionada al fútbol es de $\frac{125}{400}=0,3121$.

b) Si una moneda se lanza 1500 veces y en 720 ocasiones ha salido cara, se admitirá que la probabilidad de obtener cara para esa moneda es $P(C)=\frac{720}{1500}=0,48 \rightarrow$ (sospecharemos que esa moneda está trucada).

Regla de Laplace
Cuando los sucesos elementales del experimento aleatorio son equiprobables, la probabilidad del suceso *A* se calcula aplicando la regla de Laplace, que dice:

$$P(A)=\frac{\text{Número de casos favorables a } A}{\text{Número total de casos posibles}}$$

Ejemplos:
a) Si en una bolsa hay 5 bolas de color verde (*V*) y 3 de color rojo (*R*), todas de igual peso y tamaño, la probabilidad de extraer al azar una bola verde o una bola roja es:

$$P(V)=\frac{5}{8};\ P(R)=\frac{3}{8}.$$

b) En el experimento de extraer una carta de una baraja española, se tienen las siguientes probabilidades:

$\rightarrow$ De obtener una carta de bastos: $P(B)=\frac{10}{40}=0,25$.

$\rightarrow$ De obtener una figura: $P(F)=\frac{12}{40}=0,3$.

$\rightarrow$ De obtener una carta que sea de bastos o figura: $P\left(B\cup F\right)=\frac{19}{40}=0,475$.

$\rightarrow$ De obtener una figura de bastos: $P\left(B\cap F\right)=\frac{3}{40}=0,075$.

$\rightarrow$ De obtener una carta de bastos que no sea figura: $P\left(B-F\right)=\frac{7}{40}=0,175$.

$\rightarrow$ De obtener una figura que no sea de bastos: $P\left(F-B\right)=\frac{9}{40}=0,225$.

$\rightarrow$ De NO obtener una carta de bastos: $P\left(\overline{B}\right)=\frac{30}{40}=0,75$.

Definición axiomática de probabilidad

La probabilidad puede definirse afirmando que es una función *P* que asigna a cada suceso de un experimento aleatorio un número real, debiendo cumplir los siguientes axiomas:

1. Para cualquier suceso *A* se cumple que: $0 \le P(A) \le 1$.
2. La probabilidad del suceso seguro *E* es 1: $P(E) = 1$.
3. Si *A* y *B* son sucesos incompatibles, entonces: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

→ De estos axiomas se extraen algunas consecuencias (propiedades) de interés:

- Probabilidad del suceso contrario

Conociendo la probabilidad de un suceso *A* puede hallarse la de su contrario A^C, pues, como

$A \cup A^C = E \Rightarrow P\left(A \cup A^C\right) = P(E) = 1 \Rightarrow$ (por ser incompatibles *A* y A^C)

$P(A) + P\left(A^C\right) = 1 \Rightarrow P\left(A^C\right) = 1 - P(A)$.

Por tanto, la probabilidad del suceso imposible es 0: $P(\varnothing) = 0$. (E y $\varnothing$ son contrarios).

Ejemplo:

Al extraer una carta de una baraja española, la probabilidad de los sucesos contrarios de *B* y *F* es:

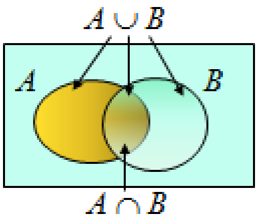
→ Contrario de obtener bastos (no obtener bastos): $P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - \frac{10}{40} = \frac{30}{40} = 0,75$.

→ Contrario de obtener figura: $P\left(\overline{F}\right) = 1 - P(F) = 1 - \frac{12}{40} = \frac{28}{40} = 0,7$.

- Probabilidad de la unión de sucesos

Para dos sucesos *A* y *B* cualesquiera se cumple:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

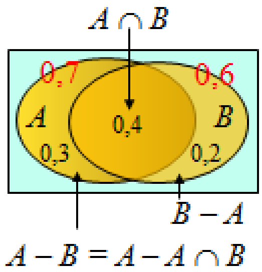


Se resta $P(A \cap B)$ para evitar contar dos veces el suceso $A \cap B$, que se da tanto en *A* como en *B*.

→ Si los sucesos son incompatibles: $P(A \cap B) = 0$.

Ejemplos:

a) Si se sabe que las probabilidades de los sucesos *A*, *B* y $A \cap B$ son, respectivamente, $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,6$, $P(A \cap B) = 0,4$, entonces:



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7 + 0,6 - 0,4 = 0,9$.

→ Para la diferencia de sucesos:

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,7 - 0,4 = 0,3$.

$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0,6 - 0,4 = 0,2$.

b) Observa que, en el experimento de extraer una carta de una baraja española, se cumple que:

$P(B \cup F) = P(B) + P(F) - P(B \cap F)$.

En efecto:

$P(B \cup F) = \frac{10}{40} + \frac{12}{40} - \frac{3}{40} = \frac{19}{40}$.

→ Para la misma baraja, la probabilidad de al extraer una carta sea "un as o una copa", es:

$P(as\ o\ copa) = P(as \cup copa) = P(as) + P(copa) - P(as\ de\ copas) = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$.

3. Técnicas de recuento (I)

La asignación de la probabilidad de un suceso, mediante la regla de Laplace, exige conocer el número de casos totales que pueden darse en el experimento y el número de casos favorables a dicho suceso. Hay determinadas técnicas de recuento que facilitan ese cálculo. Aquí se verán algunas.

Principio multiplicativo
Es el método básico de recuento. Se enuncia como sigue: "Si un suceso puede darse de *m* maneras distintas en primera opción y a continuación puede suceder de *n* modos diferentes, entonces tiene $m \times n$ maneras de suceder".
Por tanto, para contar el número de casos hay que determinar cuántas elecciones hay que hacer y cuántas opciones hay en cada elección sucesiva.

Ejemplos:
a) Si una persona tiene 5 camisas y 4 pantalones, puede vestirse de $5 \times 4 = 20$ formas diferentes.

b) Con los dígitos del 0 al 9 se pueden formar, por ejemplo, números de cuatro cifras, repetidas o no. El número 0005 se considera de 4 cifras; igualmente 0126; y naturalmente, 7603 o 5555.
$\to$ Si no puede repetirse ningún dígito, en la primera elección hay 10 opciones (los 10 dígitos); en la segunda, 9 opciones (elegido un dígito, el siguiente puede ser cualquiera de los 9 restantes); en la tercera, 8; y en la cuarta 7. En total, los números de 4 cifras no repetidas son $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \underline{5040}$.
$\to$ Si pueden repetirse, en la primera elección hay 10 opciones (los 10 dígitos); en la segunda otros 10; y lo mismo en la tercera y cuarta elección. En total, los números de 4 cifras con dígitos repetidos o no son $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10000$.

c) Si se lanza una moneda 5 veces consecutivas y se observa la secuencia de resultados (cara, cruz), como en cada lanzamiento hay 2 opciones, el número total de secuencias posibles será $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$. (Este experimento es equivalente a lanzar 5 monedas a la vez y observar el resultado).

Ejercicio 1
Si se elige un número de cuatro cifras al azar, halla la probabilidad de que dicho número:
a) Tenga alguna cifra repetida $\to$ suceso *A*.
b) No tenga ninguna cifra de valor 0 $\to$ suceso *B*.
c) Tenga, al menos, una cifra de valor 7 $\to$ suceso *C*.
<u>Solución</u>:
a) Hay 10000 números de 4 cifras; de ellos, <u>5040</u> no tienen repetida ninguna cifra; luego, los 4960 números restante (10000 – 5040 = 4960), tendrá repetida alguna de sus cifras.

Por tanto: $P(A) = \dfrac{\text{Número de casos favorables a } A}{\text{Número total de casos}} = \dfrac{4960}{10000} = 0,4960$.

b) Si ninguna de las cifras puede ser 0, entonces, cada una de las 4 cifras debe elegirse entre los 9 dígitos restantes. En total, los casos sin la cifra 0, serán $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561$.

Luego: $P(B) = \dfrac{6561}{10000} = 0,6561$.

c) Hay los mismos casos sin la cifra 0 que sin la cifra 7, o sin cualquier cifra que se elija. Esto es, hay 6561 números en los que no aparece el 7; luego, en todos los demás números de 4 cifras sí aparece, al menos una vez, el dígito 7. Los casos favorables serán: 10000 – 6561 = 3439.

Por tanto: $P(C) = \dfrac{3439}{10000} = 0,3439$.

4. Probabilidad condicionada*

La probabilidad de un suceso *A* puede verse modificada si ha ocurrido previamente otro suceso *B*. Para medir la influencia entre esos sucesos, se define la probabilidad de *A* condicionada por *B*, designándose como $P(A/B)$.

Así, por ejemplo, para el experimento consistente en extraer dos bolas seguidas (sin reposición) de una bolsa que contiene 5 bolas verdes (*V*) y 3 rojas (*R*) se tiene:

- Las probabilidades de que la primera bola sea verde o sea roja son: $P(V)=\frac{5}{8}$; $P(R)=\frac{3}{8}$.

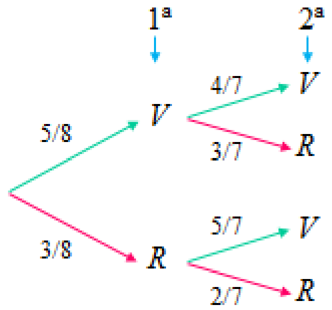
- En cambio, las probabilidades de que la segunda bola sea verde o roja no se mantienen, pues: si la primera bola ha sido verde, al ser sin reposición, en la bolsa quedan 4 bolas verdes y 3 rojas; pero, si la primera bola fue roja, en la bolsa quedarán las 5 bolas verdes y solo 2 rojas. Por tanto, las probabilidades correspondientes serán:

$\to$ 2ª verde si la 1º ha sido verde: $P\left(2^aV/1^aV\right)=\frac{4}{7}$.

$\to$ 2ª roja si la 1º ha sido verde: $P\left(2^aR/1^aV\right)=\frac{3}{7}$.

$\to$ 2ª verde si la 1º ha sido roja: $P\left(2^aV/1^aR\right)=\frac{5}{7}$.

$\to$ 2ª roja si la 1º ha sido roja: $P\left(2^aR/1^aR\right)=\frac{2}{7}$.



La confección de un diagrama de árbol facilita el cálculo de estas probabilidades.

- En general, la probabilidad condicionada de un suceso *A* por otro *B* se obtiene aplicando la fórmula: $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

De manera análoga, la probabilidad de *B* condicionada por *A*, es $P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

De estas dos expresiones se deduce que: $\begin{cases}P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)\\P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B)\end{cases}$.

Así, en el ejemplo anterior (extracción de dos bolas), se cumple:

$$P\left(1^aV\cap 2^aR\right)=P\left(1^aV\right)\cdot P\left(2^aR/1^aV\right)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{15}{56};$$

$$P\left(1^aR\cap 2^aV\right)=P\left(1^aR\right)\cdot P\left(2^aV/1^aR\right)=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{15}{56}.$$

$\to$ Por tanto, la probabilidad de que las bolas extraídas sean del mismo color, ambas verdes (*VV*) o rojas (*RR*), o de distinto color (*VR* o *RV*) serán:

$$P(VV)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{20}{56};\ P(RR)=\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{6}{56};\ P(VR,RV)=P(VR)+P(RV)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{30}{56}.$$

---

* Es estudio de experimentos compuestos y de la probabilidad condicionada se completará el próximo curso; por tanto, este apartado puede considerarse optativo. Aquí, con vistas al estudio de la distribución binomial, lo que se necesita es distinguir entre sucesos dependientes e independientes.
Cuando se realizan extracciones sin reemplazamiento (sin devolución) las probabilidades varían; un suceso condiciona al siguiente, como se ha puesto de manifiesto en el ejemplo anterior.
En los experimentos con reemplazamiento (con reposición; con devolución) la probabilidad de cada suceso se mantiene fija: el segundo experimento es idéntico al primero.

Sucesos dependientes e independientes

- Dos sucesos *A* y *B* son dependientes cuando la realización de uno de ellos condiciona la probabilidad del otro.

Dos sucesos *A* y *B* son independientes cuando la probabilidad de que suceda *A* no se ve afectada porque haya sucedido o no *B*. Por tanto, $P(A/B)=P(A)$; igualmente, $P(B/A)=P(B)$.

En consecuencia, cuando dos sucesos son independientes se cumple que:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

Ejemplos:

a) Cuando se tiran dos monedas a la vez (o la misma moneda dos veces consecutivas) los sucesos son: *CC*, *CX*, *XC* y *XX*, donde *C* y *X* significan cara y cruz, respectivamente.

Los sucesos cara o cruz son independientes en cada moneda o tirada. Por tanto, se tendrán las siguientes probabilidades:

$$P(CC)=P(1^a C)\cdot P(2^a C/1^a C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4};$$

$$P(XC)=P(1^a X)\cdot P(2^a \text{C}/1^a X)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4};\ P(CX)=\frac{1}{4} \text{ y } P(XX)=\frac{1}{4}.$$

Puede deducirse que la probabilidad de que salga una cara y una cruz, sin considerar el orden será:

$$P(C \text{ y } X)=P(CX)+P(XC)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

b) De la misma naturaleza es el experimento consistente en lanzar sucesivamente un dada con las caras numeradas del 1 al 6. El resultado de la primera tirada no condiciona el resultado de la segunda, de la tercera... La probabilidad de cada suceso elemental es 1/6 en cada tirada.

c) Si las probabilidades de los sucesos *A*, *B* y $A\cap B$ son, respectivamente, *P*(*A*) = 0,7, *P*(*B*) = 0,6, $P(A\cap B)=0,4$, entonces:

1) $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0,4}{0,6}=\dfrac{2}{3}\neq P(A)$. 2) $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0,4}{0,7}=\dfrac{4}{7}\neq P(B)$.

3) Evidentemente, los sucesos *A* y *B* no son independientes.

Serían independientes si se cumpliese que $P(A\cap B)=0,7\cdot 0,6=0,42$, que no es el caso.

d) En el supuesto de que los alumnos de 1º y 2º de Bachillerato de un IES se distribuyen, por curso y sexo, como se indica en la tabla adjunta, si se elige un alumno al azar, se tienen las siguientes probabilidades:

Curso	Chicos	Chicas	Total
1º Bach	60	65	125
2º Bach	50	55	105
Total	110	120	230

P(sea una chica) = $\frac{120}{230}$; *P*(sea un chico) = $\frac{110}{230}$;

P(sea de 1º) = $\frac{125}{230}$; *P*(sea de 2º) = $\frac{105}{230}$; *P*(sea una chica de 1º) = $\frac{65}{230}$.

Los sucesos ser chica o chico están condicionados por el curso en el que se esté.

→ Observa: *P*(sea una chica de 1º) = *P*("sea chica" ∩ "ser de 1º) =

= *P*(sea una chica) · *P*(ser de 1º/si es chica) = $\frac{120}{230}\cdot\frac{65}{120}=\frac{65}{230}$.

P(sea una chica/si es de 2º) = $\frac{55}{105}$; *P*(sea de 2º/si es chica) = $\frac{55}{120}$.

5. Distribución de probabilidad

Una distribución de probabilidad es un modelo teórico que trata de explicar el comportamiento de un fenómeno real. Actúa como una función que asigna a cada suceso de un experimento, cuantificado mediante una variable aleatoria, la probabilidad correspondiente.

Una variable aleatoria asocia a cada suceso del espacio muestral un número real.
Así, por ejemplo, en el experimento consistente en lanzar dos dados numerados del 1 al 6 y hallar la suma (X) de sus resultados, la variable X puede tomar cualquier valor entero entre 2 y 12. La probabilidad de cada valor (de la suma) puede calcularse mediante la regla de Laplace, teniendo en cuenta que los casos posibles son 36 y que los casos favorables se contabilizan en las diagonales de la tabla de sumas adjunta.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Con esto, la distribución de probabilidad de X se resume en la siguiente tabla:

X (suma)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=i)$ $2 \le i \le 12$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

- Una variable aleatoria puede ser discreta o continua.

Se llama discreta cuando solo puede tomar ciertos valores aislados (generalmente en número finito).
Es continua cuando puede tomar todos los valores de un intervalo.

Ejemplos:
a) La suma de los resultados obtenidos al lanzar dos dados es una variable aleatoria discreta.
b) El tiempo que una persona tiene que esperar hasta ser atendido por su dentista es una variable continua; puede variar entre … (nunca se sabe).

Función de probabilidad (variable discreta)
Es la que asigna a cada uno de los valores de la variable aleatoria discreta su probabilidad correspondiente.
Puede definirse como sigue:

$$f(x_i) = P(X = x_i) = p_i.$$

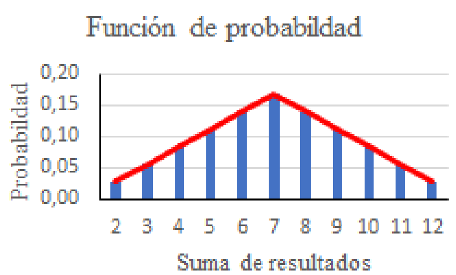
Al tratarse de una función de probabilidad debe cumplir que:

$0 \le f(x_i) \le 1$ y $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \to$ la suma de las probabilidades de todos los sucesos es igual a 1.

Si x no es alguno de los valores de la variable aleatoria, $f(x) = 0$.

Ejemplo:
Para la variable aleatoria que da la suma de los resultados de dos dados, la función de probabilidad es la representada en la figura adjunta.
Sus valores se dan en la tabla de arriba:

$$f(2) = P(X=2) = \frac{1}{36} \ \ldots, \ f(7) = P(X=7) = \frac{6}{36} \ \ldots$$



Puede verse que

$$\sum_{i=1}^{n} P(X=i) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \ldots + \frac{6}{36} + \ldots + \frac{1}{36} = \frac{36}{36} = 1.$$

$\to$ A cualquier valor que no sea del dominio se le asigna probabilidad 0: $f(1) = P(X=1) = 0$; $f(7,3) = 0$; $f(15) = 0$.

Función de distribución

A partir de la distribución de probabilidad de la variable X se define la función de distribución, $F(x)$, de dicha variable como sigue:

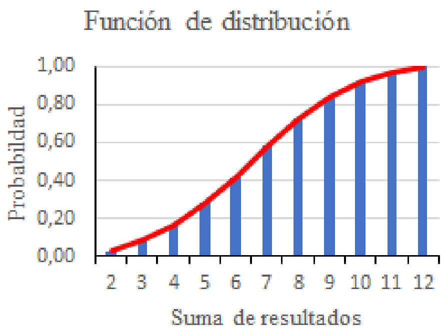
$$F(x) = P\left(X \le x\right) \to \text{La función } F(x) \text{ acumula probabilidades: } F(x) = \sum_{x_i \le x} f\left(x_i\right).$$

A cada valor x, $F(x)$ le asigna la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores menores o iguales que x.

Por tanto, si se conoce la función de distribución de una variable aleatoria, es posible determinar la probabilidad de que tome uno de sus valores, pues:

$$P\left(X = x_i\right) = F(x_i) - F(x_{i-1}).$$

Igualmente: $P\left(X > x_i\right) = 1 - P\left(X \le x_i\right) = 1 - F(x_i)$.



Ejemplos:

a) La función de distribución correspondiente a la variable aleatoria que da la suma de los resultados de dos dados es la representada en la figura adjunta.

Es acumulativa, siendo, por ejemplo:

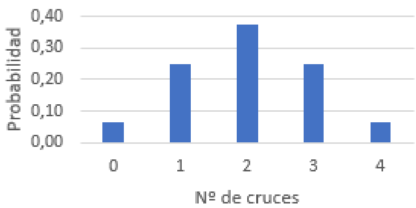
$$F(3) = P\left(X = 2\right) + P\left(X = 3\right) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36}, \ldots;\ F(12) = P\left(X \le 12\right) = 1.$$

Todos sus valores son:

X (suma: x)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Función de prob.: $f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
Función de distr.: $F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36} = 1$

b) Si se considera el experimento aleatorio consistente en lanzar 4 monedas y contar el número de cruces que se obtienen, cuyo espacio muestral es:

<u>0 cruces</u>: *CCCC* <u>1 cruz</u>: *CCCX* *CCXC* *CXCC* *XCCC*
<u>2 cruces</u>: *CCXX* *CXCX* *CXXC* *XCCX* *XCXC* *XXCC*
<u>3 cruces</u>: *CXXX* *XCXX* *XXCX* *XXXC* <u>4 cruces</u>: *XXXX*



La variable aleatoria X que da el número de cruces obtenido toma los valores: x_i = 0, 1, 2, 3, 4.

Las probabilidades de cada suceso (función de probabilidad) es:

$$f(0) = P\left(X = 0\right) = \frac{1}{16};\ f(1) = P\left(X = 1\right) = \frac{4}{16};$$

$$f(2) = P\left(X = 2\right) = \frac{6}{16};\ f(3) = P\left(X = 3\right) = \frac{4}{16};\ f(4) = P\left(X = 4\right) = \frac{1}{16}.$$

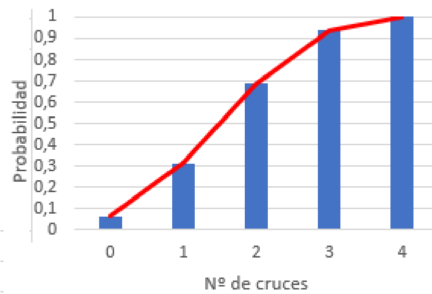
La función de distribución será:

$$F(0) = P\left(X \le 0\right) = \frac{1}{16};$$

$$F(1) = P\left(X \le 1\right) = P\left(X = 0\right) + P\left(X = 1\right) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} = \frac{5}{16};$$

$$F(2) = P\left(X \le 2\right) = \frac{11}{16};\ F(3) = P\left(X \le 3\right) = \frac{15}{16};$$

$$F(4) = P\left(X \le 4\right) = \frac{16}{16} = 1.$$



Parámetros estadísticos de una distribución de probabilidad discreta (Optativo)
Los parámetros estadísticos más usuales (media y varianza) se calculan como sigue.

- La media de una distribución es un valor central que indica la cantidad que correspondería a cada suceso en un reparto igualitario.

Si una variable aleatoria toma los valores x_1, x_2, …, x_n, con probabilidades p_1, p_2, …, p_n, la media, que suele denotarse por la letra griega μ (mu), se calcula mediante la expresión:

$$\mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \ .$$

Nota. La media μ de una variable aleatoria también se llama valor esperado o esperanza matemática de dicha variable y se suele escribir $\mu = E(X)$. El valor esperado de un juego es el baremo que se establece para determinar su equidad: si su esperanza matemática es cero, $E(X) = \mu = 0$, no existe ventaja para ninguno de los jugadores participantes. En todos los juegos organizados (loterías, apuestas, …), la esperanza matemática es negativa para el jugador: jugar no es una buena opción económica.

Ejemplos:
a) La media de la variable aleatoria que mide la suma de las puntuaciones de dos dados es:

$$\mu = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + ... + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7 \ .$$

b) La media de la distribución de probabilidad del número de cruces que se obtienen al lanzar cuatro monedas es:

X = n.º de cruces	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{32}{16} = 2 \ .$$

- La varianza es una medida de la dispersión (de la desigualdad) de los valores de la variable aleatoria respecto a la media. Se suele designar por σ^2.
- La desviación típica, σ, es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

Sus valores vienen dados por las expresiones:
Varianza:

$$\sigma^2 = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + ... + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \mu^2 \ .$$

Desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - \mu^2} \ .$$

La desviación típica se utiliza con mayor frecuencia pues, al estar expresada en las mismas unidades que la variable X, permite establecer más claramente las comparaciones.

Ejemplos:
a) La varianza de la distribución de suma de las puntuaciones de dos dados es:

$$\sigma^2 = 2^2 \cdot \frac{1}{36} + 3^2 \cdot \frac{2}{36} + 4^2 \cdot \frac{3}{36} + 5^2 \cdot \frac{4}{36} + ... + 12^2 \cdot \frac{1}{36} - 7^2 = 5{,}833 \Rightarrow \sigma = \sqrt{5{,}833} = 2{,}415 \ .$$

b) La varianza de la distribución de suma del número de cruces obtenidas al lanzar 4 monedas es:

$$\sigma^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{16} + 1^2 \cdot \frac{4}{16} + 2^2 \cdot \frac{6}{16} + 3^2 \cdot \frac{4}{16} + 4^2 \cdot \frac{1}{16} - 2^2 = 1 \ .$$

Su desviación típica es: $\sigma = \sqrt{1} = 1$.

6. Distribución binomial

Es una de las distribuciones de probabilidad más utilizadas en la práctica estadística. Se emplea cuando el fenómeno de estudio queda determinado por dos sucesos complementarios: si/no; hombre/mujer; nacional/extranjero; trabajador en activo/parado; … En general, esas dos situaciones pueden considerarse resultados de un experimento aleatorio y a los sucesos contrarios, sin que indique valoración alguna, suelen llamárseles éxito y fracaso.

Las características básicas de una distribución binomial son:

- Cada prueba del experimento aleatorio presenta dos únicas opciones, que puede designarse como éxito (E) y fracaso (F).
- Se realizan n ensayos del experimento, independientes unos de otros e idénticos.
- La probabilidad de éxito es constante a lo largo de las n pruebas: $P(E)=p$.
- La probabilidad de fracaso también es constante: $P(F)=q=1-p$.

→ La distribución binomial se indica simbólicamente por $B(n, p)$, donde n indica el número de veces que se realiza el experimento, y p es la probabilidad de éxito en cada prueba.

- La variable aleatoria X, asociada a una binomial $B(n, p)$, cuenta el número r de éxitos en las n pruebas: $r = 0, 1, \ldots, n$.

Por tanto, los valores que puede tomar X son: 0, 1, 2, ..., n. Es una variable discreta.

Ejemplos:

a) La variable aleatoria que cuenta el número de veces que sale el {5} al lanzar 6 veces un dado es una binomial de parámetros $n = 6$ y p = (probabilidad de {5}) = 1/6. Se denota por $B(6,\ 1/6)$.

b) En un examen tipo test que contiene 5 preguntas, con 3 respuestas posibles cada pregunta, de las que solo una es verdadera, si se contesta al azar, el número de aciertos puede estudiarse como una binomial $B(5, 1/3)$ → $n = 5$ es el número de preguntas; $p = 1/3$ es la probabilidad de acierto en cada pregunta.

c) Si en una determinada región, la tasa de paro entre su población activa es del 15 %, si se pregunta a 20 personas de esa población, elegidas al azar, por su situación laboral, el número de personas paradas viene descrito por la binomial de parámetros $n = 20$ y $p = 0{,}15$: $B(20,\ 0{,}15)$.

Cálculo de probabilidades binomiales

La clave para el cálculo de probabilidades binomiales está en el hecho de que cada uno de los ensayos es independiente del anterior. Por tanto, la probabilidad de una secuencia de resultados será el producto de las probabilidades de cada uno de los resultados de esa secuencia.

Esto es, si la probabilidad de éxito es p, $P(E)=p$; y la de fracaso q, $P(F)=q$; con $p + q = 1$; entonces, si X mide el número de éxitos:

→ la probabilidad de 2 éxitos en 2 ensayos (suceso EE; $X = 2$) será:

$$P(X=2)=P(EE)=P(E)\cdot P(E)=p\cdot p=p^2$$

→ la probabilidad de 1 éxito en 2 ensayos (suceso EF o FE ; $X = 1$), será:

$$P(X=1)=P(EF,FE)=P(EF)+P(FE)=p\cdot q+q\cdot p=2pq$$

→ la probabilidad de 2 fracasos en 2 ensayos (suceso FF; $X = 0$), será:

$$P(X=0)=P(FF)=P(F)\cdot P(F)=q\cdot q=q^2.$$

En este ejemplo, el suceso que exige más atención es el asociado a $X = 1$, ya que se puede dar de dos maneras distintas: EF o FE. Aquí la solución es fácil, pues solo son dos casos; pero, ¿cómo contar todas las posibilidades cuando el número de ensayos es 3, 4, …, n.?

Probabilidad de *r* éxitos

En un experimento de carácter binomial, $B(n,\ p)$, en el que se realizan *n* ensayos, con probabilidad de éxito *p* y de fracaso *q* = 1 – *p*, la función de probabilidad, que mide el número *r* de éxitos en esos *n* ensayos, viene dada por:

$$P(X=r)=\binom{n}{r}p^r\cdot q^{n-r}\,,\quad r=0,1,2,\ldots,n.$$

→ En esta fórmula $\binom{n}{r}$ designa el número combinatorio *n* sobre *r*, cuyo valor es $\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$.

- La expresión $n!$ (con $n\in\mathbf{N}$) se lee factorial de *n*; su valor es: $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots 3\cdot 2\cdot 1$.

Por convenio, factorial de cero se define como 1: 0! = 1.

Ejemplos:

a) Factoriales. Con calculadoras: $\boxed{x!}$

1! = 1; 2! = 2 · 1 = 2; 3! = 3 · 2 · 1 = 6; … $7!=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5040$; 10! = 3268800.

b) Números combinatorios. Con calculadoras: $\boxed{\text{nCr}}$.

$$\binom{10}{3}=\frac{10!}{3!\cdot(10-3)!}=\frac{10!}{3!\cdot7!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot\cancel{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}}{3\cdot2\cdot1\cdot(\cancel{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1})}=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120 \to$$ Calculadora: 10 $\boxed{\text{nCr}}$ 3 $\boxed{=}$ 120.

c) Para la binomial *B*(6, 1/6), que cuenta el número de veces que sale el {5} al lanzar 6 veces un dado, donde: *n* = 6, $p=\dfrac{1}{6}$ (probabilidad de que salga {5}) y $q=\dfrac{5}{6}$ (probabilidad de que NO salga {5}), se tiene:

$$P(\text{obtener 2 cincos entre las 6 tiradas})=P(X=2)=\binom{6}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{6\cdot5}{2}\cdot\frac{5^4}{6^6}=15\cdot\frac{625}{46656}\approx 0,2009.$$

Observa que $\binom{6}{2}=\dfrac{6!}{2!\cdot(6-2)!}=\dfrac{6\cdot5\cdot\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{2\cdot1\cdot(\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1})}=\dfrac{6\cdot5}{2}=15 \to$ Con calculadora: 6 $\boxed{\text{nCr}}$ 2 $\boxed{=}$ 15.

Análogamente:

$$P(X=3)=\binom{6}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\approx 0,0536;\qquad P(X=6)=\binom{6}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^6\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0\approx 0,00002.$$

- Para este mismo ejemplo, si se plantea la probabilidad de que: (1), no salga ningún {5}; o (2), al menos salga un {5}, se tendrá:

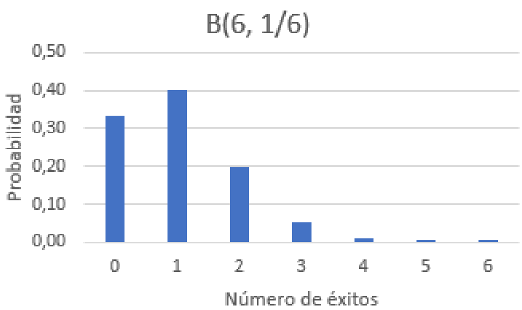
→ (1): $P(X=0)=\binom{6}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^6\approx 0,3349$.

→ (2): al menos un {5} es:

$$P(X\geq1)=P(X=1)+P(X=2)+\ldots+P(X=6).$$

Esta suma se hace más eficazmente atendiendo al suceso contrario, pues:

$$P(X\geq1)=1-P(X=0)=1-0,3349=0,6651.$$



Notas:

1. El gráfico se ha elaborado con Excel. Los valores de probabilidad para cada número *r* de éxitos se obtienen con el comando =DISTR.BINOM(*r*;6;1/6;FALSO).
2. El uso de calculadoras y ordenadores hace innecesario utilizar las antiguas Tablas Binomiales.

Ejercicio 2

Consideremos el ejemplo del examen tipo test que contiene 5 preguntas, con 3 respuestas posibles cada pregunta, y que se contesta al azar. Calcula la probabilidad de tener 0, 1, 2, 3, 4 y 5 aciertos.

Solución:

Si se contesta al azar, la probabilidad de acierto es, $P(E)=p=\frac{1}{3}$; la de fallo, $P(F)=q=1-p=\frac{2}{3}$.

Como hay que contestar a 5 preguntas, se trata de una binomial: $B(5, 1/3)$.

Con esto, si X mide el número de aciertos (de éxitos), se tendrá:

$$P(X=0)=\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5=1\cdot1\cdot\frac{32}{243}\approx 0{,}1317\,;\quad P(X=1)=\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4=5\cdot\frac{1}{3}\frac{16}{81}\approx 0{,}3292\,;$$

$$P(X=2)=\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=10\cdot\frac{1}{9}\frac{8}{27}\approx 0{,}3292;\quad P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=10\cdot\frac{1}{27}\frac{4}{9}\approx 0{,}1646\,;$$

$$P(X=4)=\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1=5\cdot\frac{1}{81}\frac{2}{3}\approx 0{,}0412;\quad P(X=5)=\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0=1\cdot\frac{1}{243}\cdot1\approx 0{,}0004\,.$$

→ En este caso, como es sencillo de estudiar, pueden detallarse algunos de los resultados.
Para simplificar, acordemos que la pregunta acertada (éxito) se denota mediante **1**; y la fallada, con **0**.
Así, por ejemplo, la secuencia **11001** indica que se han acertado las preguntas 1ª, 2ª y 5ª; y que se han fallado la 3ª y 4ª. Este es uno de los casos asociado al suceso tener 3 éxitos, $X = 3$; pero hay más.
En efecto, 3 aciertos ($X = 3$), se dan en los siguientes casos:

11100; 11010; 11001; 10110; 10101, 10011; 01110; 01101; 01011; 00111 → 10 casos en total.

La probabilidad de cada caso, por ejemplo 11010, es $P(11010)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

Para el total de los 10 casos se tendrá: $P(X=3)=10\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=10\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\approx 0{,}1646$.

Igualmente:

→ 0 aciertos ($X = 0$): 00000.

Solo hay 1 caso en el que se fallan las 5 preguntas: fallando cada una de ellas.

La probabilidad asociada es: $P(X=0)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^5$.

→ 1 acierto ($X = 1$): 10000; 01000; 00100; 00010; 00001 → Hay 5 casos en total.

(La secuencia 00010 indica que la pegunta acertada es la 4ª; las demás se fallan; análogo para el resto).

La probabilidad de cada uno de esos casos, por ejemplo 10000, es $P(10000)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4$.

Para el total de los 5 casos se tendrá: $P(X=1)=5\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=5\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4\approx 0{,}3292$.

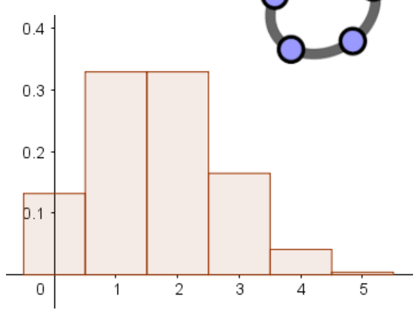
Nota:

Utilizando **GeoGebra**, tecleando DistribuciónBinomial(5, 1/3), aparece el gráfico adjunto. (Se ha cambiado la escala de los ejes, EjeX : EjeY → 10 a 1).

Los valores de probabilidad pueden calcularse uno a uno, indicando el número r de éxitos.

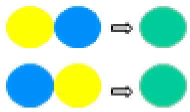
El comando para $r = 2$ es:

DistribuciónBinomial(5, 1/3, 2, false) → 0,1646.



7. Técnicas de recuento (II): combinatoria

El principio multiplicativo puede concretarse (y ampliarse) cuando se distinguen las sucesivas formas de agrupamiento.
La idea básica de la combinatoria es que en cada experimento hay que conocer cuántos elementos intervienen inicialmente, cuántas elecciones se van a realizar, conocer si la distinta disposición de los elementos cambia el resultado o no, y saber si los elementos pueden repetirse o no.
(Así, en las agrupaciones de números el orden es determinante: 37 es distinto del 73; pero si se mezclan dos colores en la misma proporción, la mezcla amarillo–azul es idéntica a la azul–amarillo).



Los nombres de las distintas agrupaciones son: variaciones, permutaciones y combinaciones.

Variaciones ordinarias
Variaciones de m elementos tomados n a n. Se dispone de m elementos y se eligen n de ellos para formar un grupo, sin repetir ninguno: $n \le m$.

- Dos de esos grupos son diferentes si contienen algún elemento distinto o sus elementos están en distinto orden.

El número de variaciones de m elementos tomados n a n se representa por $V_{m,n}$, y vale:

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1). \qquad \to \text{(El número total de factores es } n\text{)}.$$

Ejemplo:
Si entre 20 personas (A, B, C, D, …, R, S), se sortean tres objetos de distinto valor, los premios pueden recaer, por orden de importancia, en las ternas ABC, ABD, AMN, …, PRS, … con tres personas distintas. Como los objetos son diferentes, la terna ABC es distinta de la BAC o de la CAB, pues no es lo mismo que el mejor premio recaiga en A, en B o en C. Luego, dos de esas ternas son distintas cuando hay algún elemento distinto o sus elementos están en distinto orden.
Por tanto, el número de ternas posibles son las variaciones de 20 personas, tomadas 3 a 3:

$V_{20,3} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ $\quad \to$ Calculadoras: $\boxed{nPr}$ (En este caso 20P3).

$\to$ Obsérvese que su número se ajusta al principio de enumeración (principio multiplicativo): el primer premio puede recaer en cualquiera de las 20 personas; el segundo, en alguno de los 19 restantes; el tercero, en uno de los 18 no premiados en 1ª o 2ª opción.

Variaciones con repetición
Se dispone de m elementos y se eligen n de ellos, pudiendo repetirse cualquier elemento.

- Como en las variaciones ordinarias, dos de esos grupos son diferentes cuando tienen algún elemento distinto o están colocados en distinto orden.

El número de variaciones con repetición de m elementos tomados n a n se representa por $VR_{m,n}$, y vale: $VR_{m,n} = m \cdot m \cdot \ldots \cdot m = m^n$.

Ejemplos:
a) Con los dígitos del 0 al 9 se pueden formar números de cinco cifras:
00000, 07201, …, 65656, …
Es un caso claro de variaciones con repetición (de 10 elementos tomados 5 a 5). En total hay $VR_{10,5} = 10^5 = 100000$.

b) En el sistema binario (el usado por los ordenadores), el número de códigos de 10 cifras que se pueden formar son las variaciones con repetición de 2 elementos, {0, 1}, tomados 10 a 10. Su número es $VR_{2,10} = 2^{10} = 1024$. (En informática: 1 kilobyte equivale a 1024 bytes).

Permutaciones de *m* elementos

Son las variaciones (ordinarias) en las que intervienen los *m* elementos considerados, esto es $V_{m,m}$.
Por tanto, dos permutaciones son diferentes solo cuando los elementos están colocados en distinto orden, pues en todos los casos intervienen todos los que hay.
Las permutaciones de *m* se escriben P_m; su número es:

$$P_m = m\cdot(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1 = m! \qquad \to \text{Calculadoras: } \boxed{x!}$$

Ejemplos:
a) Algunas permutaciones de las letras T, O, R, A son: TORA, OTRA, ROTA, TROA, ... En total hay factorial de 4 permutaciones: $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$.

b) Diez libros pueden colocarse en una estantería de permutaciones de 10 maneras distintas.
$P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$.

Combinaciones ordinarias

Se dispone de *m* elementos y se eligen *n* de ellos, todos distintos. Si el orden en que están dispuestos esos elementos no distingue un grupo de otro, cada uno de esos grupos en una combinación de *n* elementos.

El número de combinaciones que pueden formarse con *m* elementos tomados *n* a *n* viene dado por la fórmula:

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}. \qquad \to \text{Observa que esa expresión es equivalente a } C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n}$$

Ejemplo:
a) Si se tienen 7 botes de pinturas de distintos colores y se mezclan de tres en tres, en la misma proporción, cada uno de los nuevos colores obtenidos es una de las combinaciones de 7 (colores) tomados 3 a 3, pues el orden en que los colores se incorporan a la mezcla no cambia el resultado. Así, por ejemplo, al mezclar los colores amarillo (*A*), verde (*V*) y rojo (*R*), el color resultante será idéntico, independientemente del orden de mezcla: *AVR*, *ARV*, *VAR*, *VRA*, *RAV* o *RVA*.

Para calcular cuántas combinaciones diferentes pueden formarse, se observa:
→ Si se toman 3 botes distintos entre los 7 que hay, el primer bote puede ser cualquiera de los 7, por ejemplo, amarillo (*A*); el segundo, cualquiera de los 6 botes restantes, por ejemplo, verde (*V*); el tercero, cualquier otro de los 5 que quedan, por ejemplo, rojo (*R*). En total esas elecciones pueden hacerse de $7 \cdot 6 \cdot 5$ formas diferentes ($V_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$); pero como cada mezcla de tres colores genera $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ variaciones idénticas, el número 210 habrá que dividirlo entre 6. Por tanto,

$$C_{7,3} = \frac{V_{7,3}}{P_3} = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1} = 35 \to \text{Con calculadora: } 7 \boxed{\text{nCr}}\ 3 \boxed{=} 35. \text{ Esto es: } C_{7,3} = \binom{7}{3} = 35.$$

b) "La Primitiva" es un juego de azar (patrocinado por Hacienda) en el que intervienen las agrupaciones de 6 números, que se obtienen de un bombo que contiene 49 bolas numeradas con los números 1, 2, 3, …, 49.
Lo que determina el premio son las 6 bolas que salen, no el orden en que lo hacen.

El número de posibles combinaciones es $C_{49,6} = \binom{49}{6} = 13983816$.

(La probabilidad de acertar la combinación ganadora es 1/13983816).

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Al extraer una carta de una baraja de 40 cartas calcula la probabilidad de que sea
a) Un rey. b) El rey de copas. c) No sea una figura.

2. Si se consideran familias con tres hijos, ¿cuál es la probabilidad de que una de esas familias, elegida al azar, tenga al menos una niña?

3. Calcula la probabilidad de que al lanzar dos veces un dado (con las caras numeradas del 1 al 6) se obtenga:
a) Al menos un as: {1}. b) Dos ases. c) Dos números distintos

4. En un juego se sortea cada día un premio utilizando papeletas numeradas del 000 al 999.
a) Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 5.
b) Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 55.
Sabiendo que ayer salió premiado un número terminado en 5, calcula la probabilidad de que el número premiado hoy termine también en 5.

5. Las probabilidades de los sucesos A, B y $A \cap B$ son, respectivamente, $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}5$, $P(A \cap B) = 0{,}4$. Calcula:
a) $P(A \cup B)$. b) $P(\overline{A})$ y $P(\overline{B})$.
c) La probabilidad de que no se cumpla ni A ni B.

6. Se tienen dos sucesos aleatorios A y B y se conocen las probabilidades: $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}5$ y $P(A \cup B) = 0{,}7$.
a) ¿Son los sucesos A y B incompatibles? Razona la respuesta.
b) ¿Son sucesos independientes? Razona la respuesta.

7. Calcula la probabilidad $P(A \cup B)$ sabiendo que $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}5$ y $P(A/B) = 0{,}2$.

8. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A \cup B) = 0{,}9$, $P(A \cap B) = 0{,}2$ y $P(\overline{A}) = 0{,}4$, donde $\overline{A}$ es el suceso contrario de A. Calcula las siguientes probabilidades:

$$P(B),\quad P(A/B),\quad P(A \cap \overline{B}),\qquad P(\overline{A \cap B}),\qquad P(\overline{A \cup B}).$$

9. A un congreso asisten 120 personas, de las que 70 hablan castellano, otro conjunto inglés y 30 ambos idiomas. Si se escogen 2 personas al azar, ¿qué probabilidad hay de que se entiendan sin traductor?

10. En un IES, los alumnos se clasifican según su sexo y práctica de la natación, según muestra la siguiente tabla:

	Nadador	No nadador	TOTAL
Hombre	189	301	490
Mujer	165	335	500
TOTAL	354	636	990

A la vista de estos datos, calcula la probabilidad de que elegido un alumno/a al azar:
a) Sea no nadador. b) Sea mujer y no nadadora.
c) Sea nadadora sabiendo que es mujer.
d) Sea hombre si el alumno elegido no practica natación.

11. Se lanzan dos dados con las caras numeradas del 1 al 6. Halla la probabilidad de que:
a) Su suma sea 4 o 5.
b) Uno a de los resultados sea par y el otro impar.
c) Uno de los resultados sea par sabiendo que la suma de los dos es 7.
d) Uno de los resultados sea 4 sabiendo que la suma de los dos es mayor que 7.

12. Pedro y Pablo idean el siguiente juego: cada uno lanza un dado, si la suma de los dados es mayor que 7, gana Pedro; si la diferencia de ambos es menor que 2, gana Pablo; y en cualquier otro caso hay empate. ¿Es un juego equitativo?

13. En una bolsa hay diez bolas iguales numeradas del 0 al 9 cada una. Si se extraen dos bolas de forma consecutiva y se anotan sus números:
a) Escribe todos los sucesos elementales que forman el suceso "la primera bola extraída es un 5".
b) ¿Cuántos números de dos cifras pueden formarse colocando las bolas por orden de extracción?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el número formado sea mayor que 59?
d) ¿Y la probabilidad de que termine en 3?

14. De una urna que contiene 10 bolas blancas y 8 negras se hacen dos extracciones sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de sacar:
a) Dos bolas blancas. b) Solo una negra. c) Del mismo color.
Halla las mismas probabilidades si las extracciones se hicieran con reemplazamiento.

15. El 42 % de la población activa de cierto país está formada por mujeres. Se sabe que el 24 % de las mujeres y el 16 % de los hombres están en el paro. Halla la probabilidad de que una persona, elegida al azar:
a) Esté en el paro y sea hombre.
b) Esté en paro.
b) Sea hombre si está en paro.

16. Un examen de respuesta múltiple consta de 100 preguntas, cada una con 4 opciones, una de ellas correcta y erróneas las otras tres. Cada respuesta acertada suma un punto, la respuesta en blanco suma 0; pero las respuestas erróneas restan.
a) ¿Cuánto debe restarse por cada uno de los fallos para que el examen sea equitativo?
b) ¿Qué calificación obtendrá un alumno que acierta 67 peguntas, falla 21 y deja 12 en blanco?

17. Un examen consta de 10 preguntas del tipo verdadero/falso. Se aprueba con 8 o más preguntas acertadas. Si todas las preguntas se responden al azar, ¿qué probabilidad hay de aprobar?

18. En un Centro Comercial el 35 % de los consumidores utiliza el coche para hacer la compra. Si se eligen al azar 7 consumidores que hayan realizado la compra en dicho Centro Comercial, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellos hayan ido en coche a comprar?

19. Se consideran 1000 familias con 3 hijos.
a) ¿En cuántas de ellas puede esperarse que haya exactamente 2 chicas?
b) ¿Y en cuántas al menos una chica? (Supón iguales la probabilidad de nacimiento de niña o niño).

20. Un laboratorio farmacéutico ha comprobado que un 40 % de las personas que toman un analgésico sufren efectos secundarios leves. De 5 usuarios, halla la probabilidad de que sufran efectos secundarios:
a) Más de 3. b) Al menos 2.

21. En un proceso de fabricación se producen un 5 % de piezas defectuosas. Si se examinan 6 de ellas al azar, qué probabilidad existe de que:
a) Haya a lo sumo 4 defectuosas. b) Haya una o dos defectuosas.

22. Si se lanzan al azar 6 monedas equilibradas, calcula la probabilidad de obtener:
a) Al menos una cara. b) Dos caras y cuatro cruces. c) Tres caras y tres cruces.

23. Cuatro personas de edades y estado de salud semejantes, han contratado una póliza de vida. Las tablas de mortalidad prevén un 0,7 de probabilidad de que esos asegurados vivan dentro de 25 años. Encuentra la probabilidad de que dentro de 25 años:
a) Vivan los 4. b) No viva ninguno. c) El número medio de supervivientes.

24. Un examen de preguntas con respuestas múltiples, consta de 8 preguntas con 4 opciones de contestación, de las que solo una es correcta. Si un alumno respondiera al azar halla la probabilidad de que:
a) Responda correctamente a 6. b) Responda al menos 6 correctamente.
c) El número medio de respuestas acertadas.

25. Un examen consta de 8 preguntas con 3 posibles respuestas cada una, de las que sólo una de ellas es correcta. Si un estudiante responde al azar marcando las respuestas aleatoriamente, calcula la probabilidad de que:
a) No acierte ninguna respuesta correcta. b) Acierte 6 o más preguntas.

26. En España, en el año 2020, aproximadamente el 15 % de la población había nacido en algún país extranjero. Si se elige una muestra aleatoria de n individuos y se desea estimar cuántos de ellos han nacido en el extranjero, tal experimento puede estudiarse como una $B(n, 0{,}15)$.
En el caso de que el tamaño muestral sea $n = 8$, halla la probabilidad de que:
a) Ninguno haya nacido en el extranjero. b) Al menos uno de ellos sea de origen extranjero.
c) Exactamente 5 de ellos lo sean. d) Los 8 hayan nacido en el extranjero.

27. a) En un grupo de 20 personas, ¿de cuántas maneras puede seleccionarse a 3 de ellas?
b) ¿De cuántas maneras distintas pueden seleccionarse 6 preguntas de examen entre 10 propuestas?
c) ¿De cuántas maneras distintas pueden repartirse las 40 cartas de una baraja entre 4 jugadores?

28. Se toman, al azar tres cartas de una baraja española de 40 cartas. Halla la probabilidad de que:
a) La tres sean reyes;
b) Exactamente una sea rey.

29. En una clase infantil hay 6 niñas y 10 niños. Si se escoge a 2 escolares al azar, halla la probabilidad de que:
a) Sean 2 niños $\rightarrow$ suceso A. b) Sean 2 niñas $\rightarrow$ suceso B.
c) Sean una niña y un niño $\rightarrow$ suceso C.

30. Resuelve el problema anterior con la ayuda de un diagrama de árbol.

31. Un examen de oposición consiste en desarrollar por escrito un tema de un total de 50. El tribunal elige al azar 2 temas y cada candidato debe contestar correctamente uno de los dos.
a) Halla la probabilidad de que un candidato apruebe la oposición si se sabe solo 35 temas.
b) Si los opositores tienen que contestar correctamente a los dos temas elegidos, ¿cuál será la probabilidad de aprobar que tiene otro candidato que se sabe 40 de los 50 temas?