SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

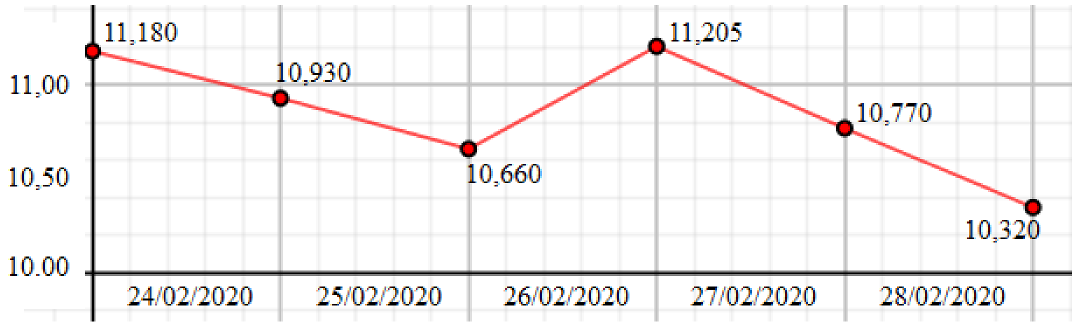
1. La valoración (en euros) de las acciones en bolsa (IBEX 35) de Iberdrola en la semana del 24 al 28 de marzo de 2020 se indican en la tabla:

Fecha	24/02/2020	25/02/2020	26/02/2020	27/02/2020	28/02/2020
Apertura	11,180	10,930	10,660	11,205	10,770
Cierre	10,930 ↓	10,660 ↓	11,205 ↑	10,770 ↓	10,320 ↓

Fuente: www.expansion.com

a) Haz un esquema gráfico de la variación diaria en el periodo considerado.
b) Halla la tasa de variación diaria (en porcentajes) y la variación media en esa semana.
<u>Solución</u>:
La bolsa de Madrid abre cada día a las 9:00 h y cierra, aproximadamente, a las 17:30 h.
El día 24/02/2020 una acción de Iberdrola valía a las 9:00 h 11,180 €; su valor al final de ese día fue de 10,930 €. Tuvo una bajada de 0,25 €.

a) El gráfico puede ser el siguiente.



b) La tasa de variación diaria se calcula haciendo el cociente entre la variación diaria (cierre – apertura) y el valor de apertura; si se multiplica por 100 se obtiene el porcentaje de variación. Así:

$$TV[24/02]=\frac{10,930-11,180}{11,180}\cdot 100 = -2,236\ \%;$$

$$TV[25/02]=\frac{10,660-10,930}{10,930}\cdot 100 = -2,470\ \%;$$

$$TV[26/02]=\frac{11,205-10,660}{10,660}\cdot 100 = +5,113\ \%$$

$$TV[27/02]=\frac{10,770-11,205}{11,205}\cdot 100 = -3,882\ \%$$

$$TV[28/02]=\frac{10,320-10,770}{10,770}\cdot 100 = -4,178\ \%$$

La tasa de variación en esos 5 días fue: $TV[24-28]=\frac{10,320-11,180}{11,180}\cdot 100 = -7,692$ %.

La pérdida media diaria fue de –1,538 %.

La tasa de variación media de los 5 días es:

$$TVM[24-28]=\frac{10,320-11,180}{5} = -0,172 \text{ €/día} \rightarrow \frac{-0,172}{11,180}\cdot 100 = -1,538\ \%.$$

2. Halla la tasa de variación media de la función $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$ en los intervalos [−1, 0], [−1, 1] y [0, 3].
Utilizando la derivada, halla la tasa de variación instantánea de esa función en los puntos −1, 1 y 3.
Solución:
Intervalo [−1, 0] → $TVM\left[-1,\ 0\right]=\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=\frac{0-5/3}{1}=-\frac{5}{3}$.
Intervalo [−1, 1] → $TVM\left[-1,\ 1\right]=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{-5/3-5/3}{2}=-\frac{5}{3}$.
Intervalo [0, 3] → $TVM\left[0,\ 3\right]=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{3-0}{3}=1$.

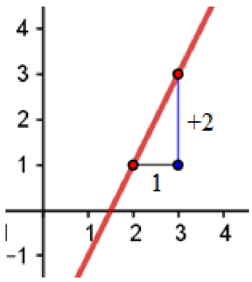
La derivada de $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$ es $f'(x)=\frac{1}{3}\cdot 3x^2-2=x^2-2$.
Por tanto:

$TVI\left(-1\right)=f'(-1)=(-1)^2-2=-1$;

$TVI\left(1\right)=f'(1)=1^2-2=-1$;

$TVI\left(3\right)=f'(3)=3^2-2=7$.

3. Comprueba que la tasa de variación media de la función $f(x)=2x-3$ en los intervalos [−1, 0], [−1, 1] y [0, 3] siempre vale 2. ¿Es una coincidencia dicho resultado? Justifica tu respuesta.
Solución:
Efectivamente:



$TVM\left[-1,\ 0\right]=\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=\frac{-3-(-5)}{1}=2$.

$TVM\left[-1,\ 1\right]=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{-1-(-5)}{2}=2$.

$TVM\left[0,\ 3\right]=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{3-(-3)}{3}=2$.

No es una coincidencia ya que la función es una recta de pendiente 2: la pendiente de una recta indica el crecimiento unitario, la tasa de variación.
También coincide con la variación instantánea en cualquier punto, ya que $f'(x)=2$.

4. Dada la función $f(x)=-x^2+4x$, se pide:
a) Utilizando la definición de derivada de una función en un punto, calcula el valor de $f'(3)$.
b) Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa *x* = 3.
Solución:
a) Por definición, $f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$.
Como $f(3+h)=-(3+h)^2+4(3+h)=-h^2-2h+3$ y $f(3)=3$, se tendrá:

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2-2h+3-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2-2h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(-h-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(-h-2\right)=-2.$$

Luego, $f'(3)=-2$.

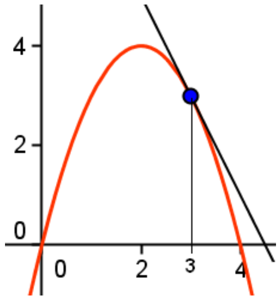
b) La recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = 3$, es:

$$y - f(3) = f'(3)(x-3).$$

Como $f(3) = 3$ y $f'(3) = -2$, se obtiene:

$$y - 3 = -2(x-3) \Rightarrow y = -2x + 9.$$

En la figura adjunta (que no se pide) se representan la curva y la recta.



5. Para la función $f(x) = x^2 + 2x$, se pide:

a) Su derivada y el valor de $f'(-2)$, $f'(-1)$ y $f'(0)$.

b) La ecuación de la recta tangente en cada uno de los puntos de abscisa −2, −1, 0.

c) Explica gráficamente el resultado de $f'(-1)$.

<u>Solución</u>:

a) La función derivada de $f(x) = x^2 + 2x$ es $f'(x) = 2x + 2$.

Para hallar el valor de la derivada en cualquier punto, basta con sustituir. Así:

$$f'(-2) = 2\cdot(-2) + 2 = -2;\quad f'(-1) = 2\cdot(-1) + 2 = 0;\ f'(0) = 2\cdot 0 + 2 = 2.$$

b) La recta tangente a la curva, en el punto de abscisa $x = a$, es: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$.

- Para $x = -2$, como $f(-2) = 0$ y $f'(-2) = -2$, la ecuación será:

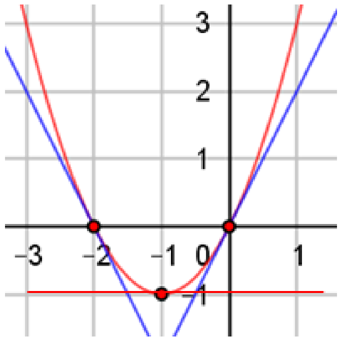
$$y - (-2) = -2(x - (-2)) \Rightarrow y + 2 = -2(x+2) \Rightarrow y = -2x - 6.$$

- Para $x = -1$, se tiene $f(-1) = -1$ y $f'(-1) = 0$; luego, la recta tangente será:

$$y - (-1) = 0\cdot(x - (-1)) \Rightarrow y = -1.$$

- Para $x = 0$, como $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$, se tendrá:

$$y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x.$$



c) Que $f'(-1) = 0$ indica que la tangente a la curva en ese punto es horizontal. Como la curva es unan parábola, ese punto es su vértice. Se puede ver gráficamente.

6. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función:

a) $f(x) = -x^2 + 4x$ en el punto $x = 1$.

b) $f(x) = x^2 - x$ en el punto $x = 2$.

Representa gráficamente la curva y la recta tangente.

<u>Solución</u>:

a) La ecuación de la recta tangente es $y - f(1) = f'(1)(x-1)$.

$$f(x) = -x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = -2x + 4 \Rightarrow f(1) = 3;\ f'(1) = 2.$$

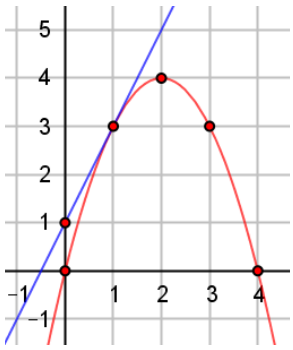
Luego, la recta es:

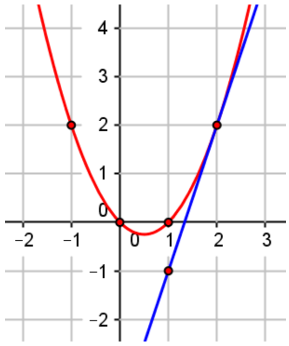
$$y - 3 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x + 1.$$

Dando valores se pueden obtener algunos puntos y representar tanto la curva como la recta.

Para la curva: (0, 0); (1, 3); (2, 4); (3, 3); (4, 0).

Para la recta: (0, 1); (1, 3).





b) La ecuación de la recta tangente es $y - f(2) = f'(2)(x-2)$.

$$f(x) = x^2 - x \Rightarrow f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f(2) = 2;\ f'(2) = 3.$$

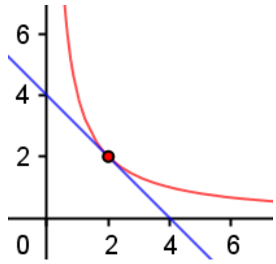
Luego, la recta es:

$$y - 2 = 3(x-2) \Rightarrow y = 3x - 4.$$

Dando valores se pueden obtener algunos puntos y representar tanto la curva como la recta.
Para la curva: (0, 0); (1, 0); (2, 2); (3, 6); (–1, 2).
Para la recta: (2, 3); (1, –1).

7. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \dfrac{4}{x}$ en el punto de abscisa x = 2.

Solución:



La ecuación de la recta tangente es $y - f(2) = f'(2)(x-2)$.

$$f(x) = \frac{4}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-4}{x^2} \Rightarrow f(2) = 2;\ f'(2) = -1.$$

Luego, la recta es:

$$y - 2 = -1\cdot(x-2) \Rightarrow y = -x + 4.$$

Aunque no se pide, la gráfica correspondiente es la adjunta.

8. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x - 2$; b) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 7x^2 - 4x + 5$; c) $f(x) = \dfrac{2}{5}x^5 - 4x^2 + 7$;

Solución:

a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x - 2 \Rightarrow f'(x) = \left(x^5\right)' - 4\left(x^3\right)' + 6(x)' - (2)' \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 12x^2 + 6$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 7x^2 - 4x + 5 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{3}3x^2 + 7\cdot 2x - 4 \Rightarrow f'(x) = x^2 + 14x - 4$.

c) $f(x) = \dfrac{2}{5}x^5 - 4x^2 + 7 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{5}5x^4 - 4\cdot 2x \Rightarrow f'(x) = 2x^4 - 8x$.

9. Para la función $h(x) = \left(x^2 - 3x\right)^2 \cdot (2x-3)$ halla su derivada:

1.º Aplicando la fórmula de la derivada de un producto.
2.º Multiplicando la expresión y derivando después.
En los dos casos expresa el resultado como un polinomio ordenado.

Solución:

1.º Derivando como un producto:

$$h(x) = \left(x^2 - 3x\right)^2 \cdot (2x-3) \Rightarrow h'(x) = \left(\left(x^2 - 3x\right)^2\right)' \cdot (2x-3) + \left(x^2 - 3x\right)^2 \cdot (2x-3)' \Rightarrow$$

$$h'(x) = 2\left(x^2 - 3x\right)\cdot(2x-3)\cdot(2x-3) + \left(x^2 - 3x\right)^2 \cdot 2 \to \text{Operando:}$$

$$h'(x) = 2\left(x^2 - 3x\right)\cdot\left(4x^2 - 12x + 9\right) + \left(x^4 - 6x^3 + 9x^2\right)\cdot 2 \Rightarrow$$

$$h'(x) = 2\left(4x^4 - 12x^3 + 9x^2 - 12x^3 + 36x^2 - 27x\right) + 2x^4 - 12x^3 + 18x^2 \Rightarrow$$

$$h'(x) = 10x^4 - 60x^3 + 108x^2 - 54x.$$

2.º Multiplicando y derivando después:

$$h(x)=\left(x^2-3x\right)^2\cdot(2x-3)\Rightarrow h(x)=\left(x^4-6x^3+9x^2\right)\cdot(2x-3)=2x^5-15x^4+36x^3-27x^2\Rightarrow$$

$$h'(x)=10x^4-60x^3+108x^2-54x.$$

Observa que, en este caso es mejor la opción de operar antes y derivar después.

10. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $g(x)=\left(4x^2-3x\right)\cdot(7x-2)$; b) $g(x)=\left(3x^2-2x\right)^3$; c) $g(x)=4x\cdot(7x-2)^2$.

Solución:

a) $g(x)=\left(4x^2-3x\right)\cdot(7x-2)\Rightarrow g'(x)=\left(4x^2-3x\right)'\cdot(7x-2)+\left(4x^2-3x\right)\cdot(7x-2)'\Rightarrow$

$$g'(x)=(8x-3)\cdot(7x-2)+\left(4x^2-3x\right)\cdot 7\Rightarrow g'(x)=56x^2-37x+6+28x^2-21x\Rightarrow$$

$$g'(x)=84x^2-58x+6.$$

b) $g(x)=\left(3x^2-2x\right)^3\Rightarrow g'(x)=3\left(3x^2-2x\right)^2\cdot\left(3x^2-2x\right)'\Rightarrow g'(x)=3\left(3x^2-2x\right)^2\cdot(6x-2)$.

c) $g(x)=4x\cdot(7x-2)^2\Rightarrow g'(x)=(4x)'\cdot(7x-2)^2+4x\cdot\left((7x-2)^2\right)'\Rightarrow$

$$g'(x)=4\cdot(7x-2)^2+4x\cdot\left(2\cdot(7x-2)\cdot 7\right)\Rightarrow g'(x)=4\cdot(7x-2)^2+56x\cdot(7x-2).$$

11. Halla la derivada de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$; b) $f(x)=\dfrac{1-3x}{x-2}$; c) $f(x)=\dfrac{2x-4}{3x-2}$; d) $f(x)=\dfrac{-4}{x}$.

e) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{2x+3}$; f) $f(x)=\dfrac{4x+2}{5x^2-3x}$; g) $f(x)=\dfrac{4x^3}{5x^2-4x}$; h) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-3}$.

Solución:

La derivada de un cociente de funciones es:

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\rightarrow(F(x))'=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{(2x)'\cdot(x-3)-(2x)\cdot(x-3)'}{(x-3)^2}=\dfrac{2\cdot(x-3)-(2x)\cdot 1}{(x-3)^2}=\dfrac{-6}{(x-3)^2}$.

b) $f(x)=\dfrac{1-3x}{x-2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{(1-3x)'\cdot(x-2)-(1-3x)\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}=\dfrac{-3\cdot(x-2)-(1-3x)\cdot 1}{(x-2)^2}=\dfrac{5}{(x-2)^2}$.

c) $f(x)=\dfrac{2x-4}{3x-2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2\cdot(3x-2)-(2x-4)\cdot 3}{(3x-2)^2}=\dfrac{6x-4-(6x-12)}{(3x-2)^2}=\dfrac{8}{(3x-2)^2}$.

d) $f(x)=\dfrac{-4}{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{(-4)'\cdot x-(-4)\cdot(x)'}{x^2}=\dfrac{0\cdot x-(-4)\cdot 1}{x^2}=\dfrac{4}{x^2}$.

e) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{2x+3} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x\cdot(2x+3)-\left(x^2-2\right)\cdot 2}{(2x+3)^2}=\dfrac{2x^2+6x+4}{(2x+3)^2}$.

f) $f(x)=\dfrac{4x+2}{5x^2-3x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{4\left(5x^2-3x\right)-(4x+2)\cdot(10x-3)}{\left(5x^2-3x\right)^2}=\dfrac{-20x^2-20x+6}{\left(5x^2-3x\right)^2}$.

g) $f(x)=\dfrac{4x^3}{5x^2-4x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{12x^2\cdot\left(5x^2-4x\right)-4x^3\cdot(10x-4)}{\left(5x^2-4x\right)^2}=\dfrac{20x^4-32x^3}{\left(5x^2-4x\right)^2}$.

Se podría simplificar algo más: $f'(x)=\dfrac{20x^4-32x^3}{\left(5x^2-4x\right)^2}=\dfrac{20x^4-32x^3}{x^2(5x-4)^2}=\dfrac{20x^2-32x}{(5x-4)^2}$.

h) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-3} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{4x\cdot\left(x^2-3\right)-2x^2\cdot 2x}{\left(x^2-3\right)^2}=\dfrac{-12x}{\left(x^2-3\right)^2}$.

12. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=3\sqrt{x}$; b) $f(x)=\sqrt{5x-3}$; c) $f(x)=\sqrt{x^2+5x}$; d) $f(x)=x\cdot\sqrt{x}$.

Solución:

La derivada de $y=\sqrt{f(x)}$ es $y'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

a) $f(x)=3\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$.

b) $f(x)=\sqrt{5x-3} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(5x-3)'}{2\sqrt{5x-3}}=\dfrac{5}{2\sqrt{5x-3}}$.

c) $f(x)=\sqrt{x^2+5x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\left(x^2+5x\right)'}{2\sqrt{x^2+5x}}=\dfrac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x}}$.

Puedes utilizar GeoGebra para comprobar tus resultados; pero solo cuando hayas resuelto el ejercicio. Escribe "Derivada(Función)".
Así, para $f(x)=\sqrt{x^2+5x}$ se teclea Derivada(sqrt(x^2+5x)), aparece

$$f(x) = \text{Derivada}\left(\sqrt{x^2+5\,x}\right) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{2\,x+5}{\sqrt{x^2+5\,x}}$$

d) $f(x)=x\cdot\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=(x)'\cdot\sqrt{x}+x\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=\sqrt{x}+x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow$ Operando: $f'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

13. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=3^{2x}$; b) $f(x)=e^{5x}$; c) $f(x)=e^{-3x^2+2x}$; d) $f(x)=x\cdot e^x$.

Solución:

Si $F(x)=a^{f(x)}$, $a>0 \Rightarrow F'(x)=f'(x)\cdot a^{f(x)}\ln a$.

Si $F(x)=e^{f(x)} \Rightarrow F'(x)=f'(x)\cdot e^{f(x)}$.

a) $f(x)=3^{2x} \Rightarrow f'(x)=2\cdot 3^{2x}\cdot\ln 3$. (Posible error: *animarse* y operar: $f'(x)=6^{2x}\cdot\ln 3 \leftarrow$ Fatal).

b) $f(x)=e^{5x} \Rightarrow f'(x)=5e^{5x}$.

c) $f(x)=e^{-3x^2+2x} \Rightarrow f(x)=(-6x+2)\cdot e^{-3x^2+2x}$.

d) $f(x)=x\cdot e^x \Rightarrow f(x)=(x)'\cdot e^x+x\cdot(e^x)'=1\cdot e^x+x\cdot e^x=(1+x)\cdot e^x$.

14. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\log(2x)$; b) $f(x)=\log(x^3)$; c) $f(x)=\ln(5x^2+1)$; d) $f(x)=x\cdot\ln x$.

Solución:

Si $F(x)=\log_a(f(x)) \Rightarrow F'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\log_a e$.

Si $F(x)=\ln(f(x)) \Rightarrow F'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

a) $f(x)=\log(2x) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(2x)'}{2x}\log e=\dfrac{2}{2x}\log e=\dfrac{1}{x}\log e$.

b) $f(x)=\log(x^3) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(x^3)'}{x^3}\log e=\dfrac{3x^2}{x^3}\log e=\dfrac{3}{x}\log e$.

c) $f(x)=\ln(5x^2+1) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{(5x^2+1)'}{5x^2+1}=\dfrac{10x}{5x^2+1}$.

d) $f(x)=x\cdot\ln x \Rightarrow f'(x)=(x)'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'=1\cdot\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x+1$.

15. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sin(3-2x)$; b) $f(x)=\sin(x^3)$; c) $f(x)=(\sin x)^3$; d) $f(x)=3x\cdot(\sin x)$;

e) $f(x)=\cos(3-2x)$; f) $f(x)=\cos^2 x$; g) $f(x)=\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$; h) $f(x)=\dfrac{\cos x}{2}$.

Solución:

Si $F(x)=\sin(f(x)) \Rightarrow F'(x)=f'(x)\cdot\cos(f(x))$.

Si $F(x)=\cos(f(x)) \Rightarrow F'(x)=-f'(x)\cdot\sin(f(x))$.

a) $f(x)=\sin(3-2x) \Rightarrow f'(x)=-2\cdot\cos(3-2x)$.

b) $f(x)=\sin(x^3) \Rightarrow f(x)=3x^2\cdot\cos(x^3)$.

c) $f(x)=(\sin x)^3 \to$ es una potencia: $f'(x)=3\cdot(\sin x)^{3-1}\cdot(\sin x)'=3\cdot(\sin x)^2\cdot(\cos x)$.

d) $f(x)=3x\cdot(\sin x) \Rightarrow f'(x)=(3x)'\cdot(\sin x)+3x\cdot(\sin x)'=3\sin x+3x\cos x$.

e) $f(x)=\cos(3-2x) \Rightarrow f'(x)=-(3-2x)'\cdot\sin(3-2x)=-(-2)\cdot\sin(3-2x)=2\sin(3-2x)$.

f) $f(x)=\cos^2 x \to f(x)=\cos^2 x=(\cos x)^2 \Rightarrow$

$$f'(x)=2\cdot(\cos x)^{2-1}(\cos x)'=2\cdot(\cos x)\cdot(-\sin x)=-2\sin x\cos x.$$

g) $f(x)=\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) \Rightarrow f'(x)=-\left(\dfrac{x}{2}\right)'\cdot\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}\right).$

h) $f(x)=\dfrac{\cos x}{2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2}(\cos x)'=-\dfrac{1}{2}\sin x$.

16. Para cada una de las siguientes funciones halla su derivada y, después, da respuesta a la pregunta que se hace:

a) $f(x)=x^3-\dfrac{1}{2}x^2-2x+3$. Da un punto en el que la derivada valga 2.

b) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+4}$. ¿En qué puntos la derivada vale 0?

c) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$. ¿Para qué valores de x la derivada es negativa?

d) $f(x)=xe^{x^2-1}$. ¿Decrece en algún punto?

Solución:

a) $f(x)=x^3-\dfrac{1}{2}x^2-2x+3 \Rightarrow f'(x)=3x^2-x-2$.

$$f'(x)=2 \Rightarrow 3x^2-x-2=2 \Rightarrow 3x^2-x-4=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{6}=\frac{1\pm 7}{6}=\begin{cases}4/3\\ -1\end{cases}.$$

b) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+4} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2\cdot(x^2+4)-2x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\dfrac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2}$.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2}=0 \Rightarrow -2x^2+8=0 \Rightarrow x=\pm 2.$$

c) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5} \Rightarrow j'(x)=\dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}}$.

La derivada es negativa cuando $2x-4<0 \Rightarrow 2x<4 \Rightarrow x<2$.

Puede verse que la función siempre está definida, pues $x^2-4x+5>0$ para todo $x\in$ **R**.

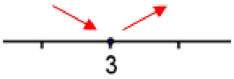
d) $f(x)=xe^{x^2-1} \Rightarrow f'(x)=e^{x^2-1}+x\cdot 2xe^{x^2-1}=(1+2x^2)e^{x^2-1}$.

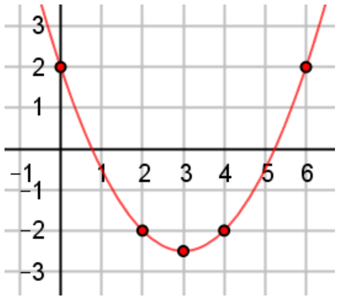
Como $f'(x)=(1+2x^2)e^{x^2-1}$ siempre es positiva (es producto de dos factores positivos), la función es creciente en todo su dominio, que es **R**. Nunca es decreciente.

17. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=0,5x^2-3x+2$. Comprueba que tiene un mínimo en el vértice de la parábola. Haz un esbozo de su gráfica.
Solución:

$$f(x)=0,5x^2-3x+2 \Rightarrow f´(x)=x-3.$$

La derivada vale 0 si x = 3.
Por tanto:
Si x < 3, como $f´(x)<0$, la función será decreciente.
Si x > 3, como $f´(x)>0$, la función será creciente.
Luego, en x = 3 se tiene un mínimo.





El vértice de la parábola se da en la abscisa $x=\left[-\dfrac{b}{2a}\right]=-\dfrac{-3}{2\cdot 0,5}=3$.
Dando algunos valores puede trazarse la gráfica adjunta.

18. Aplicando derivadas comprueba que el vértice de la parábola $y=ax^2+bx+c$ se da en el punto de abscisa $x=-b/2a$.
Solución:
El vértice de una parábola es su punto máximo (si es cóncava ∩) o mínimo (si es convexa ∪).

El máximo o mínimo de una función se da cuando su derivada es 0.
Derivando e igualando a 0:

$$y=ax^2+bx+c \Rightarrow y´=2ax+b=0 \Rightarrow 2ax=-b \Rightarrow x=-\frac{b}{2a}.$$

19. Aplicando derivadas calcula los vértices de las parábolas:

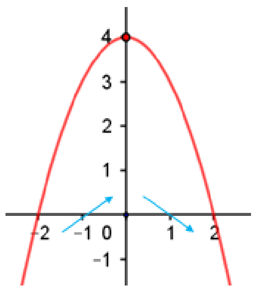
a) $y=-x^2+4$; b) $y=\dfrac{1}{2}x^2-3x$; c) $y=-2x^2+5x+3$; d) $y=-\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{2}{3}x+1$.

Solución:
El vértice se da en el punto en el que la derivada vale 0.

a) $y=-x^2+4 \Rightarrow y´=-2x=0 \Rightarrow x=0 \to$ el vértice es el punto V(0, 4): es máximo.
En efecto:

- Si x < 0, $y´=-2x>0 \to$ la función crece.
- Si x > 0, $y´=-2x<0 \to$ la función decrece.

Luego, en x = 0 se tiene el máximo.

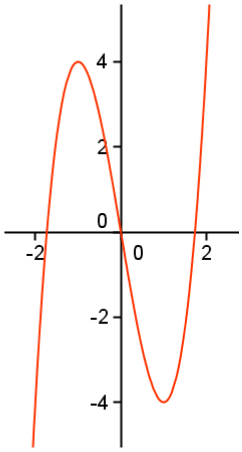


b) $y=\dfrac{1}{2}x^2-3x \Rightarrow y´=x-3=0 \Rightarrow x=3 \to$ el vértice es el punto V(3, –9/2): mínimo.
En efecto, si x < 3, $y´=x-3<0 \to$ la función decrece; y si x > 3, $y´=x-3>0 \to$ la función crece.
Luego, en x = 3 se tiene el mínimo.

c) $y=-2x^2+5x+3 \Rightarrow y´=-4x+5=0 \Rightarrow x=\dfrac{5}{4} \to$ el vértice es el punto $V\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{49}{8}\right)$, máx.

d) $y=-\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{2}{3}x+1 \Rightarrow y´=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}=0 \Rightarrow x=-1 \to$ el vértice es el punto $V\left(-1, \dfrac{4}{3}\right)$, máx.

20. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función $f(x)=2x^3-6x$.



Solución:

Derivando e igualando a 0:

$$f'(x)=6x^2-6=0 \Rightarrow x=\pm 1$$

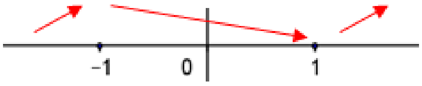
Si $x<-1$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Si $-1<x<1$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

De lo anterior se deduce que en $x = -1$ se tiene un máximo.

Si $x>1$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Se deduce que en $x = 1$ se tiene un mínimo.



Aunque no se pide, la gráfica de la función es la adjunta.

21. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=x^3+3x$. ¿Tiene la función algún máximo o mínimo? ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x^3+3x=0$?

Solución:

Como su derivada $f'(x)=3x^2+3>0$ para todo x, la función es creciente en todo **R**.

No tiene máximos ni mínimos, pues la derivada nunca vale 0.

Como siempre es creciente solo puede tomar una vez el valor 0; y lo toma cuando $x = 0$.
(Podría indicarse, por ejemplo, que como $f(-1)=-4$ y $f(1)=4$, al ser creciente en algún punto tomará el valor 0).

22. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función $f(x)=3x^2-2x^3$. Da algunos de sus puntos, entre ellos los de corte de la gráfica con los ejes y haz un esbozo de su gráfica.

Solución:

La función está definida para todo número real x.

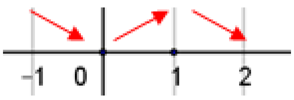
Derivando e igualando a 0:

$$f'(x)=6x-6x^2 \to 6x-6x^2=0 \Rightarrow 6x(1-x)=0 \Rightarrow x=0; x=1.$$

Si $x<0$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

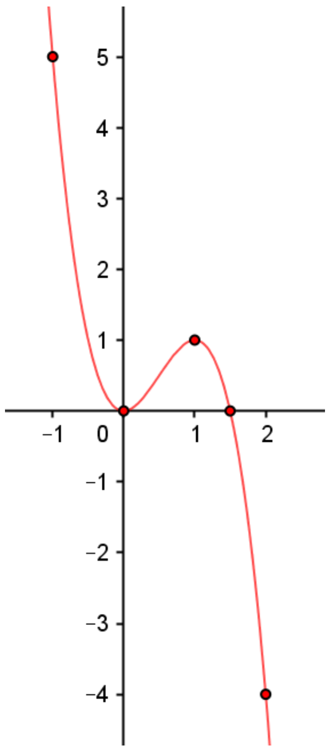
Si $0<x<1$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Por tanto, en $x = 0$ se tiene un mínimo.



Si $x>1$, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

Por tanto, en $x = 1$ se tiene un máximo.



Cortes con los ejes:

Eje OX: $f(x)=3x^2-2x^3=0 \Rightarrow x^2(3-2x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3/2 \end{cases}$.

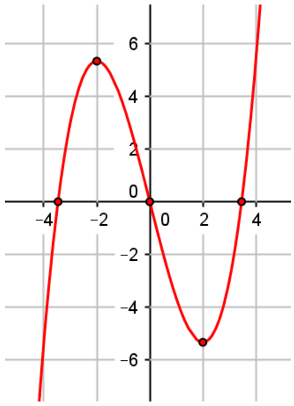
Eje OY: punto (0, 0), mínimo.

Otros puntos: (–1, 5); (1, 1), máximo; (2, –4).

La gráfica de la función es la adjunta.

23. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-4x$.

<u>Solución</u>:



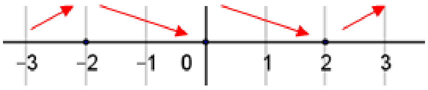
Derivando e igualando a 0:

$$f´(x)=x^2-4=0\Rightarrow x=\pm 2$$

Si $x < -2$, $f´(x)>0\ \Rightarrow\ f(x)$ es creciente.

Si $-2 < x < 2$, $f´(x)<0\ \Rightarrow\ f(x)$ es decreciente.

De lo anterior se deduce que en $x = -1$ se tiene un máximo.



Si $x > 2$, $f´(x)>0\ \Rightarrow\ f(x)$ es creciente. Además, en $x = 2$ se tiene un mínimo.

Aunque no se pide, la gráfica de la función es la adjunta.

24. Haz un esbozo de la función $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$, determinando sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus asíntotas.

<u>Solución</u>:

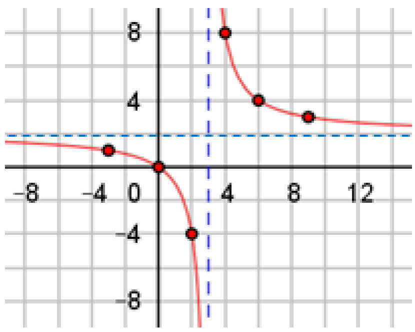
La función está definida siempre que $x\neq 3$.

En $x = 3$ tiene una asíntota vertical, pues $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{x-3}=\dfrac{6}{0}=\pm\infty$.

A la izquierda de $x = 3$ toma valores grandes y negativos: $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x}{x-3}=\dfrac{6}{0^-}=-\infty$.

A la derecha de $x = 3$ toma valores grandes y positivos: $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2x}{x-3}=\dfrac{6}{0^+}=+\infty$.

También tiene una asíntota horizontal, pues $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{x-3}=2\ \to$ recta $y = 2$.



Para determinar el crecimiento y decrecimiento hay que estudiar el signo de su derivada.

$$f(x)=\frac{2x}{x-3}\ \Rightarrow\ f´(x)=\frac{2(x-3)-2x\cdot 1}{(x-3)^2}=\frac{-6}{(x-3)^2}\ \to$$

$f´(x)<0$ en todo su dominio.

Por tanto, siempre es decreciente.

$\to$ Algunos puntos:

(–3, 1); (0, 0); (2, –4); (4, 8); (6, 4); (9, 3).

25. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$. ¿Tiene máximos o mínimos?

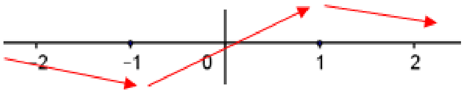
<u>Solución</u>:

Derivando:

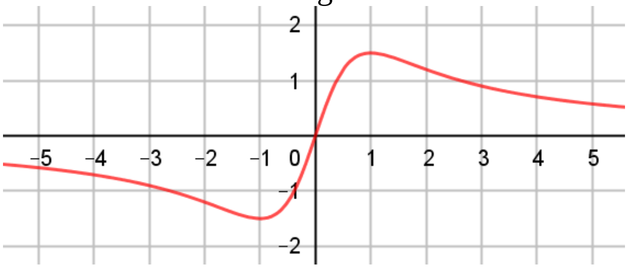
$$f(x)=\frac{3x}{x^2+1}\ \Rightarrow\ f´(x)=\frac{3\cdot\left(x^2+1\right)-3x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{3-3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\ \to\ f´(x)=0 \text{ si } 3-3x^2=0\ \Rightarrow\ x=\pm 1.$$

Por tanto:
Si $x < -1$ (por ejemplo –2), $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
Si $-1 < x < 1$ (por ejemplo 0), $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
De lo anterior se deduce que en $x = -1$ hay un mínimo.

Si $x > 1$ (por ejemplo 2), $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.
Se deduce que en $x = 1$ se tiene un máximo.



Aunque no se pide, la gráfica de la función es la siguiente.

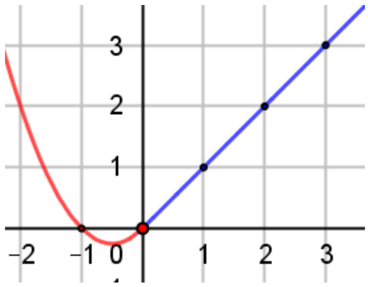


26. Comprueba si las siguientes funciones son derivables en los puntos $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$. Si no lo son, indica el motivo. A partir de la función derivada, halla, si existe, el valor de la derivada en los puntos de abscisa $x = -1$, 0, 1, 2 y 3.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$; c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \le 2 \\ x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

Haz la representación gráfica de cada función y confirma el resultado.
Solución:
a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Las funciones polinómicas (parábola y recta) que intervienen en la definición son continuas y derivables. El único punto que presenta dificultades es $x = 0$. En ese punto hay que estudiar la continuidad y derivabilidad.
Continuidad.
La función será continua en $x = 0$ cuando los límites laterales en ese punto sean iguales:
Por la izquierda: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(x^2 + x\right) = 0$;
Por la derecha: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$.
La función es continua.



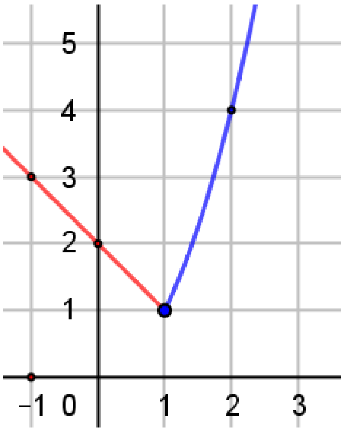
Derivabilidad.
La derivada de una función definida a trozos se hace derivando cada función por separado. El valor de la derivada en cada punto se hace sustituyendo en el trozo correspondiente. En los puntos de unión de los distintos trozos debe comprobarse si las derivadas laterales son iguales.
Para:
$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. (En principio se excluye el punto de unión $x = 0$, en el que habrá que comprobar el valor de las derivadas laterales).
Las derivadas laterales en $x = 0$, son iguales: $f'(0^-) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$; $f'(0^+) = 1$.
La función es derivable en $x = 0$; y en todo **R**.
El valor de la derivada en los puntos de abscisa $x = -1$, 0, 1, 2 y 3 es:

$f'(-1)=2\cdot(-1)+1=-1;\ f'(0)=1;\ f'(1)=1;\ f'(2)=1;\ f'(3)=1.$

Como puede observarse, su gráfica es continua y no tiene *picos*; el cambio de la curva a la recta se da sin cambios bruscos, con suavidad.

b) $f(x)=\begin{cases}-x+2 & \text{si } x<1\\ x^2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}.$

Las funciones (recta y parábola) que intervienen en la definición son continuas y derivables. El único punto que presenta dificultades es $x = 1$. En ese punto hay que estudiar la continuidad y derivabilidad.



Continuidad.

La función será continua en $x = 1$ cuando los límites laterales en ese punto sean iguales:

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-x+2\right)=-1+2=1;$

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^2=1.$

La función es continua.

Derivabilidad.

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & \text{si } x<1\\ x^2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x<1\\ 2x & \text{si } x>1\end{cases}.$$

No es derivable en $x = 1$. Las derivadas laterales no son iguales: $f'(1^-)=-1;\ f'(1^+)=2\cdot 1=2$.

Para cualquier otro valor de $x \in \mathbf{R}$ la función es derivable.

El valor de la derivada en los puntos de abscisa $x = -1, 0, 1, 2$ y 3 es:

$f'(-1)=-1;\ f'(0)=-1;\ f'(1)$ no existe; $f'(2)=2\cdot 2=4;\ f'(3)=6.$

Como puede observarse, su gráfica es continua, pero tiene un *pico* en $x = 1$, en donde no es derivable.

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } x\leq 2\\ x-1 & \text{si } x>2\end{cases}.$

La función $f_1(x)=\dfrac{1}{x}$ no está definida en $x = 0$. Por tanto, en ese punto no es continua ni derivable.

En los demás puntos de su dominio es continua y derivable.

La función $f_2(x)=x-1$ es continua y derivable siempre.

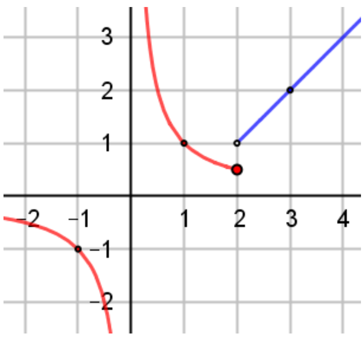
Por tanto, el único punto que hay que estudiar es $x = 2$.

Continuidad.

La función será continua en $x = 2$ cuando los límites laterales en ese punto sean iguales:

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2};$

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x-1\right)=2-1=1.$



La función no es continua en ese punto. Por tanto, tampoco es derivable.

Su derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x<2\\ 1 & \text{si } x>2\end{cases}.$$

El valor de la derivada en los puntos de abscisa $x = -1, 0, 1, 2$ y 3 es:

$f´(-1)=-1$; $f´(0)$ no existe; $f´(1)=-1$; $f´(2)$ no existe; $f´(3)=1$.

Como puede observarse, su gráfica no está definida en $x = 0$ y no es continua en $x = 2$. En esos puntos no es derivable.

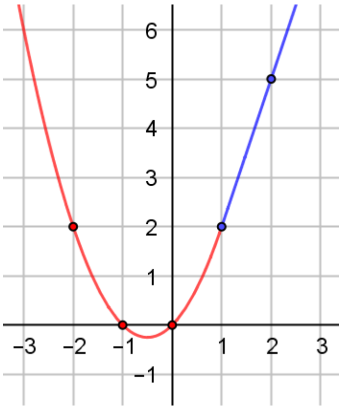
27. Halla el valor que debe tomar a para que sea continua la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x<1 \\ 3x-a & x\geq 1\end{cases}$.

Justifica tu resultado haciendo una representación gráfica de $f(x)$.
¿La función obtenida será derivable en $x = 1$?
Solución:
Como las funciones (parábola y recta) que intervienen en la definición son continuas y derivables, el único punto que presenta dificultades es $x = 1$, donde se unen, o no, sus gráficas.
Será continua en $x = 1$ cuando los límites laterales en ese punto sean iguales:

Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+x\right)=1+1=2$;

Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(3x-a\right)=3-a$.

Como deben ser iguales: $2=3-a \Rightarrow a = 1$.
Su gráfica es la adjunta.



Derivada. Salvo en $x = 1$:

$$f´(x)=\begin{cases} 2x+1 & x<1 \\ 3 & x>1\end{cases}.$$

Como $f´(1^-)=3=f´(1^+)$, la función obtenida es derivable en $x = 1$.