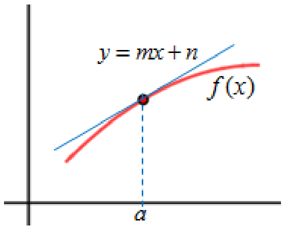
INTRODUCCIÓN A LA DERIVADA

La Matemática ha evolucionado siempre a partir de lo pequeño, cuidando los detalles. Los conceptos de límite y de derivada son un buen ejemplo de ello. (Algo de historia).

1. Definición de derivada

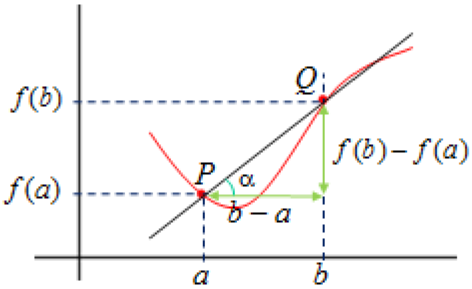


La derivada de una función mide el cambio (instantáneo) de esa función en un punto $x = a$. Ese cambio es el mismo que el de la recta tangente a la función en ese punto, que es su pendiente m. Lo justificamos como sigue.

Tasa de variación de una función (media e instantánea)

La tasa de variación media de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ es un número que da la inclinación (la pendiente) de la recta que une los puntos $P(a, f(a))$ y $Q(b, f(b))$. Es el cociente entre el incremento de la función y el incremento de la variable (el cociente de las diferencias). Esto es,

$$TVM[a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



La diferencia $f(b) - f(a)$ da la variación de la función en el intervalo $[a, b]$; al dividir por $b - a$ se halla la variación por unidad.

Observaciones:

1. La TVM coincide con la tangente del ángulo α que da la pendiente de la recta secante a la curva $f(x)$ que pasa por los puntos P y Q de ella.
2. La TVM puede llamarse también velocidad media de cambio, pues la idea de velocidad media en un trayecto expresa bien este concepto. (Otros nombres para designar la TVM son: evolución media, tasa de crecimiento, incremento medio).

Ejemplos:

a) En cinco días (semana del 17 al 21 de febrero de 2020) el índice bursátil, IBEX 35, abrió cotizando a 9981,20 puntos y cerró la semana en 9886,20 puntos.
A partir de estos datos puede deducirse:

1. La variación semanal fue de 9886,20 – 9981,20 = –95 (–0,952 %). (Los “números rojos” suelen indicar pérdidas).

2. La variación media en esos 5 días fue:

$$TVM\left(IBEX\,35, [17/02, 21/02]\right) = \frac{9886,20 - 9981,20}{5} = -19 \ (-0,19\ \%).$$

3. La TVM es una media, lo que significa que no tiene en cuenta las fluctuaciones intermedias; solo considera los valores inicial y final, dando por supuesto que las diferencias se dan proporcionalmente, siguiendo una línea recta. Por tanto, el resultado puede resultar engañoso, pues no tiene en cuenta las cotizaciones entre semana: el máximo o el mínimo, las caídas bruscas…
Así, el miércoles 19 de febrero el IBEX abrió en 10005,8 puntos y cerró en 10083,6, ganando 77,8 puntos (+0,78 %). En cambio, el jueves 20/02 la bolsa abrió en 10083,60 y cerró en 9931,00, lo que supuso una variación (pérdida) de –152,6 puntos (–1,51 %).

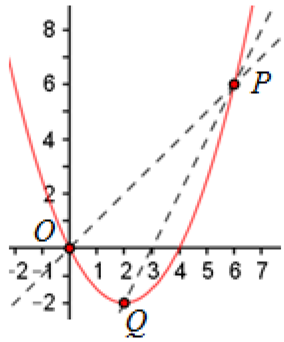
→ Las variaciones bursátiles suelen darse en porcentajes, mediante la expresión $\frac{TVM[a,b]}{f(a)} \cdot 100\ \%$.

4. El gráfico que muestra la evolución de la bolsa en esos cinco días es prácticamente impredecible. (Así, nadie pudo predecir que el lunes siguiente, 24/02/2020, el IBEX 35 perdería 402,7 puntos, el 4,07 %, lo que supuso la mayor caída en 4 años). Por eso, en la bolsa es muy importante la cotización en tiempo real, la variación instantánea.

b) Las tasas de variación media de la función $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$, en los intervalos [0, 6] y [2, 6], son:

$$TVM[0,\ 6]=\frac{f(6)-f(0)}{6-0}=\frac{6-0}{6}=1;$$

$$TVM[2,\ 6]=\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=\frac{6-(-2)}{4}=2.$$



Esos valores coinciden con la pendiente de las rectas que pasan por los puntos *O*, *P* y *Q*, *P*, respectivamente.
Observa que en el punto *O* la curva está decreciendo; en el punto *Q* toma su valor mínimo; y en el punto *P* crece a un fuerte ritmo. De nada de eso nos informa la *TVM*.

<u>La tasa de variación instantánea</u> de una función $f(x)$ en un punto *a* es el límite de la *TVM* en el intervalo [*a*, *b*] cuando $b \to a$, o también en el intervalo $[a,\ a+h]$ con *h* muy pequeño; esto es:

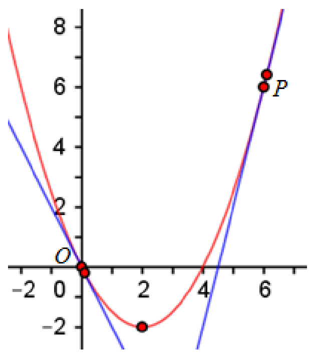
$$TVI(a)=\lim_{b\to a}\left(TVM[a,\ b]\right)=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\text{; o también } TVI(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Esta tasa da el crecimiento (o decrecimiento) en un punto: mide el cambio instantáneo. Un ejemplo cotidiano de *TVI* es la velocidad instantánea de un automóvil, la que indica el cuentakilómetros.

Ejemplos:

a) Para la función $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$, la tasa de variación media en el intervalo [0, *h*] es:

$$TVM[0,\ h]=\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\frac{0,5h^2-2h-0}{h}=0,5h-2.$$



Si *h* = 0,2, $TVM[0,\ 0,2]=0,5·0,2-2=-1,9$;

si *h* = 0,1, $TVM[0,\ 0,1]=0,5·0,1-2=-1,95$.

La tasa de variación instantánea en 0 vale –2:

$$TVI(0)=\lim_{h\to 0}\left(0,5h-2\right)=0,5·0-2=-2.$$

(La recta que pasa por dos puntos muy próximos a *O* tiene pendiente muy próxima a –2).

b) Para la misma función, la tasa de variación media en el intervalo [6, 6 + *h*] es:

$$TVM[6,\ 6+h]=\frac{f(6+h)-f(6)}{6+h-6}=\frac{\left(0,5h^2+4h+6\right)-6}{h}=\frac{0,5h^2+4h}{h}=0,5h+4.$$

Si *h* = 0,2, $TVM[6,\ 6,2]=0,5·0,2+4=4,1$; si *h* = 0,1, $TVM[6,\ 6,1]=0,5·0,1+4=4,05$.

La tasa de variación instantánea en 6 vale 4: $TVI(6)=\lim_{h\to 0}\left(0,5h+4\right)=0,5·0+4=4$.

(La recta que pasa por dos puntos muy próximos a *P* tiene pendiente muy próxima a 4).

Derivada de una función en un punto

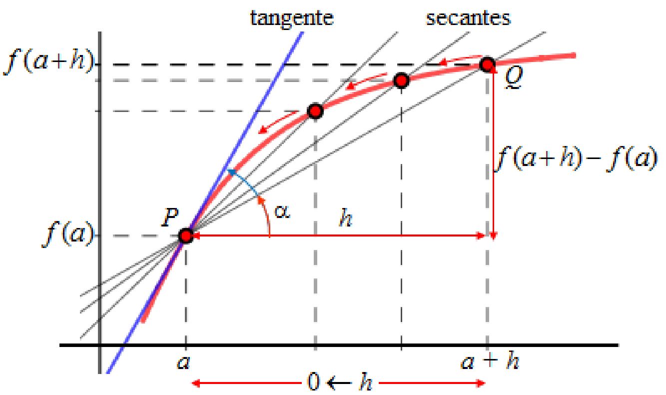
<u>La tasa de variación instantánea</u> de una función $f(x)$ en un punto *a* es la derivada de $f(x)$ en ese punto *a*; se denota por $f'(a)$. Esto es: $TVI(a) = f'(a)$.

Por tanto:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Aunque ya se ha indicado para la *TVI*, con ayuda de la figura adjunta, puede observarse:

1. La $TVM[a,\ a+h] = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ da la pendiente de la recta secante (la que pasa por los puntos *P* y *Q*): $TVM[a,\ a+h] = \tan\alpha$.



2. Al hacer el límite cuando $h \to 0$,

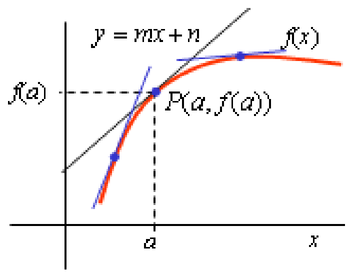
$$\lim_{h\to 0}\left(TVM[a,\ a+h]\right) = f'(a),$$

el punto *Q* se acerca cada vez más a *P*, y la recta secante pasa cada vez por dos puntos más próximos, hasta confundirse con la recta tangente a la curva en el punto *P*.

Luego, $f'(a)$ da la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$.

3. Esta es la <u>interpretación geométrica de la derivada</u>: la derivada en $x = a$, $f'(a)$, es un número que da el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$.

Como la ecuación de una recta es $y = mx + n$, si se sabe que $m = f'(a)$, y que, además, la recta pasa por $P(a, f(a))$, entonces:



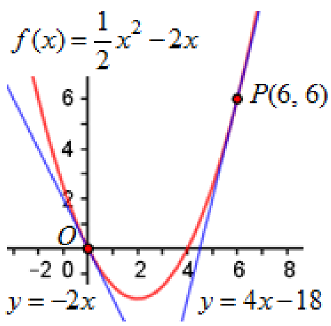
$$y = mx + m \Rightarrow \begin{cases} m = f'(a) \to y = f'(a)\cdot x + n \\ \text{Pasa por } (a, f(a)) \to f(a) = f'(a)\cdot a + n \end{cases}.$$

Despejando *n* en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera se obtiene la expresión

$$y - f(a) = f'(a)\cdot(x - a)$$

Ejemplos:

Para la función $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x$, estudiada anteriormente:



a) Su derivada en $x = 0$ es:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0{,}5h^2 - 2h - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\left(0{,}5h - 2\right) = -2.$$

La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto *O*(0, 0) será:

$$y - f(0) = f'(0)\cdot(x - 0) \Rightarrow y - 0 = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x.$$

b) Su derivada en $x = 6$ es:

$$f'(6) = \lim_{h\to 0} \frac{f(6+h) - f(6)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(0{,}5h^2 + 4h + 6\right) - 6}{h} = \lim_{h\to 0}\left(0{,}5h + 4\right) = 4.$$

La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto *P*(6, 6) es:

$$y - f(6) = f'(6)\cdot(x - 6) \Rightarrow y - 6 = 4(x - 6) \Rightarrow y = 4x - 18.$$

2. Función derivada

En los ejemplos anteriores, para hallar $f´(0)$ y $f´(6)$ ha sido necesario repetir el límite
$f´(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, en un caso para a = 0; en el otro para a = 6.
Este proceso de repetición no es necesario, pues existen fórmulas generales que dan la derivada para las funciones usuales. Esto es lo que proporciona la función derivada.

• La función derivada de $f(x)$ es una nueva función (que se expresa mediante otra fórmula) y que asocia a cada número real su derivada. Se denota por $f´(x)$.
Su definición es la siguiente:

$$f´(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Si $y=f(x)$, se escribe $y´=f´(x)$. [También se escribe $f´(x)=\frac{d\left(f(x)\right)}{dx}$ o $f´(x)=D\left(f(x)\right)$].
(La letra que designa la función es lo de menos, puede emplearse $g(x)$, $F(x)$, ...).

• El cálculo de la función derivada se hace como sigue:
1) Se halla $f(x+h)$ y la diferencia $f(x+h)-f(x)$;
2) Se halla el cociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$;
3) Se resuelve el límite, $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
Los cálculos anteriores, al ser genéricos (deben hacerse en función de x y h), pueden resultar muy complicados a este nivel; por eso se darán directamente, sin demostrarlos, con la salvedad del ejemplo que sigue y algún apunte más en el Problema Propuesto 4.

Ejemplos:
a) La función derivada de $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$ puede obtenerse así:

1) Se calcula $f(x+h)$: $f(x+h)=\frac{1}{2}(x+h)^2-2(x+h)=\frac{1}{2}\left(x^2+2xh+h^2\right)-2x-2h$.
Se halla la diferencia $f(x+h)-f(x)$:

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+2xh+h^2\right)-2x-2h-\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right) = \frac{1}{2}h^2+xh-2h.$$

2) Se forma el cociente:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{2}h^2+xh-2h}{h}=\frac{\left(\frac{1}{2}h+x-2\right)h}{h}=\left(\frac{1}{2}h+x-2\right).$$

3) Se resuelve el límite:

$$f´(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{2}h+x-2\right)=\frac{1}{2}\cdot 0+x-2=x-2.$$

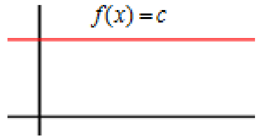
Por tanto, la función derivada de $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$ es $f´(x)=x-2$.
Si ahora se desea hallar la derivada en cualquier punto, basta con sustituir en $f´(x)=x-2$.
Así:

$$f´(0)=0-2=-2;\ f´(1)=1-2=-1;\ f´(2)=2-2=0;\ f´(4)=4-2=2;\ f´(6)=6-2=4.$$

Derivada de un polinomio

Los polinomios son las funciones que se presentan con más frecuencia. La derivada de un polinomio es la suma o resta de las derivadas de cada uno de sus términos. Teniendo en cuenta que:

1. La derivada de un número es 0



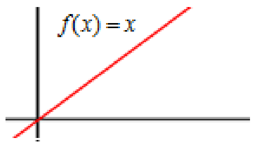
Si $f(x)=c \Rightarrow f'(x)=0$.

Recuerda que la derivada mide la tasa de cambio de una función: una constante no varía; su tasa de cambio es 0.

→ Geométricamente: la tasa de variación (la pendiente) de la recta $y = c$ es 0.

Por ejemplo: si $f(x)=5 \Rightarrow f'(x)=0$; si $g(x)=-2/3 \Rightarrow g'(x)=0$.

2. La derivada de $y = x$ vale 1



Si $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$.

La tasa de variación de $f(x)=x$ es la pendiente de esa recta, que vale 1.

→ De manera análoga, como la pendiente de la recta $y=mx$ vale m, la derivada de $f(x)=mx$ será $f'(x)=m$.

Por ejemplo: si $f(x)=4x \Rightarrow f'(x)=4$; si $h(x)=-0,5x \Rightarrow h'(x)=-0,5$.

3. La derivada de $y = x^2$ es $y' = 2x$

Si $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$.

En este caso, el proceso es:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x.$$

4. La derivada de $y = x^n$ es $y' = nx^{n-1}$

Si $f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$.

- Esta regla es válida para cualquier valor de n, positivo, negativo o fraccionario.

Además, si la potencia se multiplica por un número: $f(x)=k\cdot x^n \Rightarrow f'(x)=k\cdot\left(x^n\right)'=k\cdot nx^{n-1}$.

Ejemplos:

a) Si $f(x)=x^4 \Rightarrow f'(x)=4x^3$.

b) Si $f(x)=7x^4 \Rightarrow f'(x)=7\cdot\left(4x^3\right)=28x^3$.

c) Si $y=\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow y'=\frac{1}{2}\cdot 2x=x$.

d) Si $y=-3x^5 \Rightarrow y'=-3\cdot\left(5x^4\right)=-15x^4$.

5. Derivada de un polinomio

Si $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0 \Rightarrow$

$$f'(x)=a_n\left(x^n\right)'+a_{n-1}\left(x^{n-1}\right)'+...+a_2\left(x^2\right)'+a_1\left(x\right)'+0 \Rightarrow \text{(la derivada de } a_0 \text{ es 0)} \to$$

$$f'(x)=a_n\cdot nx^{n-1}+a_{n-1}\cdot(n-1)x^{n-2}+...+a_2\cdot 2x+a_1.$$

Ejemplos:

a) $f(x)=7x^4-5x^3+x^2-6x+2 \Rightarrow f'(x)=7\cdot 4x^3-5\cdot 3x^2+2x-6 \Rightarrow f'(x)=28x^3-15x^2+2x-6$.

b) Si $y=\frac{x^3}{2}-\frac{4x^2}{5}-7x+\frac{3}{5} \Rightarrow y=\frac{1}{2}x^3-\frac{4}{5}x^2-7x+\frac{3}{5} \Rightarrow y'=\frac{1}{2}\left(3x^2\right)-\frac{4}{5}\left(2x\right)-7=\frac{3x^2}{2}-\frac{8x}{5}-7$.

Fórmula de la derivada de otras funciones

1. Función raíz cuadrada

La derivada de la función $f(x)=\sqrt{x}$ es $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Esta fórmula puede deducirse teniendo en cuenta que $f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$ y derivando esta expresión como una potencia $\left(f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}\right)$. Así:

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{1/2-1}=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{1/2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

→ La misma técnica puede aplicarse para la raíz de cualquier índice. Así, para $f(x)=\sqrt[3]{x}$, puede seguirse el proceso:

$$f(x)=\sqrt[3]{x} \to f(x)=x^{1/3} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^{1/3-1}=\frac{1}{3}x^{-2/3} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^{2/3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}.$$

2. Función exponencial

- Exponencial de base *a*: la derivada de $f(x)=a^x$ es $f'(x)=a^x\ln a$.
- Exponencial de base *e*: la derivada de $f(x)=e^x$ es $f'(x)=e^x$.

3. Función logarítmica

- Logaritmo en base *a*: la derivada de $f(x)=\log_a x$ es $f'(x)=\dfrac{1}{x}\log_a e$.
- Logaritmo en base *e*: la derivada de $f(x)=\ln x$ es $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

4. Funciones seno y coseno

- Función seno: la derivada de $f(x)=\sin x$ es $f'(x)=\cos x$.
- Función coseno: la derivada de $f(x)=\cos x$ es $f'(x)=-\sin x$.

3. Reglas de derivación para las operaciones con funciones

Al derivar un polinomio se han utilizado dos de las propiedades fundamentales. A saber:

1) $f(x)=k\cdot x^n \Rightarrow f'(x)=k\cdot\left(x^n\right)'=k\cdot nx^{n-1}$.

2) $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots \Rightarrow f'(x)=a_n\left(x^n\right)'+a_{n-1}\left(x^{n-1}\right)'+\ldots$.

Estas propiedades, que valen para cualquier tipo de funciones, se formulan como sigue.

1. Derivada de una constante por una función

$$F(x)=k\cdot f(x) \to \left(F(x)\right)'=\left(k\cdot f(x)\right)'=k\cdot f'(x)$$

Ejemplos:

a) Si $y=2\cdot 3^x \Rightarrow y'=2\cdot\left(3^x\right)' \Rightarrow y'=2\cdot 3^x\cdot\log_3 2$. b) Si $y=5\cdot e^x \Rightarrow y'=5\cdot e^x$.

c) Si $y=2\sin x \Rightarrow y'=2\cdot(\sin x)'=2\cdot\cos x$. d) Si $y=-2\ln x \Rightarrow y'=-2\cdot(\ln x)'=-2\cdot\dfrac{1}{x}=-\dfrac{2}{x}$.

2. Derivada de una suma o diferencia de funciones

$$F(x)=f(x)\pm g(x) \to \left(F(x)\right)'=\left(f(x)\pm g(x)\right)'=f'(x)\pm g'(x)$$

Ejemplo:

Si $y=-3x^2+4\sin x-\frac{1}{2}\cos x \Rightarrow y'=-3\left(x^2\right)'+4\left(\sin x\right)'-\frac{1}{2}\left(\cos x\right)' \Rightarrow$

$$y'=-3\left(2x\right)+4\left(\cos x\right)-\frac{1}{2}\left(-\sin x\right) \Rightarrow y'=-6x+4\cos x+\frac{1}{2}\sin x.$$

3. Derivada de un producto de funciones

$$F(x)=\left(f\cdot g\right)(x)=f(x)\cdot g(x) \to \left(F(x)\right)'=\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Ejemplos:

a) Si $f(x)=2x^2-3x$ y $g(x)=3x^4+2x-7$, la derivada de su producto, $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'$, puede hacerse de dos formas:

1) Aplicando la fórmula:

$$\left(\left(2x^2-3x\right)\cdot\left(3x^4+2x-7\right)\right)'=\left(\left(2x^2-3x\right)'\right)\cdot\left(3x^4+2x-7\right)+\left(2x^2-3x\right)\cdot\left(\left(3x^4+2x-7\right)'\right) \Rightarrow$$

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=\left(4x-3\right)\cdot\left(3x^4+2x-7\right)+\left(2x^2-3x\right)\cdot\left(12x^3+2\right)=$$

$$=\left(12x^5-9x^4+8x^2-6x-28x+21\right)+\left(24x^5-36x^4+4x^2-6x\right)=36x^5-45x^4+12x^2-40x+21.$$

2) Multiplicando antes las funciones y derivando después:

$$f(x)\cdot g(x)=\left(2x^2-3x\right)\cdot\left(3x^4+2x-7\right)=6x^6-9x^5+4x^3-20x^2+21x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(f(x)\cdot g(x)\right)'=6\cdot\left(6x^5\right)-9\left(5x^4\right)+4\left(3x^2\right)-20\left(2x\right)+21=36x^5-45x^4+12x^2-40x+21.$$

Naturalmente, el resultado es el mismo.

b) La derivada de $f(x)=\left(3x\right)\cdot\cos x$ es:

$$f'(x)=\left(\left(3x\right)\cdot\cos x\right)'=\left(3x\right)'\cdot\cos x+\left(3x\right)\cdot\left(\cos x\right)'=3\cdot\cos x+\left(3x\right)\cdot\left(-\sin x\right)=3\cos x-3x\sin x.$$

4. Derivada de un cociente de funciones

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \to \left(F(x)\right)'=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

Ejemplo:

Si $y=\frac{3x^2-2x}{4x-5} \Rightarrow y'=\frac{\left(3x^2-2x\right)'\cdot\left(4x-5\right)-\left(3x^2-2x\right)\cdot\left(4x-5\right)'}{\left(4x-5\right)^2} \Rightarrow$

$$y'=\frac{\left(6x-2\right)\cdot\left(4x-5\right)-\left(3x^2-2x\right)\cdot 4}{\left(4x-5\right)^2} \Rightarrow y'=\frac{\left(24x^2-8x-30x+10\right)-\left(12x^2-8x\right)}{\left(4x-5\right)^2} \Rightarrow$$

$y'=\frac{12x^2-30x+10}{\left(4x-5\right)^2}$. (El denominador no suele operarse: ya está simplificado).

5. Derivada de la opuesta de una función

$$F(x)=\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)} \to \left(F(x)\right)'=\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{-f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}.$$

Es un caso particular de cociente:

$$\left(F(x)\right)'=\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{(1)'\cdot f(x)-(1)\cdot f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}=\frac{0\cdot f(x)-f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}=\frac{-f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}.$$

Ejemplo:

Para la función $f(x)=4x^2-5x+1$ se tendrá:

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\left(\frac{1}{4x^2-5x+1}\right)'=\frac{-\left(4x^2-5x+1\right)'}{\left(4x^2-5x+1\right)^2}=\frac{-(8x-5)}{\left(4x^2-5x+1\right)^2}=\frac{-8x+5}{\left(4x^2-5x+1\right)^2}.$$

Evidentemente, esta función también se podría derivar como un cociente. Así:

$$F(x)=\frac{1}{4x^2-5x+1} \Rightarrow F'(x)=\frac{0\cdot\left(4x^2-5x+1\right)-1\cdot(8x-5)}{\left(4x^2-5x+1\right)^2}=\frac{-(8x-5)}{\left(4x^2-5x+1\right)^2}.$$

Derivada de la función compuesta (regla de la cadena)

Esta propiedad es fundamental, pues se utiliza cuando la función *f* no se aplica solo a *x* sino a otra función *g*(*x*).

$$F(x)=f(g(x)) \to \left(F(x)\right)'=\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

→ Aplicada a las funciones estudiadas aquí se tendrá:

1. Para potencias y raíces

- Potencia de una función: la derivada de $y=\left(f(x)\right)^n$ es $y'=n\left(f(x)\right)^{n-1}\cdot f'(x)$, para todo *n*.
- Raíz de una función: la derivada de $y=\sqrt{f(x)}$ es $y'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

Ejemplos:

a) Si $F(x)=\left(2x^4-5x^2+3\right)^3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow F'(x)=3\left(2x^4-5x^2+3\right)^{3-1}\cdot\left(2x^4-5x^2+3\right)'=3\left(2x^4-5x^2+3\right)^2\cdot\left(8x^3-10x\right).$$

b) Si $F(x)=\sqrt{5x^3-x^2+1} \Rightarrow F'(x)=\frac{\left(5x^3-x^2+1\right)'}{2\sqrt{5x^3-x^2+1}}=\frac{15x^2-2x}{2\sqrt{5x^3-x^2+1}}$.

c) Si $F(x)=\left(e^x\right)^3 \Rightarrow F'(x)=3\left(e^x\right)^{3-1}\left(e^x\right)'=3\left(e^x\right)^2\cdot e^x$. (Operando: $F'(x)=3\left(e^{2x}\right)\cdot e^x=3\cdot e^{3x}$).

d) Si $F(x)=(\log x)^2 \Rightarrow F'(x)=2(\log x)^{2-1}\cdot(\log x)'=2(\log x)\cdot\frac{1}{x}\log e$.

e) Si $F(x)=(\sin x)^4 \Rightarrow F'(x)=4(\sin x)^{4-1}\cdot(\sin x)'=4(\sin x)^3\cdot(\cos x)$.

2. Para funciones exponenciales

- Exponencial de base a: $F(x)=a^{f(x)}$, $a>0$ $\Rightarrow$ $F'(x)=f'(x)\cdot a^{f(x)}\ln a$.
- Exponencial de base e: $F(x)=e^{f(x)}$ $\Rightarrow$ $F'(x)=f'(x)\cdot e^{f(x)}$.

Ejemplos:

a) Si $y=10^{2x+5} \Rightarrow y'=(2x+5)'\cdot 10^{2x+5}\cdot\ln 10 \Rightarrow y'=2\cdot 10^{2x+5}\cdot\ln 10$.

b) Si $y=e^{3x} \Rightarrow y'=(3x)'\cdot e^{3x}=3e^{3x}$. c) $y=e^{x^2-x} \Rightarrow y'=(x^2-x)'\cdot e^{x^2-x}=(2x-1)e^{x^2-x}$.

3. Para funciones logarítmicas

- Logaritmo en base a: $F(x)=\log_a(f(x)) \Rightarrow F'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\log_a e$.
- Logaritmo neperiano: $F(x)=\ln(f(x)) \Rightarrow F'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Ejemplos:

a) $y=\log(7x+2) \Rightarrow y'=\dfrac{7}{7x+2}\log e$. b) $y=\log(3x^2-5x) \Rightarrow y'=\dfrac{6x-5}{3x^2-5x}\log e$.

c) $y=\ln(5x^3) \Rightarrow y'=\dfrac{(5x^3)'}{5x^3}=\dfrac{15x^2}{5x^3}=\dfrac{3}{x}$. d) $y=\ln(3x^3-4x^2-5) \Rightarrow y'=\dfrac{9x^2-8x}{3x^3-4x^2-5}$.

4. Para funciones trigonométricas

- Función seno: $F(x)=\sin(f(x)) \Rightarrow F'(x)=f'(x)\cdot\cos(f(x))$.
- Función coseno: $F(x)=\cos(f(x)) \Rightarrow F'(x)=-f'(x)\cdot\sin(f(x))$.

Ejemplos:

a) $f(x)=\sin(4x^2-x) \Rightarrow f'(x)=(4x^2-x)'\cdot\cos(4x^2-x)=(8x-1)\cdot\cos(4x^2-x)$.

b) $f(x)=\cos(2x) \Rightarrow f'(x)=-(2x)'\cdot\sin(2x)=-2\cdot\sin(2x) \to$ No confundir con:

c) $f(x)=2\cos x \Rightarrow f'(x)=2(\cos x)'=2\cdot(-\sin x)=-2\sin x$.

- La función tangente se utiliza poco en Ciencias Sociales. No obstante, su derivada puede obtenerse teniendo en cuenta que $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$; por tanto, derivando como un cociente:

$$f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f'(x)=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^2}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

Recuerda: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$; $\sin^2 x=(\sin x)^2$ y $\cos^2 x=(\cos x)^2$.

Para la función compuesta: $F(x)=\tan(f(x)) \Rightarrow F'(x)=\dfrac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}=f'(x)\cdot(1+\tan^2(f(x)))$.

Ejemplos:

a) $y=3\tan x \Rightarrow y'=3(1+\tan^2 x)=\dfrac{3}{\cos^2 x}$. b) $y=\tan(7x) \Rightarrow y'=7\cdot(1+\tan^2(7x))$.

4. Tabla de la derivada de las funciones usuales

Resumiendo todo lo anterior puede formarse la siguiente tabla. En ella: *c*, *n*, *a* y *e* son números; *x* designa la variable independiente e *y* o *f* representan funciones de *x*.

TABLA DE FUNCIONES DERIVADAS			
Función simple	**Derivada**	**Función compuesta**	**Derivada**
$y=c$	$y'=0$		
$y=x$	$y'=1$		
$y=x^n,\ \forall\ n\in\mathbf{R}$	$y'=nx^{n-1}$	$y=(f(x))^n,\ \forall\ n$	$y'=n(f(x))^{n-1}\ f'(x)$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y=\sqrt{f(x)}$	$y'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y=a^x,\ a>0$	$y'=a^x\ln a$	$y=a^{f(x)},\ a>0$	$y'=f'(x)\cdot a^{f(x)}\ln a$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$y=e^{f(x)}$	$y'=f'(x)\cdot e^{f(x)}$
$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x}\log_a e$	$y=\log_a f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}\log_a e$
$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$	$y=\ln f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$	$y=\sin f(x)$	$y'=f'(x)\cdot\cos f(x)$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$	$y=\cos f(x)$	$y'=-f'(x)\cdot\sin f(x)$
$y=\tan x$	$y'=1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y=\tan f(x)$	$y'=f'(x)\left(1+\tan^2 f(x)\right)$

Ejemplos:
Haz la derivada de las siguientes funciones. (Procura hacerlos por tu cuenta).

1. $y=\dfrac{5}{3}\left(x^3+3x^2-3x\right)\ \Rightarrow\ y'=\dfrac{5}{3}\left(3x^2+6x-3\right)=5x^2+10x-5$.

2. $y=5\left(6x^2-4x+2\right)^3\ \Rightarrow\ y'=5\cdot3\left(6x^2-4x+2\right)^2\cdot(12x-4)=15\left(6x^2-4x+2\right)^2\cdot(12x-4)$.

3. $y=\dfrac{2x-3}{5x}\ \Rightarrow\ y'=\dfrac{2\cdot5x-(2x-3)\cdot5}{(5x)^2}=\dfrac{15}{25x^2}=\dfrac{3}{5x^2}$. Derivada segunda: $y''=\dfrac{-3\cdot10x}{\left(5x^2\right)^2}=\dfrac{-6}{5x^3}$.

4. $f(x)=x\sqrt{x^2-3}\ \Rightarrow\ f'(x)=\sqrt{x^2-3}+x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}=\sqrt{x^2-3}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-3}}=\dfrac{2x^2-3}{\sqrt{x^2-3}}$.

5. $f(x)=3^{5x-3x^2}\ \Rightarrow\ f(x)=(5-6x)3^{5x-3x^2}\cdot\ln3$.

6. $f(x)=x^2e^{-x}\ \Rightarrow\ f'(x)=\left(x^2\right)'\cdot e^{-x}+x^2\cdot\left(e^{-x}\right)'\ \Rightarrow\ f'(x)=2xe^{-x}+x^2\cdot\left(-e^{-x}\right)=\left(2x-x^2\right)e^{-x}$.

7. $y=\log(3x+4)^2\ \Rightarrow\ y=2\log(3x+4)\ \Rightarrow\ y'=2\cdot\dfrac{3}{3x+4}\log e=\dfrac{6}{3x+4}\log e$.

8. $y=\dfrac{1}{x}-\ln(x+3)\ \Rightarrow\ y'=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x+3}$.

9. $y=\sin\left(x^3\right)\ \Rightarrow\ y=\left(\cos\left(x^3\right)\right)\left(x^3\right)'=3x^2\cdot\cos\left(x^3\right)$.

10. $f(x)=\ln(\cos x)\ \Rightarrow\ f'(x)=\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$.

Puedes utilizar **GeoGebra** para comprobar tus resultados.
Se teclea “Derivada(Función)”.
Así, para ej. 6:

$f(x)\ =\ \text{Derivada}\left(x^2\ e^{-x}\right)$
$\rightarrow\ 2\ x\ e^{-x}-x^2\ e^{-x}$

5. Aplicaciones de la derivada

La derivada de una función en un punto da la variación instantánea de esa función, la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. Esto permite estudiar el crecimiento y el decrecimiento de una función; lo que facilitará el trazado de su gráfica.

→ Hay que advertir que estas aplicaciones necesitan que las funciones sean derivables en los puntos de estudio. ¿Pero, en qué puntos una función es derivable?; ¿en qué puntos no es derivable?

- Lo que se dijo para la continuidad sigue siendo válido para la derivabilidad, pues se cumple que:

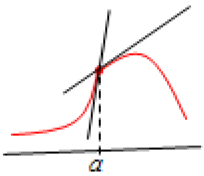
1) Las funciones usuales (polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas) son (continuas y) derivables en todos los puntos de su dominio.
2) Las funciones definidas a trozos serán (continuas y) derivables si cada función lo es en su intervalo de definición, y si lo son en los puntos de unión de los intervalos; para esto último es necesario que coincidan las derivadas laterales.

Luego, ¿continuidad y derivabilidad es lo mismo? No, como se aclara a continuación.

<u>Relación entre continuidad y derivabilidad</u>
Para que una función sea derivable en un punto $x = a$ son precisas dos condiciones:
1) Que la función sea continua en dicho punto.
2) Que las derivadas laterales existan y coincidan en ese punto.

<u>Las derivadas laterales</u> son:
Por la <u>izquierda</u>: $f'(a^-) = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Por la <u>derecha</u>: $f'(a^+) = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

La derivada, $f'(a)$, existe cuando $f'(a^-) = f'(a^+)$.



- Geométricamente significa que la tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$ es la misma tanto si se traza por la izquierda como por la derecha.

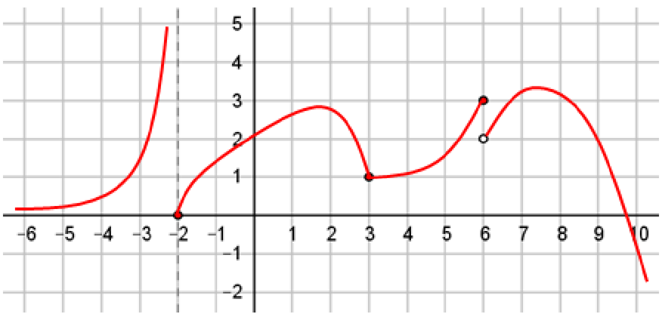
→ Las derivadas laterales no coinciden en los *picos* de las funciones. Por tanto, en esos puntos no existe la derivada.

→ Esta condición es particularmente importante en las <u>funciones definidas a trozos</u>. Para esas funciones resulta obligado comprobar que las derivadas laterales en los puntos de unión de los distintos trozos valen lo mismo. (Ver los Problemas Propuestos 26 y 27).

- Respecto a la continuidad y derivabilidad hay que saber: si una fusión es derivable, entonces es continua; pero que sea continua no es garantía de que sea derivable.

Esto es:
"Si $f(x)$ es derivable en $x = a \Rightarrow f(x)$ es continua en $x = a$".
"Si $f(x)$ es continua en $x = a \not\Rightarrow f(x)$ es derivable en $x = a$".
"Si $f(x)$ no es continua en $x = a \Rightarrow f(x)$ no es derivable en $x = a$".

Ejemplo:
La función representada a la derecha es derivable en todos sus puntos, menos en:
$x = -2$, por no ser continua;
$x = 3$, por tener un pico;
$x = 6$, por no ser continua.



→ La continuidad es una condición necesaria, pero no suficiente, de derivabilidad.
→ La derivabilidad indica que la función evoluciona suavemente, sin saltos ni cambios bruscos de dirección.

Crecimiento y decrecimiento de una función

El signo de la derivada de una función permite conocer los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la curva asociada a ella. Además, en muchos casos posibilita la determinación de sus máximos y mínimos relativos.

<u>Crecimiento</u>

- Si la derivada es positiva, la recta tangente es creciente y creciente será la función.

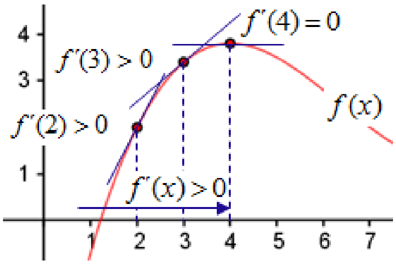
Recuerda que:

$f(x)$ es <u>creciente</u> en un punto $x = a$ si

$f(a-h) \le f(a) \le f(a+h)$, para $h > 0$ y pequeño.

Se cumple:

Si $f´(a) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en $x = a$.



La función representada a la derecha es creciente en los puntos $x = 2$ y $x = 3$: las rectas tangentes tienen pendiente positiva.
Es creciente para los puntos $x < 4$.
En $x = 4$ la derivada es 0, $f´(4) = 0$: en ese punto la función tiene un máximo.

<u>Decrecimiento</u>

- Si la derivada es negativa, la recta tangente es decreciente y decreciente será la función.

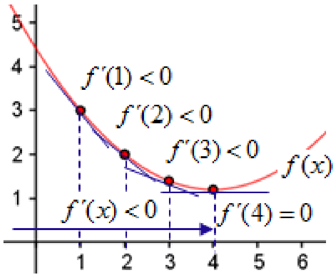
Recuerda que:

$f(x)$ es <u>decreciente</u> en un punto $x = a$ si

$f(a-h) \ge f(a) \ge f(a+h)$, para $h > 0$ y pequeño.

Se cumple:

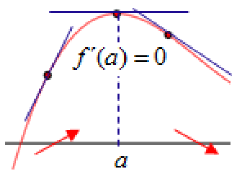
Si $f´(a) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $x = a$.



La función representada a la derecha es decreciente en los puntos $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$: las rectas tangentes tienen pendiente negativa.
Es decreciente para los puntos $x < 4$.
En $x = 4$ la derivada es 0, $f´(4) = 0$: en ese punto la función tiene un mínimo.

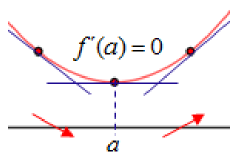
<u>Máximos y mínimos</u>

Para que en el punto $x = a$ se dé un máximo o un mínimo es necesario que $f´(a) = 0$. En ambos casos la recta tangente a la curva es horizontal: su pendiente vale 0



- El punto a es un <u>máximo relativo</u> cuando la función es creciente a su izquierda y decreciente a su derecha. Por tanto:

En $x = a$ hay un máximo si: $f´(a^-) > 0$, $f´(a) = 0$, $f´(a^+) < 0$.



- El punto a es un <u>mínimo relativo</u> cuando la función es decreciente a su izquierda y creciente a su derecha. Por tanto:

En $x = a$ hay un mínimo si: $f´(a^-) < 0$, $f´(a) = 0$, $f´(a^+) > 0$.

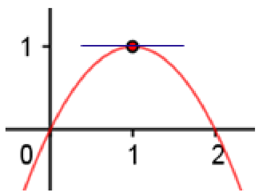
Ejemplo:

Si $f(x) = -x^2 + 2x \Rightarrow f´(x) = -2x + 2 \rightarrow f´(x) = 0$ si $x = 1$.

Si $x < 1$, $f´(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$.

Si $x > 1$, $f´(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$.

Por tanto, en el punto $x = 1$ la función tendrá un máximo.



Representación gráfica de una función con ayuda de la derivada primera

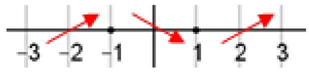
Dada la función $y = f(x)$, para dibujarla es útil el siguiente proceso:

1) Determinar su dominio: excluir los puntos en los que $f(x)$ no esté definida
2) Hallar la derivada $f'(x)$.
3) Calcular las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$ (puntos singulares).
4) Marcar sobre el eje *OX* los puntos singulares y aquellos en los que la función no esté definida. Esos puntos dividen al eje *OX* en varios intervalos.
5) Estudiar el signo de la derivada en cada intervalo anterior: deducir si la función es creciente o decreciente. (Basta con probar un punto de cada intervalo y ver si $f'(x)$ es positiva o negativa).
6) Deducir (de lo anterior) dónde se dan los máximos y los mínimos, si es el caso.
7) Trazar la gráfica ajustándose a la información obtenida y dando algunos de sus puntos, entre ellos los correspondientes a los puntos singulares y a los cortes con los ejes de coordenadas.

Ejemplos:

a) Proceso para trazar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x + 1$.

1) Está definida siempre: Dom (*f*) = **R**.



2) y 3) se deriva e iguala a 0: $f'(x) = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1; x = 1$.

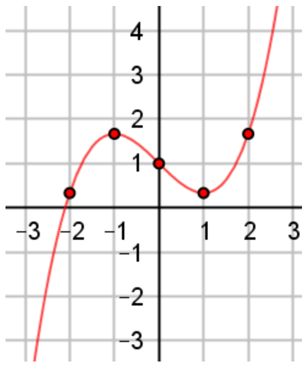
4), 5) y 6) Se marcan los puntos $x = -1$ y $x = 1$ en la recta, y se observa que:

- Si $x < -1$, (por ejemplo, $x = -2$), $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $-1 < x < 1$, (por ejemplo, $x = 0$), $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente.

Por consiguiente, en $x = -1$ hay máximo.

- Si $x > 1$, (por ejemplo, $x = 3$), $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente; además, en $x = 1$ hay mínimo.

7) Dando algunos valores se obtiene la gráfica adjunta.
Puntos: (–2, 1/3); (–1, 5/3), máx; (0, 1); (1, 1/3), mín; (2, 5/3).



b) Esbozo de la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, determinando su dominio y asíntotas, y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

→ La función está definida en todo **R**. Tiene una asíntota horizontal, pues $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{+\infty} = 0^+$.

La asíntota es la recta $y = 0$, el eje *OX*; la curva va por encima del eje (siempre es positiva).

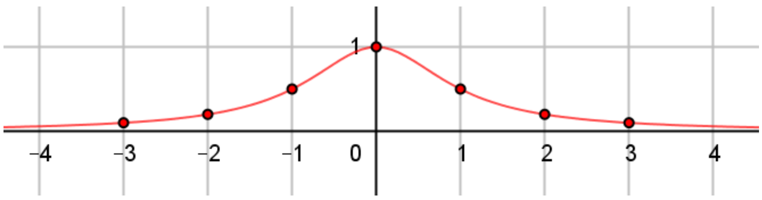
→ Para determinar el crecimiento y decrecimiento hay que estudiar el signo de su derivada.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2} \to f'(x) = 0 \text{ en } x = 0.$$

Luego:

- Si $x < 0$, (por ejemplo, $x = -1$), $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.
- Si $x > 0$, (por ejemplo, $x = 2$), $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente; además, en $x = 0$ hay máximo.

→ Algunos puntos: (–3, 0,1); (–2, 0,2); (–1, 0,5); (0, 1), máx; (1, 0,5); (2, 0,2); (3, 0,1).



PROBLEMAS PROPUESTOS

1. La valoración (en euros) de las acciones en bolsa (IBEX 35) de Iberdrola en la semana del 24 al 28 de marzo de 2020 se indican en la tabla:

Fecha	24/02/2020	25/02/2020	26/02/2020	27/02/2020	28/02/2020
Apertura	11,180	10,930	10,660	11,205	10,770
Cierre	10,930 ↓	10,660 ↓	11,205 ↑	10,770 ↓	10,320 ↓

Fuente: www.expansion.com

a) Haz un esquema gráfico de la variación diaria en el periodo considerado.
b) Halla la tasa de variación diaria (en porcentajes) y la variación media en esa semana.

2. Halla la tasa de variación media de la función $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$ en los intervalos [−1, 0], [−1, 1] y [0, 3].
Utilizando la derivada, halla la tasa de variación instantánea de esa función en los puntos −1, 1 y 3.

3. Comprueba que la tasa de variación media de la función $f(x)=2x-3$ en los intervalos [−1, 0], [−1, 1] y [0, 3] siempre vale 2. ¿Es una coincidencia dicho resultado? Justifica tu respuesta.

4. Dada la función $f(x)=-x^2+4x$, se pide:
a) Utilizando la definición de derivada de una función en un punto, calcula el valor de $f´(3)$.
b) Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$.

5. Para la función $f(x)=x^2+2x$, se pide:
a) Su derivada y el valor de $f´(-2)$, $f´(-1)$ y $f´(0)$.
b) La ecuación de la recta tangente en cada uno de los puntos de abscisa −2, −1, 0.
c) Explica gráficamente el resultado de $f´(-1)$.

6. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función:
a) $f(x)=-x^2+4x$ en el punto $x = 1$.
b) $f(x)=x^2-x$ en el punto $x = 2$.
Representa gráficamente la curva y la recta tangente.

7. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=\frac{4}{x}$ en el punto de abscisa $x = 2$.

8. Halla la derivada de las siguientes funciones:
a) $f(x)=x^5-4x^3+6x-2$; b) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+7x^2-4x+5$; c) $f(x)=\frac{2}{5}x^5-4x^2+7$;

9. Para la función $h(x)=\left(x^2-3x\right)^2\cdot\left(2x-3\right)$ halla su derivada:
1.º Aplicando la fórmula de la derivada de un producto.
2.º Multiplicando la expresión y derivando después.
En los dos casos expresa el resultado como un polinomio ordenado.

10. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $g(x)=\left(4x^2-3x\right)\cdot\left(7x-2\right)$; b) $g(x)=\left(3x^2-2x\right)^3$; c) $g(x)=4x\cdot\left(7x-2\right)^2$.

11. Halla la derivada de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$; b) $f(x)=\dfrac{1-3x}{x-2}$; c) $f(x)=\dfrac{2x-4}{3x-2}$; d) $f(x)=\dfrac{-4}{x}$.

e) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{2x+3}$; f) $f(x)=\dfrac{4x+2}{5x^2-3x}$; g) $f(x)=\dfrac{4x^3}{5x^2-4x}$; h) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-3}$.

12. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=3\sqrt{x}$; b) $f(x)=\sqrt{5x-3}$; c) $f(x)=\sqrt{x^2+5x}$; d) $f(x)=x\cdot\sqrt{x}$.

13. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=3^{2x}$; b) $f(x)=e^{5x}$; c) $f(x)=e^{-3x^2+2x}$; d) $f(x)=x\cdot e^x$.

14. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\log\left(2x\right)$; b) $f(x)=\log\left(x^3\right)$; c) $f(x)=\ln\left(5x^2+1\right)$; d) $f(x)=x\cdot\ln x$.

15. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sin\left(3-2x\right)$; b) $f(x)=\sin\left(x^3\right)$; c) $f(x)=\left(\sin x\right)^3$; d) $f(x)=3x\cdot\left(\sin x\right)$;

e) $f(x)=\cos\left(3-2x\right)$; f) $f(x)=\cos^2 x$; g) $f(x)=\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$; h) $f(x)=\dfrac{\cos x}{2}$.

16. Para cada una de las siguientes funciones halla su derivada y, después, da respuesta a la pregunta que se hace:

a) $f(x)=x^3-\dfrac{1}{2}x^2-2x+3$. Da un punto en el que la derivada valga 2.

b) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+4}$. ¿En qué puntos la derivada vale 0?

c) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+5}$. ¿Para qué valores de x la derivada es negativa?

d) $f(x)=xe^{x^2-1}$. ¿Decrece en algún punto?

17. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=0{,}5x^2-3x+2$. Comprueba que tiene un mínimo en el vértice de la parábola. Haz un esbozo de su gráfica.

18. Aplicando derivadas comprueba que el vértice de la parábola $y=ax^2+bx+c$ se da en el punto de abscisa $x=-b/2a$.

19. Aplicando derivadas calcula los vértices de las parábolas:

a) $y=-x^2+4$; b) $y=\dfrac{1}{2}x^2-3x$; c) $y=-2x^2+5x+3$; d) $y=-\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{2}{3}x+1$.

20. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función $f(x)=2x^3-6x$.

21. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=x^3+3x$. ¿Tiene la función algún máximo o mínimo? ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $x^3+3x=0$?

22. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función $f(x)=3x^2-2x^3$. Da algunos de sus puntos, entre ellos los de corte de la gráfica con los ejes y haz un esbozo de su gráfica.

23. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$.

24. Haz un esbozo de la función $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$, determinando sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus asíntotas.

25. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$. ¿Tiene máximos o mínimos?

26. Comprueba si las siguientes funciones son derivables en los puntos *x* = 0, *x* = 1 y *x* = 2. Si no lo son, indica el motivo. A partir de la función derivada, halla, si existe, el valor de la derivada en los puntos de abscisa *x* = –1, 0, 1, 2 y 3.

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{si } x\le 0 \\ x & \text{si } x>0 \end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases} -x+2 & \text{si } x<1 \\ x^2 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x\le 2 \\ x-1 & \text{si } x>2 \end{cases}$.

Haz la representación gráfica de cada función y confirma el resultado.

27. Halla el valor que debe tomar *a* para que sea continua la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x<1 \\ 3x-a & x\ge 1 \end{cases}$.

Justifica tu resultado haciendo una representación gráfica de *f*(*x*).
¿La función obtenida será derivable en *x* = 1?