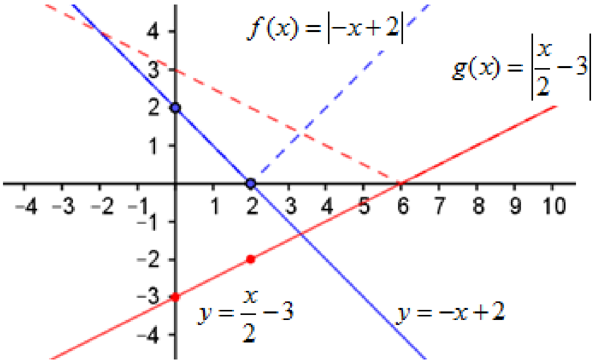
SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Representa gráficamente las rectas de ecuación $y=-x+2$ e $y=\frac{x}{2}-3$.

A partir de ellas haz las gráficas de $f(x)=\left|-x+2\right|$ y $g(x)=\left|\frac{x}{2}-3\right|$.

Solución:
Una recta se representa dando dos de sus puntos.

- $y=-x+2$: puntos (0, 2) y (2, 0).
- $y=\frac{x}{2}-3$: puntos (0, –3) y (2, –2).



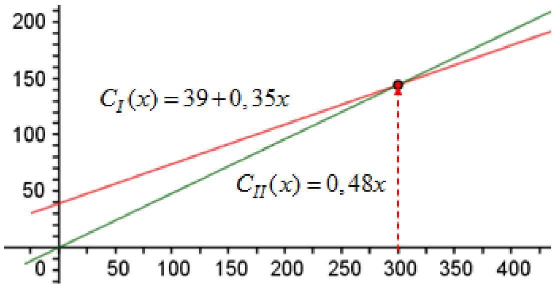
El valor absoluto convierte los valores negativos en positivos. Gráficamente hace la simetría de la semirrecta negativa respecto del eje *OX* ("voltea" la parte negativa hacia arriba).

2. Una empresa de alquiler de coches ofrece dos tipos de contrato:
(I) Pago de una cantidad fija de 39 € y un coste adicional de 0,35 € por km recorrido.
(II) 0,48 € por km recorrido.
a) Si la persona que alquila el coche estima que va a recorrer unos 250 km, ¿qué tipo de contrato le interesa? ¿Y si espera recorrer unos 500 km?
b) ¿Cuál es el número mínimo de km que hay que recorrer para que el contrato (I) sea el más barato? Justifica tu respuesta.

Solución:
a) Para 250 km:
Con el contrato de tipo (I): 39 + 0,35 · 250 = 126,5 €.
Con el contrato de tipo (II): 0,48 · 250 = 120 € → mejor.
Para 500 km:
Con el contrato de tipo (I): 39 + 0,35 · 500 = 214 € → mejor.
Con el contrato de tipo (II): 0,48 · 500 = 240 €.

b) Para *x* km:
Con el contrato de tipo (I): $C_I(x)=39+0,35x$.
Con el contrato de tipo (II): $C_{II}(x)=0,48x$.
Para que $C_I(x)<C_{II}(x)\to$

$$39+0,35x<0,48x\Rightarrow 39<0,13x\Rightarrow x>\frac{39}{0,13}=300.$$



Hay que recorrer más de 300 km.
Gráficamente puede verse que $C_I(x)<C_{II}(x)$ a partir de *x* = 300.

3. En la ciudad de Madrid, la Tarifa 2 del servicio de taxi (que se aplicará todos los días de 21 a 07 horas y sábados, domingos y festivos de 07 a 21 horas, para el año 2020) se especifica como sigue:
Inicio servicio: 3,15 euros. Precio kilométrico: 1,35 euros/km.
a) ¿Cuánto cuesta un trayecto de 8 km?
b) Halla la función que da el precio del trayecto dependiendo de los kilómetros recorridos?

Solución:
a) Costaría: 3,15 + 1,35 · 8 = 13,95 €.
b) Es una función lineal: $f(x)=3,15+1,35x$, siendo *x* el número de km recorridos.

Nota: La cantidad correspondiente al inicio de servicio se llama de "bajada de bandera".

4. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} 4-x, & \text{si } x<4 \\ x^2-10x+24, & \text{si } x\geq 4 \end{cases}$.

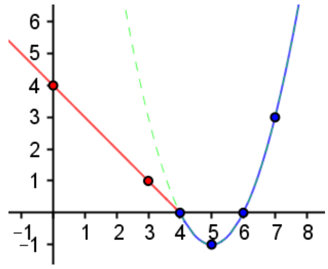
A partir de su gráfica indica sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, y sus máximos y mínimos. ¿Es continua?

Solución:

Para valores de $x < 4$ la función es $f(x)=4-x$. Su gráfica es la recta que pasa por los puntos (0, 4) y (3, 1): llega "casi" hasta el punto (4, 0).

Para valores de $x \geq 4$ la función es $f(x)=x^2-10x+24$. Su gráfica es la parábola que pasa por los puntos (4, 0), (5, –1), (6, 0), (7, 3), …

Su vértice está en $x_V=-\dfrac{-10}{2\cdot 1}=5 \to$ punto (5, –1).



Decrece si $x < 5$; crece cuando $x > 5$; en $x = 5$ tiene el mínimo absoluto; no tiene máximo.

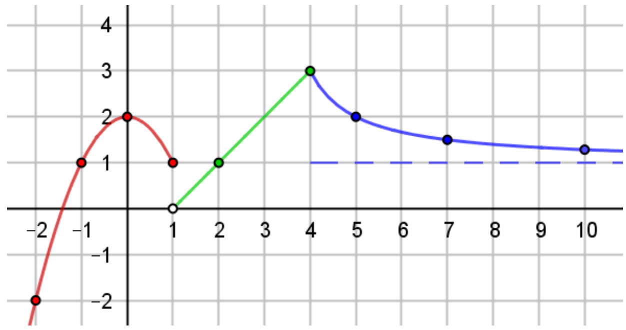
Es continua en todo su dominio.

5. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} -x^2+2, & \text{si } x\leq 1 \\ x-1, & \text{si } 1<x\leq 4 \\ \dfrac{x-1}{x-3}, & \text{si } x>4 \end{cases}$.

A partir de su gráfica indica si es discontinua en algún punto; da también sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, y sus máximos y mínimos. ¿Tiene alguna asíntota?

Solución:

Es una función definida a trozos. Su dominio es todo **R**.



- Para todo $x\in(-\infty,\ 1]$, la función que interviene es $f(x)=-x^2+2$. Se trata de una parábola. Algunos de sus puntos son: (–2, –2); (–1, 1); (0, 2); (1, 1).
- Para todo $x\in(1,\ 4]$, la función que interviene es $f(x)=x-1$. Es una recta. Dos de sus puntos son: (2, 1) y (4, 3).
- Para todo $x\in(4,\ +\infty)$, la función que interviene es $f(x)=\dfrac{x-1}{x-3}$. Es una hipérbola. Algunos de sus puntos son: (5, 2); (7, 1,5); (10, 9/7).

→ En el punto $x = 1$ hay que sustituir en $f(x)=-x^2+2$; pero, para valores de x próximos a 1 y situados a su derecha, la función es $f(x)=x-1$. Así, $f(1{,}01)=1{,}01-1=0{,}01$: cuando x es un poco mayor que 1, la función toma valores próximos a 0. Es obvio que la función da un salto en $x = 1$: no es continua en ese punto.

→ En el punto $x = 4$ hay que sustituir en $f(x)=x-1$, siendo $f(4)=3$; pero, inmediatamente a su derecha hay que sustituir en $f(x)=\dfrac{x-1}{x-3}$. Así, $f(4{,}01)=\dfrac{3{,}01}{1{,}01}\approx 2{,}98$, valor muy próximo a 3. En este caso, la función es continua en ese punto. Otros valores son: $f(5)=\dfrac{4}{2}=2$, $f(10)=\dfrac{9}{7}\approx 1{,}29$.

Para x muy grande (cuando $x\to+\infty$), pongamos $x = 1000$, $f(1000)=\dfrac{999}{997}\approx 1{,}002$: la función se aproxima a 1; luego, la recta $y = 1$ es asíntota horizontal.

Intervalos de crecimiento: (–∞, 0) y (1, 4).
Intervalos de decrecimiento: (0, 1) y (4, +∞).
Máximos: (0, 2), relativo; (4, 3), absoluto. No tiene mínimos.

6. Halla los puntos de corte de las funciones cuadráticas con los ejes de coordenadas:
a) $f(x)=x^2+2x-3$; b) $f(x)=-x^2+4x$; c) $f(x)=0,5x^2+1$; d) $f(x)=-x^2+2x-1$.
Indica también las coordenadas de su vértice y la ecuación de su eje de simetría.
Solución:
Los puntos de corte con el eje *OY* se obtienen haciendo $x = 0$; los de corte con ele eje *OX* son las soluciones de $f(x)=0$.

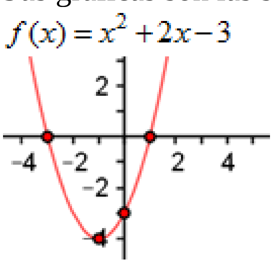
a) $f(x)=x^2+2x-3$.
Si $x = 0$, $f(0)=-3$: punto (0, –3).
Soluciones de $x^2+2x-3=0 \to x = -3$, $x = 1$. Puntos (–3, 0) y (1, 0).
El eje de simetría pasa por el punto medio de –3 y 1, que es $x = -1$. Esa es la ecuación del eje de simetría y la abscisa del vértice, que será el punto $V = (-1, -4)$.
Observa que $f(x)=x^2+2x-3=(x+3)\cdot(x-1)$.

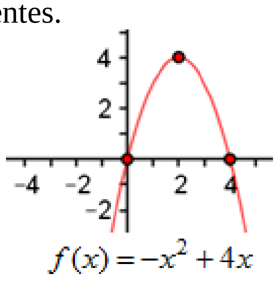
b) $f(x)=-x^2+4x$.
Si $x = 0$, $f(0)=0$: punto (0, 0).
Soluciones de $-x^2+4x=-x(x-4)=0 \to x = 0$, $x = 4$. Puntos (0, 0) y (4, 0).
El eje de simetría pasa por el punto medio de 0 y 4, que es $x = 2$. Esa es la ecuación del eje de simetría y la abscisa del vértice, que será el punto $V = (2, 4)$.

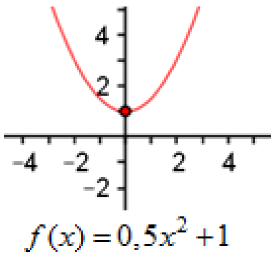
c) $f(x)=0,5x^2+1$.
Si $x = 0$, $f(0)=1$: punto (0, 1).
La ecuación $0,5x^2+1=0$ no tiene soluciones reales. La gráfica no corta ala eje *OX*.
El eje de simetría pasa por la abscisa del vértice, que es $x_V=-\dfrac{0}{2\cdot 0,5}=0$: Vértice (0, 1); el eje de simetría de la parábola es el eje *OY*, recta $x = 0$.
Nota: Las parábolas del tipo $f(x)=ax^2+c$ son simétricas respecto del eje *OY*.

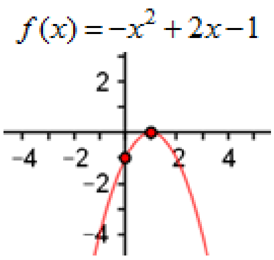
d) $f(x)=-x^2+2x-1$.
Si $x = 0$, $f(0)=-1$: punto (0, –1).
Soluciones de $-x^2+2x-1=0 \to x = 1$, doble. Solo corta en el punto (1, 0).
El punto (1, 0) es vértice; y el eje de simetría, la recta $x = 1$.
Observa que $f(x)=-x^2+2x-1=-(x-1)^2$.

Sus gráficas son las siguientes.









7. Halla la función cuadrática que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (0, 6), (–1, 0) y (3, 0).

Solución:

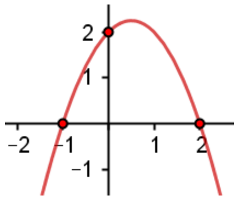
Como corta al eje *OX* en los puntos (–1, 0) y (3, 0) ⇒ –1 y 3 son las soluciones de la ecuación de segundo grado asociada a la función cuadrática. Por tanto, $f(x)=a(x+1)(x-3)$.

Como corta al eje *OY* en el punto (0, 6) ⇒ $f(0)=6$ → $f(0)=a(0+1)(0-3)=-3a=6$ → $a=-2$.

Luego, $f(x)=-2(x+1)(x-3)$ ⇒ $f(x)=-2x^2+4x+6$.

8. La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x)=ax^2+bx+c$, donde $a, b, c \in \mathbf{R}$.

Halla los valores de *a*, *b* y *c*. Indica también las coordenadas del vértice de la parábola.



Solución:

Es como el problema anterior, siendo los puntos de corte con los ejes (–1, 0), (2, 0) y (0,2).

Por tanto, $f(x)=a(x+1)(x-2)$, con $f(0)=2$.

Como $f(0)=a(0+1)(0-2)=-2a=2 \Rightarrow a=-1$.

Luego, $f(x)=-(x+1)(x-2) \Rightarrow f(x)=-x^2+x+2$ → $a=-1$; $b=1$; $c=2$.

Vértice: abscisa, $x_V=-\dfrac{b}{2\cdot a}=-\dfrac{1}{-2}=\dfrac{1}{2}$; ordenada, $f(1/2)=-(1/2)^2+1/2+2=9/4$.

El vértice es el punto $V=(1/2, 9/4)$.

9. De una función se sabe que $f(100)=20$ y que $f(200)=35$. Aplicando la interpolación lineal determina los valores correspondientes a $f(140)$ y $f(205)$.

Solución:

La función de interpolación es la recta $f(x)=mx+n$.

De $f(100)=20 \Rightarrow 20=100m+n$ [1];

de $f(200)=35 \Rightarrow 35=200m+n$ [2].

Restando ambas ecuaciones, [2] – [1] → $15=100m \Rightarrow m=0{,}15$;

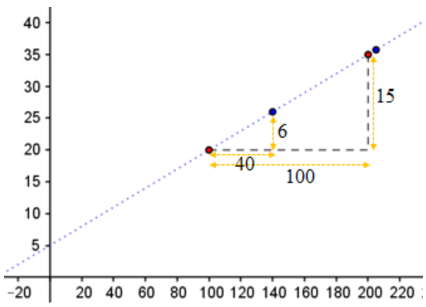
y sustituyendo: $n=5$.

La función es: $f(x)=0{,}15x+5$.

En consecuencia:

$f(140)=0{,}15\cdot140+5=26$ y $f(205)=0{,}15\cdot205+5=35{,}75$.

En el gráfico adjunto puede verse una explicación geométrica.



10. De un fenómeno se tiene la información dada en la siguiente tabla:

Variable *x*	–1	1	2	3
Variable *y*	10	*b*	13	26

a) Calcula la función de interpolación de segundo grado asociada.

b) Halla el valor que se debe asignar a *b*.

Solución:

a) La función de interpolación es de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$.

Por pasar por (–1, 10), $f(-1)=10$ ⇒ $10=a-b+c$;

Por pasar por (2, 13), $f(2)=13$ ⇒ $13=4a+2b+c$;

Por pasar por (3, 26), $f(3)=26$ ⇒ $26=9a+3b+c$.

Sistema que puede resolverse por el método de Gauss:

$$\begin{cases} 10 = a - b + c \\ 13 = 4a + 2b + c \\ 26 = 9a + 3b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2 - E1 \\ E3 - E1 \end{matrix} \begin{cases} 10 = a - b + c \\ 3 = 3a + 3b \\ 16 = 8a + 4b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 3E3 - 4E2 \end{matrix} \begin{cases} 10 = a - b + c \\ 3 = 3a + 3b \\ 36 = 12a \end{cases} \Rightarrow$$

Resolviendo el sistema se tiene: $a = 3$, $b = -2$, $c = 5$.

La función de interpolación será: $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

b) Para $x = 1$ se tiene que $f(1) = 3\cdot1^2 - 2\cdot1 + 5 = 6$.

11. El beneficio obtenido, en miles de euros, por una pastelería en los años que se indican se da en la tabla:

Año	1	3	6
Beneficio	7	8	10

a) Halla el polinomio interpolador de segundo grado correspondiente.
b) Estima, a partir de ese polinomio, el beneficio correspondiente al año 4.

Solución:

a) La función de interpolación es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Por pasar por (1, 7), $f(1) = 7$ $\Rightarrow 7 = a + b + c$;
Por pasar por (3, 8), $f(3) = 8$ $\Rightarrow 8 = 9a + 3b + c$;
Por pasar por (6, 10), $f(6) = 10$ $\Rightarrow 10 = 36a + 6b + c$.

Sistema que puede resolverse por el método de Gauss:

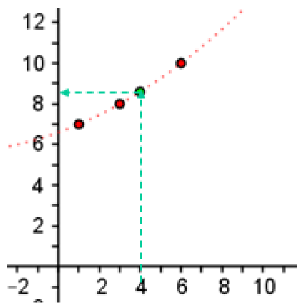
$$\begin{cases} 7 = a + b + c \\ 8 = 9a + 3b + c \\ 10 = 36a + 6b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2 - E1 \\ E3 - E1 \end{matrix} \begin{cases} 7 = a + b + c \\ 1 = 8a + 2b \\ 3 = 35a + 5b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ 2E3 - 5E2 \end{matrix} \begin{cases} 7 = a + b + c \\ 1 = 8a + 2b \\ 1 = 30a \end{cases} \Rightarrow$$

Resolviendo el sistema se tiene: $a = \frac{1}{30}$; $b = \frac{11}{30}$; $c = \frac{198}{30}$.

La función de interpolación será: $f(x) = \frac{1}{30}x^2 + \frac{11}{30}x + \frac{198}{30}$.

b) Para $x = 4$ se tiene que $f(x) = \frac{1}{30}\cdot4^2 + \frac{11}{30}\cdot4 + \frac{198}{30} = 8,6$.

La explicación gráfica es la adjunta.



12. De un fenómeno se tiene la información dada en la siguiente tabla:

Variable x	1	1,2	2	3	4
Variable y	169	d	181	e	199

a) Calcula la función de interpolación de segundo grado que se ajusta a los datos conocidos.
b) Utilizando esa función halla los valores d y e.
c) Determina también, pero por interpolación lineal a trozos y sin calcular la función correspondiente, esos mismos valores d y e.

Solución:

La función de interpolación es $f(x) = ax^2 + bx + c$.

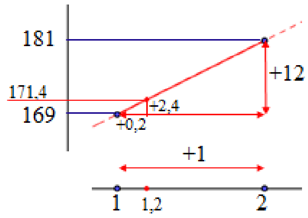
Por pasar por (1, 169) $\Rightarrow$ $169 = a + b + c$;
Por pasar por (2, 181) $\Rightarrow$ $181 = 4a + 2b + c$;
Por pasar por (4, 199) $\Rightarrow$ $199 = 16a + 4b + c$.

Sistema que puede resolverse por el método de Gauss:

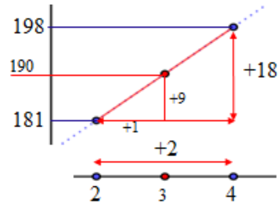
$$\begin{cases} 169 = a+b+c \\ 181 = 4a+2b+c \\ 199 = 16a+4b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} 169 = a+b+c \\ 12 = 3a+b \\ 30 = 15a+3b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-3E2 \end{matrix} \begin{cases} 169 = a+b+c \\ 12 = 3a+b \\ -6 = 6a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 155 \\ b = 15 \\ a = -1 \end{cases}.$$

Por tanto, la función de interpolación es $f(x) = -x^2 + 15x + 155$.

b) $f(1,2) = -(1,2)^2 + 15\cdot(1,2) + 155 = 171,56$; $f(3) = -9 + 45 + 155 = 191$.



c) Cálculo de *d*.
A una diferencia de 1 (la *x* pasa de 1 a 2) → le corresponde una diferencia de 12 (la *y* pasa de 169 a 181) ⇒ el aumento es de 1,2 por cada décima.
Por tanto, a 1,2 (suma 2 décimas a 1) le corresponderá 169 + 2 · 1,2 = 171,4.



Cálculo de *e*.
A una diferencia de 2 (la *x* pasa de 2 a 4) → le corresponde una diferencia de 18 (la *y* pasa de 181 a 199) ⇒ el aumento es de 9 por cada unidad.
Por tanto, a 3 le corresponderá 181 + 9 = 190.

13. Halla, por interpolación cuadrática, el valor de *d*.

Variable *x*	1	2	3	4
Variable *y*	7	9	*d*	10

Solución:
La función de interpolación cuadrática es $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Por pasar por el punto (1, 7) $\Rightarrow 7 = a+b+c$.
Por pasar por el punto (2, 9) $\Rightarrow 9 = 4a+2b+c$.
Por pasar por el punto (4, 10) $\Rightarrow 10 = 16a+4b+c$.

El sistema $\begin{cases} 7 = a+b+c \\ 9 = 4a+2b+c \\ 10 = 16a+4b+c \end{cases}$ puede resolverse por Gauss.

$$\begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} 7 = a+b+c \\ 2 = 3a+b \\ 3 = 15a+3b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ \\ E3-3E2 \end{matrix} \begin{cases} 7 = a+b+c \\ 2 = 3a+b \\ -3 = 6a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} + c \to c = 4 \\ 2 = -\frac{3}{2} + b \to b = \frac{7}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Por tanto, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + 4$.

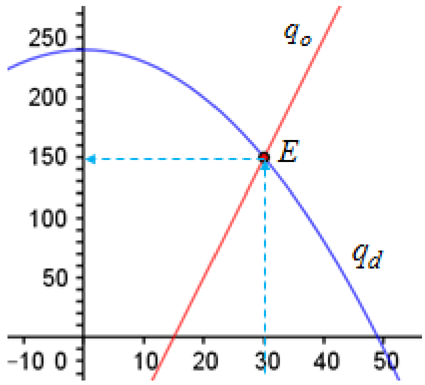
Luego, para $x = 3$, $f(3) = -\frac{1}{2}\cdot 9 + \frac{7}{2}\cdot 3 + 4 = 10 \Rightarrow d = 10$.

14. Las funciones de oferta y demanda de un determinado producto son:
Oferta: $q_o = 10p - 70$; Demanda: $q_d = 500 - 5p$,
donde *p* viene dado en euros y *q* en unidades.
Halla:
a) Las cantidades de oferta y demanda a 30, 40 y 50 euros. ¿Hay escasez en algún caso? ¿A partir de qué precio no hay demanda?

b) El precio y la cantidad de equilibrio para ese producto.
Solución:
a) Si p = 30: oferta, $q_o(30) = 10{\cdot}30 - 70 = 230$; demanda, $q_d = 500 - 5{\cdot}30 = 350$. Hay escasez: la demanda es mayor que la oferta.
Si p = 40: oferta, $q_o(40) = 10{\cdot}40 - 70 = 330$; demanda, $q_d = 500 - 5{\cdot}40 = 300$. Sobran unidades.
Si p = 50: oferta, $q_o(50) = 10{\cdot}50 - 70 = 430$; demanda, $q_d = 500 - 5{\cdot}50 = 250$. Sobran unidades.

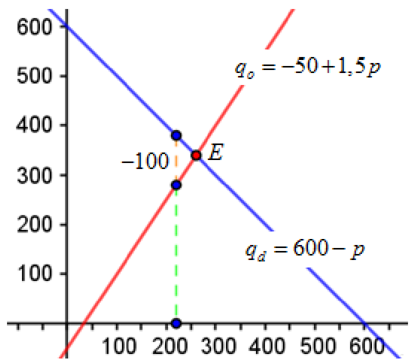
b) Igualando ambas funciones:
$$-70 + 2p = 200 - p \Rightarrow 10p - 70 = 500 - 5p \Rightarrow 15p = 570 \Rightarrow p = 38.$$
El precio de equilibrio será de 38 €.
La oferta y demanda para ese precio serán de $q_o(38) = 10{\cdot}38 - 70 = 310$ unidades.

15. Las funciones de oferta y demanda de un determinado producto son: $q_o = -150 + 10p$ y $q_d = 240 - \frac{1}{10}p^2$, donde p viene dado en euros.
a) Halla las cantidades de oferta y demanda a un precio de 15 y de 40 euros.
b) Halla el precio y la cantidad de equilibrio.
Solución:
a) Para p = 15 €:
$$q_o(15) = -150 + 10{\cdot}15 = 0 \rightarrow \text{no hay oferta.}$$
$$q_d(15) = 240 - \frac{1}{10}{\cdot}15^2 = 217,5.$$
Para p = 40 €:
$$q_o(40) = -150 + 10{\cdot}40 = 250.$$
$$q_d(40) = 240 - \frac{1}{10}{\cdot}40^2 = 80.$$



b) Igualando la oferta y la demanda:
$$-150 + 10p = 240 - \frac{1}{10}p^2 \Rightarrow p^2 + 100p - 3900 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad p = \frac{-100 \pm \sqrt{10000 - 4(-3900)}}{2} = \frac{-100 \pm 160}{2} = \begin{cases} 30 \\ -130 \end{cases}$$
El precio de equilibrio será de 30 € (La solución negativa no tiene sentido económico).
A ese precio, las cantidades de oferta y demanda son de 150 unidades.

16. Las cantidades de oferta y demanda de un determinado producto son:
$$q_o = -50 + 1,5p, \quad q_d = 600 - p \quad (p \text{ en euros})$$
Calcula:
a) El precio y la cantidad de equilibrio.
b) ¿A qué precio se produciría una escasez de 100 unidades?
Solución:
a) Para que exista equilibrio: $q_o = q_d$.
O sea,
$$-50 + 1,5p = 600 - p \Rightarrow 2,5p = 650 \Rightarrow p = 260 \text{ euros.}$$
La demanda para ese precio es
$$q_d(240) = 600 - 240 = 340 \text{ unidades.}$$



Gráficamente, el punto E = (260, 340) es la intersección de las rectas $q_o = -50 + 1,5p$ y $q_d = 600 - p$.

b) Se produce escasez cuando la demanda supera a la oferta:
$q_o < q_d$.
Como esa escasez es de 100 unidades: $q_o = d_d - 100$.
Luego
$$-50 + 1,5p = 600 - p - 100 \Rightarrow 2,5p = 550 \Rightarrow p = 220 \text{ euros.}$$

17. Representa gráficamente las siguientes funciones, indicando su dominio, asíntotas y los puntos de corte de cada gráfica con los ejes de coordenadas:

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$; b) $f(x) = \dfrac{1-3x}{x-2}$; c) $f(x) = \dfrac{2x-4}{x+3}$; d) $f(x) = \dfrac{-4}{x}$.

Solución:

Recuerda que las características fundamentales de $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, con $c \neq 0$, son:

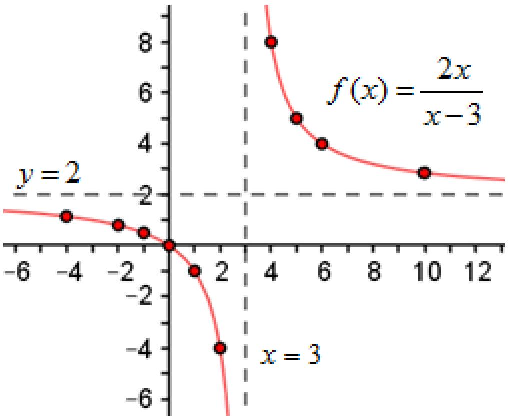
- No está definida si $cx + d = 0$, esto es si $x = -\dfrac{d}{c}$. Su dominio es $\mathbf{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.
- La recta $x = -d/c$ es asíntota vertical de la curva.
- La recta $y = \dfrac{a}{c}$ es asíntota horizontal.

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x-3} \to$ Dom(f) = **R** – {3}. (El denominador no puede tomar el valor 0).
En x = 3 tiene una asíntota vertical.

- Por la izquierda de x = 3, pongamos para x = 2,9, $f(2,9) = \dfrac{5,8}{-0,1} = -58$, valor grande y negativo.

Esto indica que la rama de la función se va hacia –∞.

- Por la derecha de x = 3, por ejemplo, para x = 3,1, $f(3,1) = \dfrac{6,2}{0,1} = +62$, valor grande y positivo. Esto indica que la rama de la función se va hacia +∞.



También tiene una asíntota horizontal: la recta y = 2.
Cortes con los ejes: si x = 0, y = 0 → punto (0, 0); si y = 0, x = 0 → mismo punto.
Otros puntos de su gráfica son:
(–4, 8/7); (–2, 4/5); (–1, 0,5); (1, –1); (2, –4);
(4, 8); (5, 5); (6, 4); (10, 20/7).

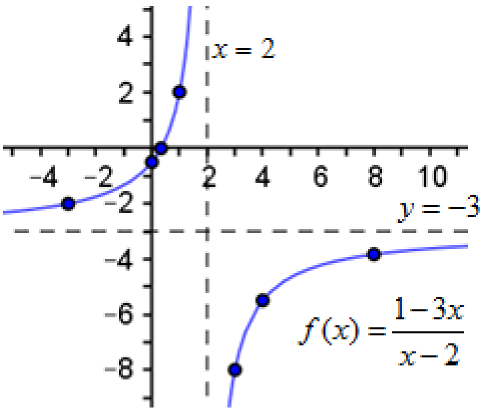
b) $f(x) = \dfrac{1-3x}{x-2} \to$ Dom(f) = **R** – {2}.
En x = 2 tiene una asíntota vertical.

- Por la izquierda de x = 2, pongamos para x = 1,9, $f(1,9) = \dfrac{-4,7}{-0,1} = +47$, valor grande y positivo.

Esto indica que la rama de la función se va hacia +∞.

- Por la derecha de x = 2, por ejemplo, para x = 2,1,

$f(2{,}1)=\dfrac{-53}{0{,}1}=-53$, valor grande y negativo. Esto indica que la rama de la función se va hacia –∞.

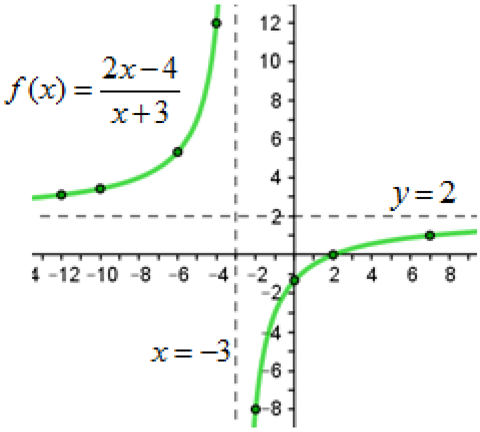


También tiene una asíntota horizontal: la recta y = –3.
Cortes con los ejes: si x = 0, y = –1/2 → punto (0, –1/2); si y = 0, $1-3x=0 \Rightarrow x=1/3$ → punto (1/3, 0).
Otros puntos de su gráfica son:
(–3, –2); (1, 2); (3, –8); (4, –5,5); (8, 23/6).

c) $f(x)=\dfrac{2x-4}{x+3}$ → Dom(f) = **R** – {–3}. En x = –3 tiene una asíntota vertical.

- Por la izquierda de x = –3, pongamos para x = –3,1, $f(-3{,}1)=\dfrac{-10{,}2}{-0{,}1}=+102$, valor grande y positivo. Esto indica que la rama de la función se va hacia +∞.
- Por la derecha de x = –3, por ejemplo, para x = –2,9,

$f(-2{,}9)=\dfrac{-9{,}8}{0{,}1}=-98$, valor grande y negativo. Esto indica que la rama de la función se va hacia –∞.

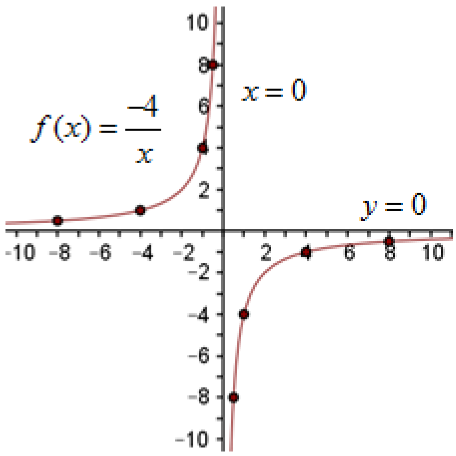


También tiene una asíntota horizontal: la recta y = 2.
Cortes con los ejes: si x = 0, y = –4/3 → punto (0, –4/3); si y = 0, $2x-4=0 \Rightarrow x=2$ → punto (2, 0).
Otros puntos de su gráfica son:
(–12, 28/9); (–10, 24/7); (–6, 16/3); (–4, 12);
(–2, –8); (7, 1).

d) $f(x)=\dfrac{-4}{x}$ → Dom(f) = **R** – {0}.
En x = 0 tiene una asíntota vertical.

- Por la izquierda de x = 0, pongamos para x = –0,1, $f(-0{,}1)=\dfrac{-4}{-0{,}1}=+40$, valor grande y positivo. Esto indica que la rama de la función se va hacia +∞.
- Por la derecha de x = 0, por ejemplo, para x = 0,1,

$f(0{,}1)=\dfrac{-4}{0{,}1}=-40$, valor grande y negativo. Esto indica que la rama de la función se va hacia –∞.



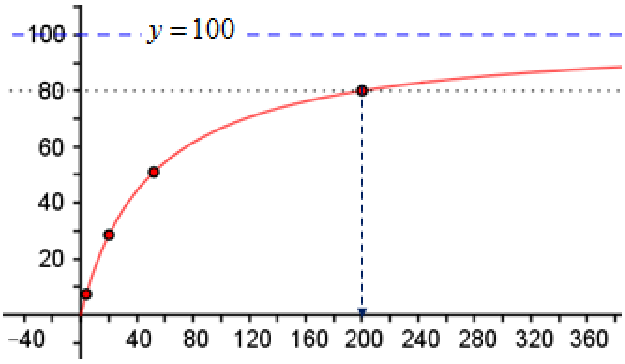
También tiene una asíntota horizontal: la recta y = 0.
Cortes con los ejes: no hay. Ni la x ni la y pueden tomar el valor 0.
Puntos de su gráfica son:
(–8, 0,5); (–4, 1); (–1, 4); (–0,5, 8);
(0,5, –8); (1, –4); (4, –1); (8, –0,5).

18. Cuando una persona se establece en una gran ciudad, nueva para ella, comienza un proceso paulatino de conocimiento de su nuevo hábitat. Supongamos que el porcentaje de ciudad (calles, edificios, comercios...) que va conociendo viene dado por el valor de la función $f(x)=\dfrac{100x}{x+50}$, donde *x* indica las semanas que lleva en la nueva ciudad.
a) ¿Qué porcentaje de ciudad conocerá al cabo de 4, 20, 52 semanas?
b) ¿Cuántas semanas deben pasar para que conozca más del 80 % de la ciudad?
c) Representa los valores hallados (y algunos más) y haz una gráfica de $f(x)$. (Para que la gráfica sea "dibujable" debes hacer cambios de escala en los ejes; por ejemplo, en el je *OX* toma las semanas de 20, en 20).
Solución:
→ Las funciones de este tipo están asociadas a la cuantificación de procesos de aprendizaje: al principio la mejoría es rápida; con el tiempo, aunque se sigue mejorando, el nivel de conocimiento o destreza tiende a estabilizarse.

a) $f(4)=\dfrac{100\cdot 4}{4+50}\approx 7,41\%$; ç

$f(20)=\dfrac{100\cdot 20}{20+50}\approx 28,57\%$;

$f(52)=\dfrac{100\cdot 52}{52+50}\approx 50,98\%$.



b) Se desea que $\dfrac{100x}{x+50}\geq 80 \Rightarrow$

$\Rightarrow 100x\geq 80x+4000 \Rightarrow 20x\geq 4000 \Rightarrow x\geq 200$.
Deben transcurrir 200 semanas.

c) La gráfica es la adjunta. Observa que por más tiempo que transcurra el conocimiento de la ciudad nunca será del 100 %. La recta *y* = 100 es asíntota de la función.

19. Una atleta SUB-18, corredora de 400 m, lleva entrenado tres años. Sus planes de entrenamiento se completan durante 40 semanas al año (las demás semanas las dedica a mantenimiento de forma). Sus tiempos en completar los 400 m se ajustan a la función $f(x)=\dfrac{55x+1800}{x+20}$, siendo *x* el número de semanas de entrenamiento; $f(x)$ en segundos.
a) ¿Cuánto tiempo tardaba en correr esa distancia antes de comenzar a entrenar? ¿Cuáles fueron sus tiempos al terminar las semanas 10, 20, 30, 40, 80 y 120? Con esos datos haz su gráfica.
b) ¿Cuántas semanas de entrenamiento necesitará para bajar de los 59 s?
Solución:

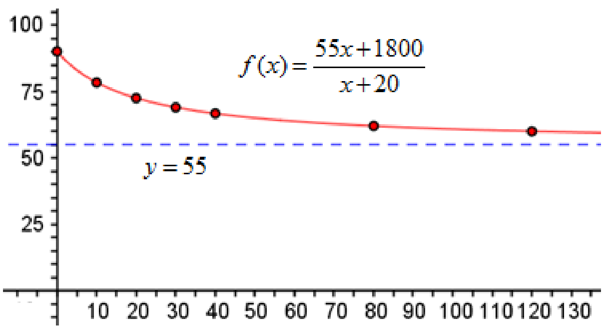
a) Antes de comenzar a entrenar (*x* = 0), $f(0)=\dfrac{1800}{20}=90$ s.

Al terminar las semanas 10, 20, 30, 40, 80 y 120:

$f(10)=\dfrac{550+1800}{10+20}=78,3$ s;

$f(20)=\dfrac{2900}{40}=72,5$ s;

$f(30)=\dfrac{3450}{50}=69$ s;



$f(40)=\dfrac{4000}{60}=66,7$ s;

$f(80)=\dfrac{6200}{100}=62$ s; b) $f(120)=\dfrac{8400}{140}=60$.

b) Hay que resolver la inecuación $\dfrac{55x+1800}{x+20}<59 \Rightarrow$

$\Rightarrow 55x+1800<59x+1180 \Rightarrow 4x>620 \Rightarrow x>155$.

A partir de la semana 155 de entrenamiento su tiempo en correr los 400 m bajará de 59 segundos.

20. El coste de instalación de una empresa es de 50000 euros. La producción de cada unidad supone un coste adicional de 20 €. Halla:

a) El coste de fabricación de 100, de 1000, de *x* unidades
b) El coste por unidad en cada uno de los supuestos anteriores.
c) ¿A qué tiende el costo unitario cuando se fabrican muchas unidades de producto?

Solución:

a) Costes de fabricación:
De 100 unidades: 50000 + 20 · 100 = 52000 €.
De 1000 unidades: 50000 + 20 · 1000 = 70000 €.
De *x* unidades: $C(x)=50000+20x$.

b) El coste por unidad se obtiene dividiendo el coste total de fabricación entre el número de unidades.

Para 100 unidades: $\dfrac{52000}{100}=520$ €/u.

Para 1000 unidades: $\dfrac{70000}{1000}=70$ €/u.

Para *x* unidades: $\dfrac{50000+20x}{x}=\dfrac{50000}{x}+20$ €/u.

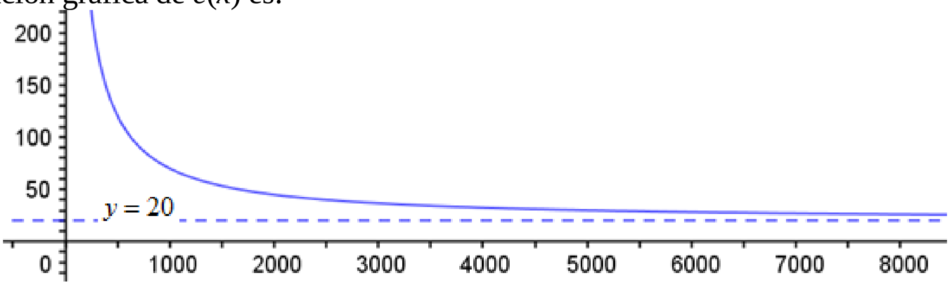
c) Observa lo que ocurre con la función de coste unitario, $c(x)=\dfrac{50000}{x}+20$, al aumentar la producción:

- 10000 unidades → coste unitario: $c(10000)=\dfrac{50000}{10000}+20$ = 5 + 20 = 25 €/u.
- 100000 unidades → coste unitario: $c(100000)=\dfrac{50000}{100000}+20$ = 0,5 + 20 = 20,5 €/u.
- 1000000 unidades → coste unitario: 0,05 + 20 = 20,05 €/u.

El coste unitario se acerca a 20 €. Es decir, la recta *y* = 20 es una asíntota de la función de coste unitario.

Es evidente que el coste unitario, $c(x)=\dfrac{50000}{x}+20$, disminuye cuando el denominador *x* aumenta, acercándose cada vez más a 20.

La representación gráfica de *c*(*x*) es:



Otros problemas

21. Una tienda de móviles puso a la venta un modelo de teléfono inteligente al precio de 600 €, vendiendo 200 teléfonos al mes. Variando los precios ha descubierto que por cada 10 € que se incrementa el precio del móvil, vende 20 teléfonos menos, y al revés: por cada 10 € de descuento sobre el precio inicial de 600 €, vende 20 teléfonos más. Con lo que ambas variables están relacionadas linealmente.

a) Halla la función que da la cantidad *C* de teléfonos vendidos dependiendo del precio *p*. ¿Cuántos teléfonos se venden a un precio de 500 €? ¿A qué precio no se vende ningún teléfono?

b) Deduce que la función que determina los ingresos mensuales de la tienda, dependiendo del precio del móvil, es $I(p) = -2p^2 + 1400p$.

c) ¿A qué precio del móvil la empresa tiene los ingresos mensuales más elevados? ¿A cuánto ascienden esos ingresos máximos?

Solución:

a) Si la relación entre el precio (*p*) del móvil y la cantidad (*C*) de teléfonos vendidos es lineal, su ecuación será del tipo $C(p) = mp + n$, siendo *m* y *n* la pendiente de la recta y la ordenada en el origen, respectivamente.

Se conocen dos puntos de esa recta: (600, 200) y (610, 180) → (A un precio de 600 € vende 200 teléfonos, y que por cada 10 € que se incrementa el precio del móvil, vende 20 teléfonos menos, y al revés: por cada 10 € de descuento sobre el precio inicial de 600 €, vende 20 teléfonos más).

Por tanto:

$$\begin{cases} 200 = 600m + n \\ 180 = 610m + n \end{cases} \Rightarrow m = -2;\ n = 1400 \to C(p) = -2p + 1400.$$

A un precio $p = 500$ €, $C(500) = -2 \cdot 500 + 1400 = 400$: vende 400 teléfonos.

Las ventas serán 0 cuando $C(p) = 0 \Rightarrow 0 = -2p + 1400 \Rightarrow p = 700$. A un precio de 700 € no se venderá ningún teléfono.

b) Los ingresos vienen dados por el producto $p \cdot C(p)$, precio por número de teléfonos vendidos. Luego:

$$I(p) = p \cdot C(p) = p \cdot (-2p + 1400) \Rightarrow I(p) = -2p^2 + 1400p.$$

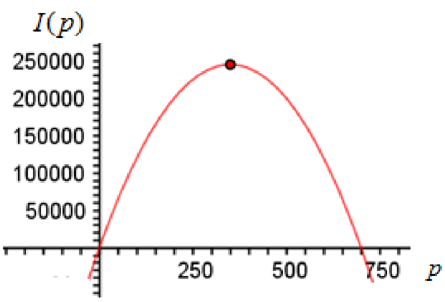
c) La función es la de una parábola cóncava (∩), cuyo máximo se da en el vértice.

La abscisa del vértice es: $x_V = -\dfrac{1400}{2 \cdot (-2)} = 350$.

Los ingresos correspondientes,

$$I(350) = -2 \cdot 350^2 + 1400 \cdot 350 = 245000 \text{ euros.}$$

Aunque no se pide, la gráfica de la función de ingresos es la adjunta.



22. Un granjero tiene 1200 metros de malla para cercar un terreno rectangular.

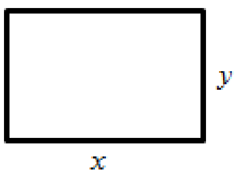
a) Si un lado del rectángulo mide *x* metros, ¿cuánto medirá el otro lado? ¿Cuál será el área de ese rectángulo en función de *x*?

b) Indica las dimensiones de ese rectángulo cuando *x* es igual a 100, 200 y 300 metros; comprueba que la fórmula anterior es correcta.

c) ¿Para qué valor de *x* el área del rectángulo será máxima?

Solución:

a) Los 1200 metros de malla determinan el perímetro del rectángulo, que vale $2x + 2y$.



Por tanto:

$$2x+2y=1200 \Rightarrow x+y=600 \Rightarrow y=600-x.$$

El área del rectángulo valdrá,

$$A=x\cdot y=x\cdot(600-x) \Rightarrow A(x)=-x^2+600x.$$

b) Si x = 100, y = 500; A = 100 · 500 = 50000 → $A(100)=-100^2+600\cdot100=50000$ m^2.

Si x = 200, y = 400; A = 200 · 400 = 80000 → $A(200)=-200^2+600\cdot200=80000$ m^2.

Si x = 300, y = 300; A = 300 · 300 = 90000 → $A(300)=-300^2+600\cdot300=90000$ m^2.

c) La función que da el área es cuadrática, $A(x)=-x^2+600x$, con coeficiente a = –1 ⇒ se trata de una parábola cóncava, con máximo en su vértice.

La abscisa del vértice es $x_V=-\dfrac{600}{2\cdot(-1)}=300$. Para ese valor: y = 300; A = 90000 m^2.

23. El rendimiento intelectual, en tanto por ciento, de un estudiante, depende de los minutos que lleva estudiando. La función que da su rendimiento es: $R(t)=\dfrac{-1}{30}t^2+2t+70$, t en minutos.

a) ¿Cuál es su rendimiento al comenzar a estudiar?

b) ¿En qué momento su rendimiento es mayor? ¿Cuál es ese rendimiento?

c) Si decide descansar cuando su rendimiento está por debajo del 70 %, ¿en qué minuto debe hacerlo?

Solución:

a) Al comenzar a estudiar, t = 0, luego: $R(0)=70$ %.

b) La función que da el rendimiento es cuadrática; su gráfica es una parábola cóncava (∩), alcanzando su valor máximo en el vértice.

La abscisa del vértice es: $x_V=-\dfrac{2}{2\cdot(-1/30)}=30$; $R(30)=\dfrac{-1}{30}\cdot30^2+2\cdot30+70=100$.

El máximo rendimiento, que es del 100 %, lo consigue a los 30 minutos de estudio.

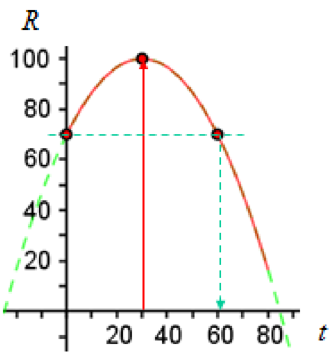
c) Su rendimiento es del 70 % en la solución de $R(t)=70$.

$$\frac{-1}{30}t^2+2t+70=70 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{30}t^2+2t=0 \Rightarrow -t^2+60t=0 \Rightarrow -t(t-60)=0 \Rightarrow t=60.$$

Debe descansar cuando lleve una hora de estudio seguida.

→ La gráfica de $R(t)$, que no se pide, es la adjunta.



24. Durante los 11 años de funcionamiento de una empresa, sus beneficios (en millones de euros) se ajustaron a la función $B(t)=-0{,}3t^2+3{,}3t-1$, siendo t ∈ [0, 11] es el tiempo transcurrido en años desde el momento inicial.

a) Determina en qué momento del tiempo los beneficios fueron de 2 millones de euros.

b) ¿En qué momento los beneficios fueron máximos?

c) ¿En qué periodo de tiempo la empresa tuvo ganancias?

Solución:

a) Los beneficios fueron de 2 millones de euros en las soluciones de $B(t)=-0{,}3t^2+3{,}3t-1=2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -0,3t^2+3,3t-3=0 \Rightarrow t=\frac{-3,3\pm\sqrt{3,3^2-4\cdot(-0,3)\cdot(-3)}}{2\cdot(-0,3)}=\frac{-3,3\pm 2,7}{-0,6}=\begin{cases}1\\10\end{cases}.$$

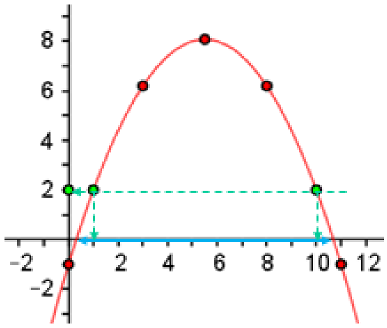
b) Como la función es una parábola cóncava (∩), su máximo se da en el vértice de dicha parábola, que se da cuando $x_V=-\frac{3,3}{2\cdot 0,3}=5,5 \to$ punto (5,5, 8,075).

c) La empresa tiene ganancias cuando $B(t)=-0,3t^2+3,3t-1>0$.

Resolviendo $-0,3t^2+3,3t-1=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow t=\frac{-3,3\pm\sqrt{3,3^2-4\cdot(-0,3)\cdot(-1)}}{2\cdot(-0,3)}=\approx\frac{-3,3\pm 3,11}{-0,6}\approx\begin{cases}0,32\\10,67\end{cases}.$$

Tiene ganancias cuando 0,32 < t < 10, 67.



Si se hace la representación gráfica de la función se confirma lo dicho más arriba.

25. Los ingresos y los costes, en euros, de una empresa vienen dados por las funciones $I(x)=50000x-4000x^2$ y $C(x)=100000+5000x$, donde x son miles de unidades producidas y vendidas; esto es, x = 1, significa 1000 unidades.

Halla:

a) Los puntos de equilibrio: en donde la empresa ni gana ni pierde.

b) La función que da el beneficio y los valores de producción en los que ese beneficio es positivo.

Solución:

a) En ese punto $I(x)=C(x) \Rightarrow 50000x-4000x^2=100000+5000x \Rightarrow$

$$4000x^2-45000x+100000=0 \Rightarrow 4x^2-45x+100=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{45\pm\sqrt{(-45)^2-4\cdot 4\cdot 100}}{2\cdot 4}\approx\frac{45\pm 20,6}{8}=\begin{cases}3,05\\8,2\end{cases}.$$

La empresa ni gana ni pierde cuando x = 3,05 o x = 8,2: cuando se fabrican 3050 u 8200 unidades.

b) El beneficio es la diferencia entre los ingresos y los gastos: $B(x)=I(x)-C(x)$.

$$B(x)=50000x-4000x^2-(100000+5000x)=-4000x^2+45000x-100000.$$

Los beneficios son positivos si $-4000x^2+45000x-100000>0$.

Por el apartado anterior: 3,05 < x < 8,2; cuando se fabrican y venden entre 3050 y 8200 unidades de producto.