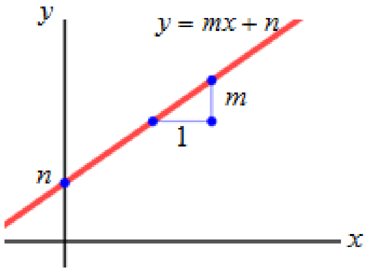
FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS: APLICACIONES

En Matemáticas, siempre que se pueda conviene dibujar.
Estudia con lápiz y papel, haz bocetos; con las funciones es importante.

1. Funciones lineales: rectas

Su expresión general es:

$f(x) = mx + n \Leftrightarrow y = mx + n$

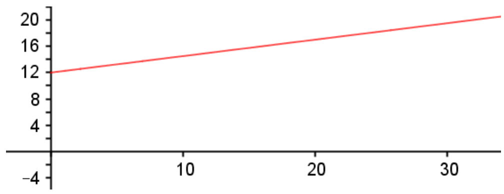


Su representación gráfica es una recta. Para trazarla basta con conocer dos de sus puntos.
El coeficiente *m* se llama <u>pendiente</u>, y mide lo que varía la *y* por cada aumento unitario de *x*.
Al número *n* se le llama <u>ordenada en el origen</u>, pues indica el valor de *y* cuando *x* vale 0.

- También es frecuente la notación $y = ax + b$; se ha cambiado *m* por *a* y *n* por *b*.

<u>Función de proporcionalidad directa</u>. Es de la forma $y = mx$ (el término independiente vale 0).
En esta función, las variables son directamente proporcionales (como en la "regla de tres" simple directa). La pendiente *m* es la razón de proporcionalidad entre las variables *x* e *y*: $y = mx \Leftrightarrow \frac{y}{x} = m$.
La representación gráfica de estas funciones son rectas que pasan por el origen.
Si *m* = 1, la función se llama <u>identidad</u>: $y = x$. Su gráfica es la bisectriz del primer cuadrante.

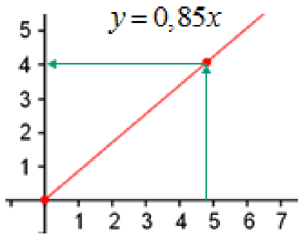
Ejemplos:
Muchas relaciones de tipo comercial están asociadas a estas funciones. Así, las facturas de agua, luz, teléfono… suelen tener dos componentes: una variable, que depende del consumo; otra fija, independiente de la cantidad consumida.
a) El contrato con una compañía suministradora puede ser como se indica: cantidad fija (por alquiler de equipos, potencia contratada, …), 12 €/mes; cantidad variable (consumo), 0,25 euros por unidad (puede ser kWh, m^3, …). Con esto, si la variable que mide el consumo es *x*, la factura viene dada por la expresión $F(x) = 12 + 0,25x$, que es una función lineal.



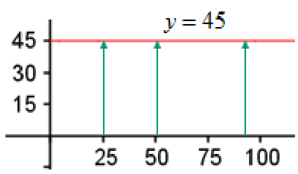
En el supuesto de que se consuman 230 unidades de ese producto, el coste de la factura será,

$F(230) = 12 + 0,25·230 = 69,5$ €.

b) Si el precio de las patatas es de 0,85 €/kg, la función que da la cantidad a pagar dependiendo de la cantidad comprada es $P(x) = 0,85x$. Si se han comprado 4,8 kg, debe pagarse $P(4,8) = 0,85·4,8 = 4,08$ €.



c) En telefonía es frecuente el contrato llamado de "tarifa plana", en el que se paga una cantidad fija, independiente del consumo (se hagan muchas o pocas llamadas; o se esté conectado a Internet mucho o poco tiempo). Así, si un "operador" ofrece un contrato por 45 €/mes. En este caso, la función asociada es $F(x) = 45$. (Si se consumen 25, 50 o 90 … se pagan 45 €).



- Observa que, en los tres casos, el dominio de definición es [0, +∞).

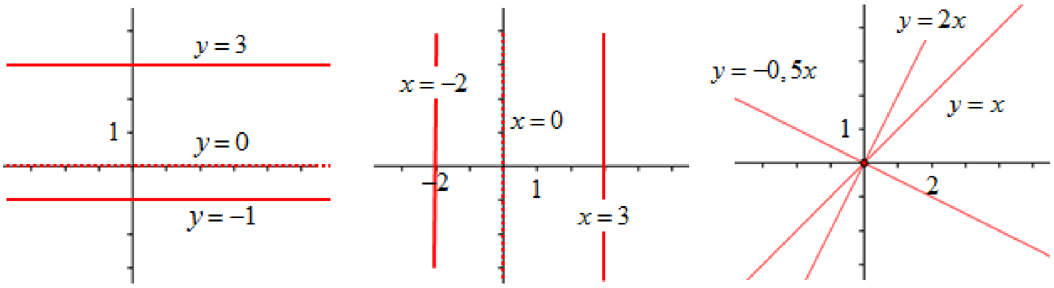
Rectas

La ecuación lineal $ax+by+c=0$ es la <u>ecuación general de una recta</u> en su <u>forma implícita</u>.

Si se despeja la variable *y*: $by=-ax-c \Rightarrow y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$; haciendo $-\frac{a}{b}=m$ y $-\frac{c}{b}=n$, se tiene $y=mx+n$, que recibe el nombre de <u>ecuación explícita</u>.

- Si en $ax+by+c=0$, $a=0 \Rightarrow y=-\frac{c}{b} \to y=n$ (y = constante, $y=k$). Esta es la ecuación general de una <u>recta horizontal</u>. Recibe el nombre <u>de función constante</u>.
- Si en $ax+by+c=0$, $b=0 \Rightarrow x=-\frac{c}{a} \to$ (x = constante, $x=k$). Esta es la ecuación de una <u>recta vertical</u>. Esta expresión <u>no</u> define una función.
- Si en $ax+by+c=0$, $c=0 \Rightarrow y=-\frac{c}{b}x \to y=mx$. Esta es la ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenada.

Ejemplos:

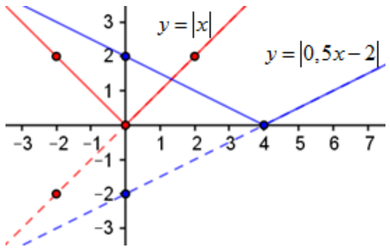


Otras funciones relacionadas con rectas

- La <u>función valor absoluto de *x*</u>, $f(x)=|x|$, se puede expresar como una función definida a trozos:

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & \text{si } x<0\\ x, & \text{si } x\geq 0\end{cases}.$$

Su gráfica es la adjunta.



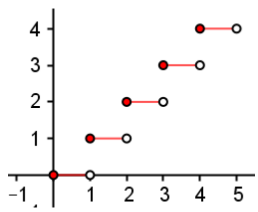
→ En el mismo dibujo se ha representado la función

$$f(x)=|0,5x-2| = \begin{cases}-0,5x+2, & \text{si } x<4\\ 0,5x-2, & \text{si } x\geq 4\end{cases}.$$

En ambos casos, su representación puede hacerse a partir de la de las gráficas de $y=x$ e $y=0,5x-2$, "reflejando" respecto del eje *OX* la parte negativa de sus gráficas.

- La <u>función parte entera de *x*</u>, que se escribe $f(x)=ENT[x]$, es la función que asigna a cada número real *x* el número entero menor o igual que *x*.

→ $ENT[2]=2$; $ENT[2{,}12]=2$; $ENT[3{,}5]=3$; $ENT[3{,}99...]=3$. Es una función escalonada, discontinua a saltos.
Su gráfica es la adjunta.



→ Esta función está asociada a fenómenos que son constantes por tramos. Por ejemplo, el coste de estacionamiento de un coche en un parking. En el supuesto de que el precio de aparcamiento fuese de <u>2,30 euros, hora o fracción</u>, la función que da el coste de aparcamiento durante *t* horas, es $f(t)=2,30\cdot ENT[t+1]$.

Si el tiempo de aparcamiento es 1:20 h, se pagará $f(1,33)=2,30\cdot ENT[1,33...+1]=2,30\cdot 2=4,60$ €.

2. La función cuadrática: parábolas

Su expresión analítica es: $f(x)=ax^2+bx+c \Leftrightarrow y=ax^2+bx+c$, con $a \neq 0$.
La gráfica de esta función es una parábola de eje vertical.

Efecto de los parámetros *a, b* y *c*

La parábola $y=ax^2+bx+c$ queda totalmente definida cuando se conocen *a*, *b* y *c*.

Coeficiente *a*:

- Si $a > 0$ la parábola es convexa (∪). Su vértice está en el mínimo de la función.
- Si $a < 0$, es cóncava (∩). El vértice es el máximo.
- La abscisa del vértice es $x_V = -\dfrac{b}{2a}$; su ordenada, el valor de *y* correspondiente.

Coeficiente *b*. El coeficiente *b* produce un desplazamiento lateral en la parábola.

Término independiente *c*. El término *c* produce desplazamientos verticales en la parábola.

Ejemplos:

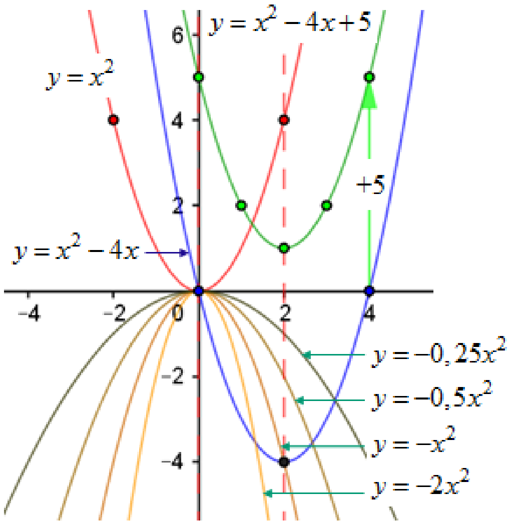
En la figura adjunta se han dibujado (usando **GeoGebra**) varias funciones cuadráticas. Observa:

1) La convexidad (∪) o concavidad (∩) de las curvas depende del coeficiente *a*.

2) Si el coeficiente *a* se aproxima más a 0, la parábola se abre: $y=-0,25x^2$ es más abierta que $y=-x^2$.

3) El vértice de $y=x^2-4x$ está en el punto (2, –4); el de $y=x^2-4x+5$ en (2, 1), 5 unidades más alto.

4) Los puntos de cada curva se obtienen dando valores a *x* y determinando el correspondiente *y*. Así, puntos de $y=x^2-4x+5$ son: (0, 5); (1, 2); (2, 1); (3,2); (4, 5).

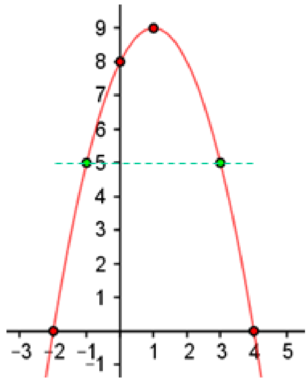


Cortes con los ejes, crecimiento y decrecimiento…

- La función corta al eje *OY* cuando $x = 0$, punto $(0, c)$.
- Los puntos de corte con el eje *OX* son las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$, que pueden ser dos, una o ninguna. Recuerda: Si las soluciones son x_1 y $x_2 \Rightarrow ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$.
- La función alcanza un determinado valor *k* en las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=k$.
- Si la función es convexa (∪), será decreciente en el intervalo $(-\infty,\ x_V)$ y creciente si $x > x_V$, siendo $x_V=-\dfrac{b}{2a}$ la abscisa del vértice, que es su mínimo. El eje de simetría es la recta $x=-\dfrac{b}{2a}$.
- Si la función es cóncava (∩), sucede al revés: crece si $x < x_V$, decrece si $x > x_V$; el vértice es el máximo.

Ejemplo:

La función $f(x)=-x^2+2x+8$, que es una parábola cóncava:
Corta al eje *OY* en el punto $(0,\ f(0))=(0,\ 8)$.
Corta al eje *OX* en las soluciones de $-x^2+2x+8=0$: $x = -2$, $x = 4$.
Toma el valor 5 en las soluciones de $-x^2+2x+8=5$: $x = -1$, $x = 3$.
Su vértice está en el punto (1, 9); crece si $x < 1$; decrece si $x > 1$.



Ejercicio

Si los costes de una empresa vienen determinados por la función $f(x) = x^2 - 6x + 40$, donde x representa la cantidad producida de un determinado artículo, con $x \geq 0$ y $f(x)$ en euros.

a) ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo? Si el coste fuese 80 €, ¿cuántas serían las unidades producidas?

b) ¿Disminuye el coste alguna vez? ¿Cuál es el coste mínimo por artículo? ¿Cuántos artículos se producen a ese coste mínimo?

c) Representa la función y justifica nuevamente las respuestas anteriores a partir de la gráfica.

Solución:

a) Si no se produce nada de ese artículo, para $x = 0$, el coste sería: $f(0) = 40$.

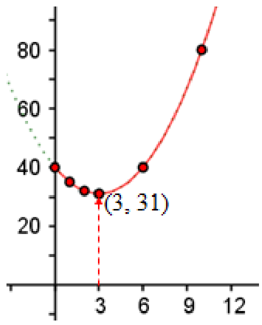
Si el coste fuese 80 €: $f(x) = 80 \Rightarrow x^2 - 6x + 40 = 80 \Rightarrow x^2 - 6x - 40 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot(-40)}}{2} = \frac{6 \pm 14}{2} = \begin{cases} 10 \\ -4 \end{cases}.$$

Deben producirse 10 unidades de ese artículo. (La solución negativa no tiene sentido económico).

b) Como el coeficiente a de la parábola es 1, su gráfica es convexa ($\cup$) $\Rightarrow$ el mínimo se da en el vértice, $x_V = -\frac{-6}{2\cdot 1} = 3$, que indica que los costes son mínimos si se producen 3 artículos. Ese coste mínimo será $f(3) = 3^2 - 6\cdot 3 + 40 = 31$ €.

A la izquierda de $x = 3$, intervalo $[0, 3)$, la función decrece: el coste disminuye.



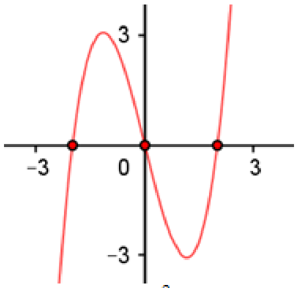
c) La gráfica puede trazarse calculado algunos pares de valores:
(0, 40); (1, 35); (2, 32); (3, 31), mínimo; (6, 40); (10, 80).

Efectivamente, la función decrece en el intervalo (0, 3); crece en el intervalo $(3, +\infty)$; tiene el mínimo cuando $x = 3$.

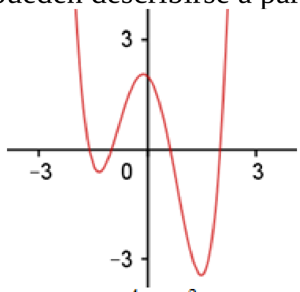
Funciones polinómicas de grado superior

La expresión $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ es la de una función polinómica. (Es la misma que la de un polinomio). Los números a_i son los coeficientes, a_0 es el término independiente, n indica el grado (que debe ser un número entero positivo). La indeterminada x es la variable independiente. Su dominio es **R**; esto es, siempre están definidas. El valor de $f(x)$ dependerá del que tome x.

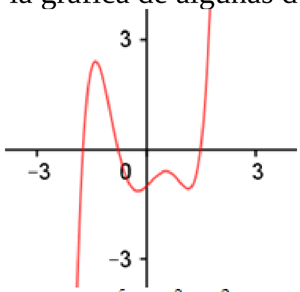
→ Sus características fundamentales pueden describirse a partir de la gráfica de algunas de ellas.



$f(x) = x^3 - 4x$



$f(x) = x^4 - 4x^2 - x + 2$



$f(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 + x - 1$

Puede observarse:

1) Las funciones polinómicas siempre son continuas.

2) Si el coeficiente principal es positivo, las de grado mayor par tienen dos ramas apuntado hacia arriba; las gráficas de grado mayor impar (x^3, x^5, …) "aparecen" por abajo y se "pierden" por arriba.

3) Las curvas asociadas a estas funciones pueden cortar al eje OX tantas veces como indica el grado de su término principal. Los puntos de corte son, en cada caso, las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$.

3. Función de interpolación. Interpolación lineal y cuadrática

Con frecuencia, en las ciencias sociales y económicas, no se dispone de modelos matemáticos (de funciones de la forma $y = f(x)$) que permitan asignar valores exactos de la variable dependiente cuando la variable independiente toma un valor concreto; más bien se dispone de algunos de pares de valores, resultado de mediciones experimentales. Si hay motivos para suponer que el fenómeno que se está estudiando tiene un comportamiento funcional (o aproximadamente funcional), puede intentarse buscar una función, llamada función de interpolación, que se ajuste a esos pares de valores.

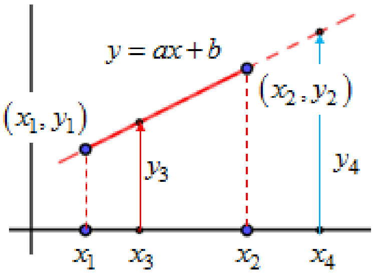
- Cuando se conocen solo dos pares de valores, dos puntos, puede encontrarse una función lineal (una recta) que pase por esos dos puntos. Esa será la función de interpolación lineal.
- Cuando se conocen tres puntos no alineados, puede encontrarse una función cuadrática (una parábola) que pase por esos tres puntos. Esa será la función de interpolación cuadrática.

Observación: Cuando no hay motivos para suponer que el fenómeno estudiado tiene un comportamiento funcional, sino aleatorio, se recurre a la regresión lineal. (Se verá en Probabilidad).

Interpolación lineal

Si se conocen solo dos puntos, la función de interpolación es $f(x) = ax + b$, que es una recta.
Para determinarla hay que hallar a y b.
Si los puntos son $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, los valores de a y b se hallan resolviendo el sistema: $\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$.

El valor de interpolación correspondiente a $x_3 \in (x_1, x_2)$ se calcula sustituyendo en la ecuación hallada, siendo $y_3 = ax_3 + b$.



- Cuando el punto x_4 no pertenece al intervalo (x_1, x_2), se habla de extrapolación.

Ejemplo:

La función de interpolación que se ajusta a los puntos (2, 3) y (8, 6) se obtiene como sigue:
Si (2, 3) y (8, 6) cumplen la ecuación $f(x) = ax + b \Rightarrow$

$$\begin{cases} 3 = 2a + b \\ 6 = 8a + b \end{cases} \to \text{(restando)} \quad E2 - E1 \begin{cases} 3 = 2a + b \\ 3 = 6a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 2\cdot(1/2) + b \to b = 2 \\ a = 1/2 \uparrow \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + 2.$$

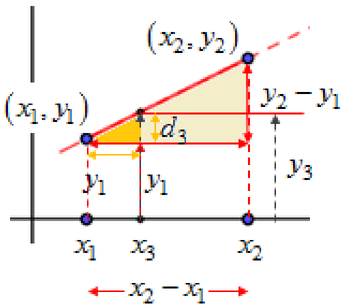
Así, el valor de interpolación correspondiente a $x_3 = 4$ es $y_3 = \frac{1}{2}\cdot 4 + 2 = 4$; y el valor de extrapolación para $x_4 = 11$ será $y_4 = \frac{1}{2}\cdot 11 + 2 = 7{,}5$.

- En la práctica, el cálculo de los valores de interpolación se hace mediante una sencilla regla de tres directa. Sumando o restando al valor conocido la variación proporcional correspondiente. (Véase la figura adjunta, en donde $y_3 = y_1 + d_3$).

Por el teorema de Tales se tiene:

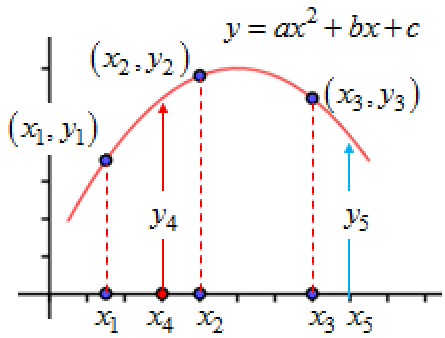
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{d_3}{x_3 - x_1} \Rightarrow d_3 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1).$$

En el ejemplo anterior, $(x_1, y_1) = (2, 3)$, $(x_2, y_2) = (8, 6)$ y $x_3 = 4$, se tendrá: $d_3 = \frac{6-3}{8-2}(4-2) = \frac{1}{2}\cdot 2 = \underline{1} \Rightarrow y_3 = 3 + \underline{1} = 4$.



Interpolación cuadrática

Cuando se conocen tres pares de puntos no alineados, el polinomio interpolador es la función $f(x)=ax^2+bx+c$, que es una parábola.



Si los puntos son $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ y $R(x_3, y_3)$, los valores de a, b y c se hallan resolviendo el sistema lineal:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases}.$$

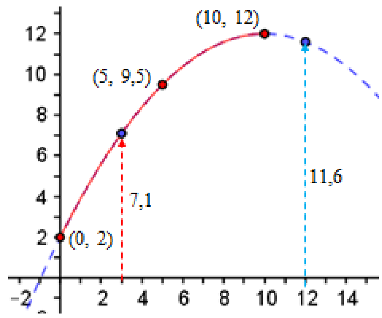
El valor de interpolación correspondiente a x_4 se calcula sustituyendo en la ecuación hallada, siendo $y_4 = ax_4^2 + bx_4 + c$.

Cuando el punto x_5 no pertenece al intervalo (x_1, x_3), se habla de <u>extrapolación</u>.

Ejemplo:

La función cuadrática, $f(x)=ax^2+bx+c$, que pasa por los puntos (0, 2), (5, 9,5) y (10, 12) se obtiene como sigue:

- (0, 2) es de la función: $f(0)=2 \Rightarrow \underline{2}=c$. (Este valor se lleva a las siguientes ecuaciones).
- (5, 9,5) es de la función: $f(5)=9,5 \Rightarrow 25a+5b+\underline{2}=9,5$.
- (10, 12) es de la función: $f(10)=12 \Rightarrow 100a+10b+\underline{2}=12$.



Resolviendo $\begin{cases} 25a+5b+2=9,5 \\ 100a+10b+2=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a+b=1,5 \\ 10a+b=1 \end{cases} \Rightarrow a = –0,1;\ b = 2.$

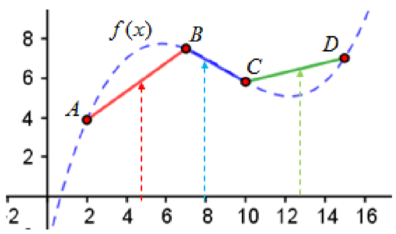
La función es $f(x)=-0,1x^2+2x+2$. (Línea de trazos de la figura).

Con esto: El valor de interpolación correspondiente a $x_4 = 3$ será

$f(3)=-0,1\cdot 9+2\cdot 3+2=7,1$.

El valor de extrapolación para $x_5 = 12$ será $f(12)=11,6$.

Interpolación lineal a trozos



Cuando se conocen tres o más puntos (y no hay excesiva necesidad de precisión en los valores de interpolación), puede optarse por la interpolación lineal a trozos, en la que se ajusta una línea recta entre cada dos puntos consecutivos.

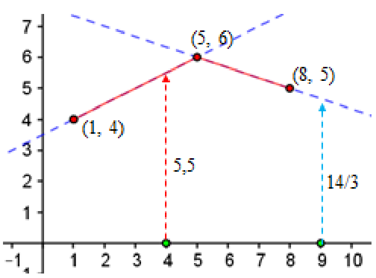
(El cálculo del polinomio interpolador, $f(x)$, puede resultar demasiado engorroso).

→ En el ejemplo representado en la figura adjunta, para valores de x entre 2 y 7 se interpola sobre la línea AB; si x está entre 7 y 10, sobre la línea BC; y si está entre 10 y 15, sobre la línea CD.

Ejemplo:

De un fenómeno se tiene la información dada en la siguiente tabla:

Variable x	1	4	5	8	9
Variable y	4	c	6	5	d



Mediante la interpolación lineal a trozos pueden determinarse los valores de c y d, como sigue:

→ Cálculo de c. Se interpola entre los valores (1, 4) y (5, 6); la recta de interpolación es $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$. Luego, para $x = 4 \Rightarrow c = 5,5$.

→ Cálculo de d. Se extrapola a partir de los puntos (5, 6) y (8, 5): recta $y=-\frac{1}{3}x+\frac{23}{3}$. Luego, para $x = 9 \Rightarrow d = 14/3$.

4. Una aplicación a la economía: Funciones de oferta y demanda

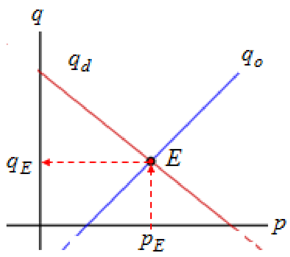
La *economía de mercado* en estado puro se rige por las leyes de oferta y demanda: el productor ofrece un artículo; el consumidor demanda un determinado producto. Si el precio de oferta es satisfactorio para el consumidor, éste comprará lo ofertado. Análogamente, si los consumidores están dispuestos a pagar una cantidad ventajosa para el productor, éste, buscando un beneficio, se animará a producir lo demandado. El *tira y afloja* entre unos y otros hace que los precios se ajusten.

- La función de demanda, q_d, para un producto es aquella que determina la cantidad total que los consumidores están dispuestos a comprar a un precio *p*.
- La función de oferta, q_o, es la que determina la cantidad total que los fabricantes están dispuestos a producir a un precio de venta *p*.
- Cantidad de equilibrio es el número de unidades que hay que producir para que la demanda y la oferta se igualen: que se venda todo lo producido. Esto es, cuando $q_d = q_o$. El valor de *p* correspondiente se llama precio de equilibrio.

Los modelos matemáticos más simples para las funciones de oferta y demanda son los lineales y cuadráticos.

Modelo lineal

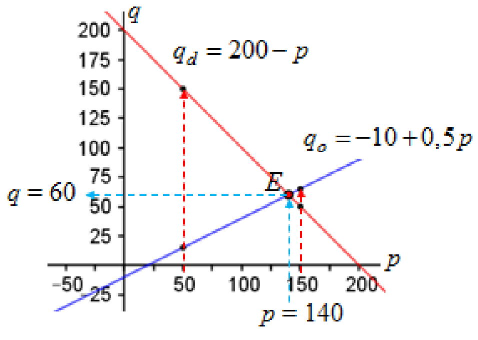
- La demanda viene dada por la recta $q_d = b - ap$, con *a* y *b* > 0; (la pendiente negativa indica que cuando el precio *p* aumenta las ventas disminuyen).
- La oferta se expresa por $q_o = c + dp$, con *d* > 0, para indicar que la oferta aumenta cuando lo hace el precio. El término *c* suele ser negativo.
- El punto de equilibrio, $E = (p_E,\ q_E)$, se obtiene resolviendo a ecuación $q_d = q_o$.



Observaciones:
1) En las dos funciones la variable independiente es *p*, y su dominio está definido para valores de *p* > 0 que hagan a q_d y q_o cantidades enteras positivas (en la práctica no pueden venderse trozos de un producto).
2) En Economía es costumbre representar el precio, *p*, en el eje vertical; y la cantidad, *q*, en el horizontal. Aquí lo haremos como está.

Ejemplo:
Si las funciones de oferta y demanda de un terminado producto fuesen $q_o = -10 + 0,5p$ y $q_d = 200 - p$, con *p* en euros, entonces:

→ Para *p* = 50 € se ofertarían
$q_o(50) = -10 + 0,5{\cdot}50 = 15$ unidades de producto;
y se demandarían
$q_d(50) = 200 - 50 = 150$ unidades.
Como la demanda es mayor que la oferta, el precio subirá.
→ Para *p* = 150 €, la oferta es $q_o(150) = -10 + 0,5{\cdot}150 = 65$;
y la demanda, $q_d(150) = 200 - 150 = 50$.
Como la demanda es menor que la oferta, el precio bajará.



→ El equilibrio se encuentra cuando $q_d = q_o \Rightarrow -10 + 0,5p = 200 - p \Rightarrow 1,5p = 210 \Rightarrow p = 140$ €.
Si *p* = 140, entonces *q* = 60: *E* = (140, 60).

Modelo cuadrático

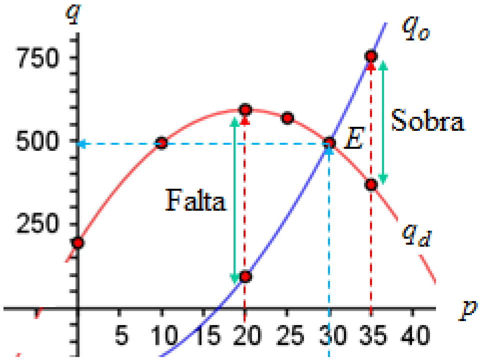
La demanda se ajusta a la función $q_d = -ap^2 + bp + c$, con $a > 0$ (parábola cóncava ∩).

La función de oferta es de la forma $q_o = a'p^2 + b'p + c'$ con $a' > 0$ (parábola convexa ∪).

Como en el modelo lineal, p, q_d y q_o deben ser positivos.

Ejemplos:

Si las funciones de oferta y demanda de un terminado producto fuesen $q_o = -226 + 0,8p^2$ y $q_d = -p^2 + 40p + 194$, con p en euros, entonces:



→ Para p = 20 € se ofertarían $q_o(20) = -226 + 0,8 \cdot 20^2 = 94$ unidades de producto; y se demandarían $q_d(20) = -20^2 + 40 \cdot 20 + 194 = 594$ unidades.
Como la demanda es mayor que la oferta, el precio subirá.
→ Para p = 35 €, la oferta es $q_o(35) = -226 + 0,8 \cdot 35^2 = 754$;
y la demanda, $q_d(35) = -35^2 + 40 \cdot 35 + 194 = 369$.
Como la demanda es menor que la oferta, el precio bajará.

→ El precio de equilibrio se encuentra cuando $q_d = q_o \Rightarrow -p^2 + 40p + 194 = -226 + 0,8p^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1,8p^2 - 40p - 420 = 0 \Rightarrow p = \frac{40 \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \cdot 1,8 \cdot (-420)}}{2 \cdot 1,8} = \frac{40 \pm 68}{3,6} = \begin{cases} 30 \\ -7,7... \end{cases}.$$

Para p = 30 € ⇒ q = 494: E = (30, 494). (La solución p = –7,7 no tiene sentido).

- También pueden darse modelos mixtos: con la función de oferta lineal y la de demanda cuadrática; o viceversa.

Ejercicio

a) Halla la función de oferta lineal para un determinado artículo sabiendo que: a un precio de 20 € se ofertan 50 unidades; y a un precio de 25 € se ofertarían 70 unidades.

b) Si la función de demanda es $q_d = 210 - \frac{1}{20}p^2$, donde p viene dado en euros, determina el precio y la cantidad de equilibrio.

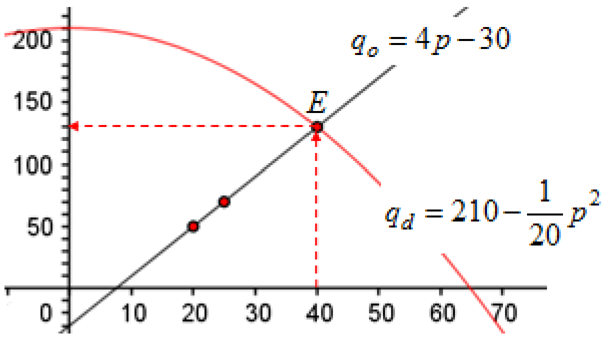
Solución:

Función de oferta: $q_o = ap + b$.

De $q_o(20) = 50 \Rightarrow 50 = 20a + b$

De $q_o(25) = 70 \Rightarrow 70 = 25a + b \Rightarrow a = 4;\ b = -30$.

Luego: $q_o(p) = 4p - 30$.



b) Igualando la oferta y la demanda:

$$4p - 30 = 210 - \frac{1}{20}p^2 \Rightarrow p^2 + 80p - 4800 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{-80 \pm \sqrt{6400 - 4 \cdot (-4800)}}{2} = \frac{-80 \pm 160}{2} = \begin{cases} 40 \\ -120 \end{cases}$$

El precio de equilibrio será de 40 € (La solución negativa no tiene sentido económico).
A ese precio, las cantidades de oferta y demanda son de 130 unidades.

5. Funciones racionales

Son de la forma $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

- Su dominio de definición son todos los números reales, salvo aquellos que anulan el denominador. Luego no están definidas en los números que son solución de $Q(x) = 0$.

Pueden tener asíntotas:
1) verticales, en las raíces del denominador que no lo sean (a la vez) del numerador;
2) horizontales, si el grado de $Q(x)$ es mayor o igual que el de $P(x)$;
3) oblicuas, cuando el grado de $P(x)$ es una unidad mayor que el de $Q(x)$.

→ Aquí se estudiará el caso $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, con $c\neq 0$. Sus características fundamentales son:

- No está definida si $cx+d=0$, esto es, si $x=-\dfrac{d}{c}$. Su dominio es $\mathbf{R}-\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.
- La recta $x=-d/c$ es asíntota vertical de la curva.
- La recta $y=\dfrac{a}{c}$ es asíntota horizontal.
- Su gráfica puede trazarse calculando algunos de sus puntos. (Siempre es creciente o siempre es decreciente).

Ejemplo:

La función $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$ cumple:

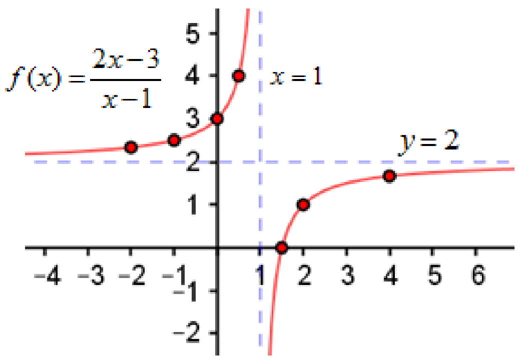
Su dominio es $\mathbf{R}-\{1\}$.

Asíntotas: $x = 1$, vertical; $y = 2$, horizontal.

Algunos puntos de su gráfica son:

(–2, 7/3); (–1, 5/2); (0, 3); (0,5, 4); (1,5, 0); (2, 1); (4, 5/3).

Siempre es creciente.



Función de proporcionalidad inversa

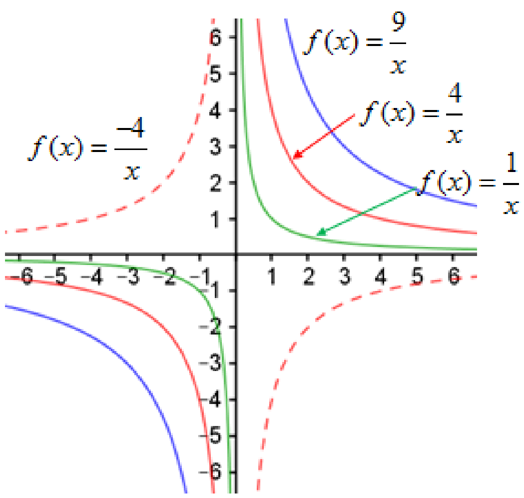
Su expresión general es $f(x)=\dfrac{k}{x}$ o $y=\dfrac{k}{x}$, donde k es una constante distinta de cero.

La regla de tres simple inversa se ajusta a esta relación.

Recuerda que dos magnitudes, x e y, son inversamente proporcionales, cuando el producto de las cantidades correspondientes es constante: $yx=k$, siendo k la constante de proporcionalidad. Así, cuando una de ellas se multiplica por un número, la otra queda dividida por el mismo número: $(n\cdot y)\cdot\left(\dfrac{x}{n}\right)=yx=k$.

Observa que $y=\dfrac{k}{x}\Leftrightarrow yx=k$.

- La representación gráfica de esta función es una hipérbola equilátera.
- Los ejes de coordenadas son asíntotas de su gráfica.
- Su gráfica es la de una hipérbola equilátera (referida a los ejes cartesianos).



Ejercicio

Dada la función $f(x)=\dfrac{2x+4}{x-4}$, se pide:

a) Su dominio y asíntotas.
b) Los puntos de corte de su gráfica con los ejes de coordenadas. ¿Toma alguna vez el valor 2?
c) Un esbozo de su gráfica, dibujando las asíntotas y algunos de sus puntos.

Solución:

a) Dom (*f*) = **R** – {4}. (El denominador no puede tomar el valor 0).
En *x* = 4 tiene una asíntota vertical → cuando *x* se acerca a 4 la función toma valores muy grandes.

- Por la izquierda de *x* = 4, pongamos para *x* = 3,9, $f(3,9)=\dfrac{2\cdot 3,9+4}{3,9-4}=-118$, que es un valor

"muy grande" y negativo. Esto indica que la rama de la función se va hacia –∞.

- Por la derecha de *x* = 4, por ejemplo, para *x* = 4,1, $f(4,1)=\dfrac{2\cdot 4,1+4}{4,1-4}=+122$, que es un valor

"muy grande" y positivo. Esto indica que la rama de la función se va hacia +∞.

También tiene una asíntota horizontal: la recta *y* = 2 (cuando *x* toma valores muy grandes la función se acerca a 2).

- Por la izquierda, hacia –∞, la función toma valores menores que 2.
- Por la derecha, hacia +∞, la función toma valores menores que 2.

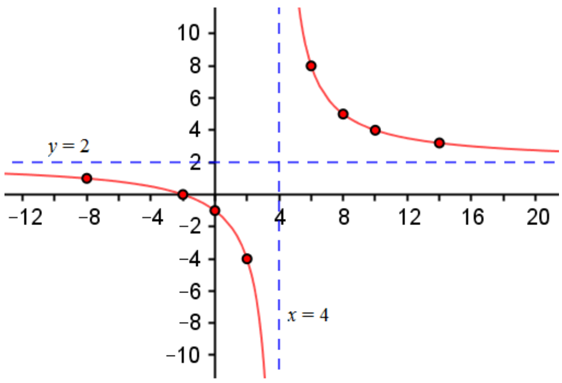
Así, por ejemplo: $f(-100)=\dfrac{-196}{-104}\approx 1,88<2$; $f(+100)=\dfrac{204}{96}=2,125>2$.

b) Para *x* = 0, *y* = –1 → punto (0, –1).
Para *y* = 0, *x* = –2 → Punto (–2, 0). (El numerador debe ser 0: $2x+4=0 \Rightarrow x=-2$)

Si $f(x)=\dfrac{2x+4}{x-4}=2 \Rightarrow 2x+4=2(x-4) \Rightarrow$

$2x+4=2x-8 \Rightarrow 4=-8$, que es absurdo.

Por tanto, la función no puede tomar el valor 2:
2 no es de su recorrido.



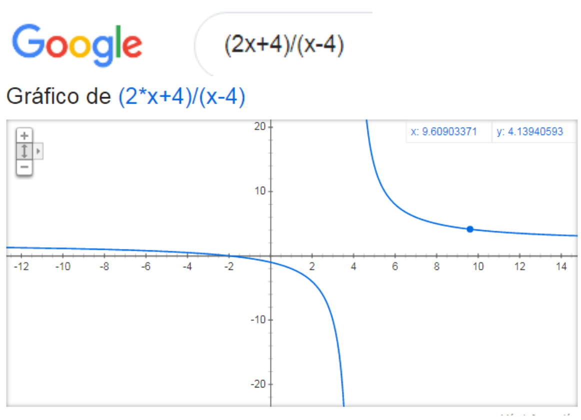
c) Algunos de sus puntos son:
(–8, 1); (–2, 0); (0, –1); (2, –4); (6, 8); (8, 5); (10, 4); (14, 3,2).

→ Para dibujar la gráfica: 1) se trazan las asíntotas; 2) se marcan los puntos; 3) se unen los puntos, procurando que la gráfica se adapte a lo deducido anteriormente.

Dibujando con Google

Los dibujos que aparecen en este tema se han hecho utilizando el programa GeoGebra.
También pueden hacerse un esbozo (con muchas limitaciones gráficas, pero muy rápido) utilizando Google.
Puede hacerse como sigue:

Se teclea la función: (2x+4)/(x–4) INTRO:



Aparece la figura de la derecha, que puede cambiar de aspecto acercando o alejando la figura (con el ratón); la escala puede variarse "trasteando" en los botones 

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Representa gráficamente las rectas de ecuación $y=-x+2$ e $y=\frac{x}{2}-3$.

A partir de ellas haz las gráficas de $f(x)=\left|-x+2\right|$ y $g(x)=\left|\frac{x}{2}-3\right|$.

2. Una empresa de alquiler de coches ofrece dos tipos de contrato:
(I) Pago de una cantidad fija de 39 € y un coste adicional de 0,35 € por km recorrido.
(II) 0,48 € por km recorrido.
a) Si la persona que alquila el coche estima que va a recorrer unos 250 km, ¿qué tipo de contrato le interesa? ¿Y si espera recorrer unos 500 km?
b) ¿Cuál es el número mínimo de km que hay que recorrer para que el contrato (I) sea el más barato? Justifica tu respuesta.

3. En la ciudad de Madrid, la Tarifa 2 del servicio de taxi (que se aplicará todos los días de 21 a 07 horas y sábados, domingos y festivos de 07 a 21 horas, para el año 2020) se especifica como sigue:
Inicio servicio: 3,15 euros. Precio kilométrico: 1,35 euros/km.
a) ¿Cuánto cuesta un trayecto de 8 km?
b) Halla la función que da el precio del trayecto dependiendo de los kilómetros recorridos.

4. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} 4-x, & \text{si } x<4 \\ x^2-10x+24, & \text{si } x\geq 4 \end{cases}$.

A partir de su gráfica indica sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, y sus máximos y mínimos. ¿Es continua?

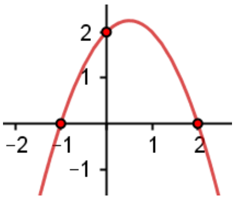
5. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases} -x^2+2, & \text{si } x\leq 1 \\ x-1, & \text{si } 1<x\leq 4 \\ \dfrac{x-1}{x-3}, & \text{si } x>4 \end{cases}$.

A partir de su gráfica indica si es discontinua en algún punto; da también sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, y sus máximos y mínimos. ¿Tiene alguna asíntota?

6. Halla los puntos de corte de las funciones cuadráticas con los ejes de coordenadas:
a) $f(x)=x^2+2x-3$; b) $f(x)=-x^2+4x$; c) $f(x)=0,5x^2+1$; d) $f(x)=-x^2+2x-1$.
Indica también las coordenadas de su vértice y la ecuación de su eje de simetría.

7. Halla la función cuadrática que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (0, 6), (–1, 0) y (3, 0).

8. La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x)=ax^2+bx+c$, donde a, b, c $\in$ **R**.
Halla los valores de a, b y c. Indica también las coordenadas del vértice de la parábola.



9. De una función se sabe que $f(100)=20$ y que $f(200)=35$. Aplicando la interpolación lineal determina los valores correspondientes a $f(140)$ y $f(205)$.

10. De un fenómeno se tiene la información dada en la siguiente tabla:

Variable x	–1	1	2	3
Variable y	10	b	13	26

a) Calcula la función de interpolación de segundo grado asociada.
b) Halla el valor que se debe asignar a b.

11. El beneficio obtenido, en miles de euros, por una pastelería en los años que se indican se da en la tabla:

Año	1	3	6
Beneficio	7	8	10

a) Halla el polinomio interpolador de segundo grado correspondiente.
b) Estima, a partir de ese polinomio, el beneficio correspondiente al año 4.

12. De un fenómeno se tiene la información dada en la siguiente tabla:

Variable x	1	1,2	2	3	4
Variable y	169	d	181	e	199

a) Calcula la función de interpolación de segundo grado que se ajusta a los datos conocidos.
b) Utilizando esa función halla los valores d y e.
c) Determina también, pero por interpolación lineal a trozos y sin calcular la función correspondiente, esos mismos valores d y e.

13. Halla, por interpolación cuadrática, el valor de d.

Variable x	1	2	3	4
Variable y	7	9	d	10

14. Las funciones de oferta y demanda de un determinado producto son:
Oferta: $q_o = 10p - 70$; Demanda: $q_d = 500 - 5p$,
donde p viene dado en euros y q en unidades.
Halla:
a) Las cantidades de oferta y demanda a 30, 40 y 50 euros. ¿Hay escasez en algún caso? ¿A partir de qué precio no hay demanda?
b) El precio y la cantidad de equilibrio para ese producto.

15. Las funciones de oferta y demanda de un determinado producto son: $q_o = -150 + 10p$ y $q_d = 240 - \frac{1}{10}p^2$, donde p viene dado en euros.
a) Halla las cantidades de oferta y demanda a un precio de 15 y de 40 euros.
b) Halla el precio y la cantidad de equilibrio.

16. Las cantidades de oferta y demanda de un determinado producto son:
$q_o = -50 + 1,5p$, $q_d = 600 - p$ (p en euros)
Calcula:
a) El precio y la cantidad de equilibrio.
b) ¿A qué precio se produciría una escasez de 100 unidades?

17. Representa gráficamente las siguientes funciones, indicando su dominio, asíntotas y los puntos de corte de cada gráfica con los ejes de coordenadas:

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$; b) $f(x) = \dfrac{1-3x}{x-2}$; c) $f(x) = \dfrac{2x-4}{x+3}$; d) $f(x) = \dfrac{-4}{x}$.

18. Cuando una persona se establece en una gran ciudad, nueva para ella, comienza un proceso paulatino de conocimiento de su nuevo hábitat. Supongamos que el porcentaje de ciudad (calles, edificios, comercios...) que va conociendo viene dado por el valor de la función $f(x)=\dfrac{100x}{x+50}$, donde x indica las semanas que lleva en la nueva ciudad.

a) ¿Qué porcentaje de ciudad conocerá al cabo de 4, 20, 52 semanas?
b) ¿Cuántas semanas deben pasar para que conozca más del 80 % de la ciudad?
c) Representa los valores hallados (y algunos más) y haz una gráfica de $f(x)$. (Para que la gráfica sea "dibujable" debes hacer cambios de escala en los ejes; por ejemplo, en el je *OX* toma las semanas de 20, en 20).

19. Una atleta SUB 18, corredora de 400 m, lleva entrenado tres años. Sus planes de entrenamiento se completan durante 40 semanas al año (las demás semanas las dedica a mantenimiento de forma). Sus tiempos en completar los 400 m se ajustan a la función $f(x)=\dfrac{55x+1800}{x+20}$, siendo x el número de semanas de entrenamiento; $f(x)$ en segundos.

a) ¿Cuánto tiempo tardaba en correr esa distancia antes de comenzar a entrenar? ¿Cuáles fueron sus tiempos al terminar las semanas 10, 20, 30, 40, 80 y 120? Con esos datos haz su gráfica.
b) ¿Cuántas semanas de entrenamiento necesitará para bajar de los 59 s?

20. El coste de instalación de una empresa es de 50000 euros. La producción de cada unidad supone un coste adicional de 20 €. Halla:

a) El coste de fabricación de 100, de 1000, de x unidades
b) El coste por unidad en cada uno de los supuestos anteriores.
c) ¿A qué tiende el costo unitario cuando se fabrican muchas unidades de producto?

Otros problemas

21. Una tienda de móviles puso a la venta un modelo de teléfono inteligente al precio de 600 €, vendiendo 200 teléfonos al mes. Variando los precios ha descubierto que por cada 10 € que se incrementa el precio del móvil, vende 20 teléfonos menos, y al revés: por cada 10 € de descuento sobre el precio inicial de 600 €, vende 20 teléfonos más. Con lo que ambas variables están relacionadas linealmente.

a) Halla la función que da la cantidad *C* de teléfonos vendidos dependiendo del precio *p*. ¿Cuántos teléfonos se venden a un precio de 500 €? ¿A qué precio no se vende ningún teléfono?
b) Deduce que la función que determina los ingresos mensuales de la tienda, dependiendo del precio del móvil, es $I(p)=-2p^2+1400p$.
c) ¿A qué precio del móvil la empresa tiene los ingresos mensuales más elevados? ¿A cuánto ascienden esos ingresos máximos?

22. Un granjero tiene 1200 metros de malla para cercar un terreno rectangular.

a) Si un lado del rectángulo mide x metros, ¿cuánto medirá el otro lado? ¿Cuál será el área de ese rectángulo en función de x?
b) Indica las dimensiones de ese rectángulo cuando x es igual a 100, 200 y 300 metros; comprueba que la fórmula anterior es correcta.
c) ¿Para qué valor de x el área del rectángulo será máxima?

23. El rendimiento intelectual, en tanto por ciento, de un estudiante, depende de los minutos que lleva estudiando. La función que da su rendimiento es: $R(t)=\dfrac{-1}{30}t^2+2t+70$, t en minutos.

a) ¿Cuál es su rendimiento al comenzar a estudiar?

b) ¿En qué momento su rendimiento es mayor? ¿Cuál es ese rendimiento?

c) Si decide descansar cuando su rendimiento está por debajo del 70 %, ¿en qué minuto debe hacerlo?

24. Durante los 11 años de funcionamiento de una empresa, sus beneficios (en millones de euros) se ajustaron a la función $B(t) = -0,3t^2 + 3,3t - 1$, siendo $t \in [0, 11]$ es el tiempo transcurrido en años desde el momento inicial.
a) Determina en qué momento del tiempo los beneficios fueron de 2 millones de euros.
b) ¿En qué momento los beneficios fueron máximos?
c) ¿En qué periodo de tiempo la empresa tuvo ganancias?

25. Los ingresos y los costes, en euros, de una empresa vienen dados por las funciones $I(x) = 50000x - 4000x^2$ y $C(x) = 100000 + 5000x$, donde x son miles de unidades producidas y vendidas; esto es, $x = 1$, significa 1000 unidades.
Halla:
a) Los puntos de equilibrio: en donde la empresa ni gana ni pierde.
b) La función que da el beneficio y los valores de producción en los que ese beneficio es positivo.